BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Sommersemester 1999)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1:

Es sei

$$M := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0 \text{ und } |x_2| \leq x_1^2 \right\} ,$$
$$f(x) := x_2 \quad \forall\, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M \ ,$$

sowie

$$L_c : \mathbb{R}^2 \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto c\, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und}$$
$$\varepsilon_c(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x\|_2}(f(x) - f(0) - L_c(x)) & \text{falls } x \in M \backslash \{0\} \\ 0 \in \mathbb{R} & \text{falls } x = 0 \big(\in \mathbb{R}^2\big) \end{cases}$$

für alle $c \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, daß für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $f(x) = f(0) + L_c(x) + \|x\|_2\, \varepsilon_c(x) \quad \forall\, x \in M$,

b) $\lim\limits_{M \ni x \to 0} \varepsilon_c(x) = 0$.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt, daß man bei einer Ausdehnung des Differenzierbarkeitsbegriffs auf nicht reguläre Punkte die Eindeutigkeit der Ableitung verlieren würde.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß es zu $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_1$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^2$ und linear unabhängigen $\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1 \in \mathbb{R}^2$ genau ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vom Grad ≤ 2 gibt mit

$$p(t_0) = x_0 \ , \ p(t_1) = x_1 \ , \ p'(t_0)^\top \mathfrak{n}_0 = p'(t_1)^\top \mathfrak{n}_1 = 0 \ .$$

Ist das Bild $p([t_0, t_1]) \subset \mathbb{R}^2$ unabhängig von $[t_0, t_1]$?

Anleitung: Mit den baryzentrischen Koordinatenfunktionen

$$\lambda_0 : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \ \text{ und } \ \lambda_1 : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$$

gilt für jedes Polynom $p \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vom Grad ≤ 2

$$p = \lambda_0^2\, p(t_0) + \lambda_1^2\, p(t_1) + \lambda_0 \lambda_1 c$$

mit einem $c = c_0 \mathfrak{n}_0 + c_1 \mathfrak{n}_1 \in \mathbb{R}^2$ $(c_0, c_1 \in \mathbb{R})$.
Zeigen Sie, daß $p'(t_0)^\top \mathfrak{n}_0 = p'(t_1)^\top \mathfrak{n}_1 = 0$ für genau ein (c_0, c_1) gilt.

Aufgabe 3:

$m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sei ungerade.

Zeigen Sie:

a) Zu $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} = x_1 \in \mathbb{R}^n$ und $t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine quadratische Spline-Funktion $s : [t_1, t_{m+1}] \to \mathbb{R}^n$ bezüglich $t_1, \ldots, t_{m+1}$ mit

$$s(t_i) = x_i,\ i = 1, \ldots, m+1, \text{ und}$$
$$s'(t_{m+1}) = s'(t_1)\ .$$

b) $s'(t_1) = \sum_{\nu=2}^{m+1} \frac{(-1)^\nu}{t_\nu - t_{\nu-1}} (x_\nu - x_{\nu-1})$.

Erstellen Sie für $t_i := i - 1,\ i = 1, \ldots, 6,$ und

$$x_1 = x_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix},\ x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix},\ x_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix},\ x_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Graphiken des Bildes $s([0,5]) \subset \mathbb{R}^2$ sowie des affinen Bildes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 48 & 40 & 0 \\ -12 & 35 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s(t) \end{pmatrix} \ :\ t \in [0,5] \right\}$$

des Graphen $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ s(t) \end{pmatrix} \ :\ t \in [0,5] \right\}$.

Aufgabe 4:

Zu $t_0, t_1 \in \mathbb{R},\ t_0 \neq t_1$ seien definiert:

$$\lambda_0 : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} \text{ und } \lambda_1 : \mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\ .$$

$(\lambda_0^3,\ \lambda_0^2\lambda_1,\ \lambda_0\lambda_1^2,\ \lambda_1^3)$ ist dann eine Basis des Vektorraums $\mathcal{P}_3$ der Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3.

Zeigen Sie, daß die linearen Funktionale

$$l_1 : \mathcal{P}_3 \ni p \longmapsto p(t_0)$$
$$l_2 : \mathcal{P}_3 \ni p \longmapsto p(t_1)$$
$$l_3 : \mathcal{P}_3 \ni p \longmapsto p'(t_0)$$
$$l_4 : \mathcal{P}_3 \ni p \longmapsto p'(t_1)$$

linear unabhängig sind (und damit eine Basis des Dualraums $\mathcal{P}_3^*$ von $\mathcal{P}_3$ bilden).

Stellen Sie die Funktionale der dualen Basis von $(\lambda_0^3,\ \lambda_0^2\lambda_1,\ \lambda_0\lambda_1^2,\ \lambda_1^3)$ als Linearkombinationen der $l_i,\ i = 1, \ldots, 4,$ dar.

Bestimmen Sie eine Basis $(q_1, \ldots, q_4)$ von $\mathcal{P}_3$, für die $(l_1, \ldots, l_4)$ die zugehörige duale Basis ist.

Abgabetermin: Freitag, 12. Juni 1999, in der Vorlesung