BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel aus der Numerik
(Sommersemester 1999)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1:

K sei ein endlicher simplizialer Komplex, G bezeichne die Menge der Grundsimplexe in K.
$\langle x_0, x_1\rangle$ sei eine längste Kante in K, $m := \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, $l := \|x_1 - x_0\|_2$,

$$G' := \begin{cases} (G \setminus \{\langle x_0, x_1\rangle\}) \cup \{\langle x_0, m\rangle, \langle m, x_1\rangle\} & \text{falls } \langle x_0, x_1\rangle \in G, \\ (G \setminus \{S \in G \,:\, \langle x_0, x_1\rangle \subset S\}) & \\ \quad \cup \{\langle x_0, m, x_2, \ldots, x_k\rangle, \langle m, x_1, \ldots, x_k\rangle \,:\, \langle x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle \in G\} & \text{falls } \langle x_0, x_1\rangle \notin G. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) $K' := \{S' \,:\, \exists S \in G' :\, S' \text{ Seite von } S\}$ ist eine simpliziale Unterteilung von K.

b) Die Anzahl der Kanten in K' mit einer Länge $\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\, l$ ist um 1 geringer als die Anzahl der Kanten in K mit einer Länge $\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}\, l$.

Bemerkung: Wiederholte Anwendung solcher Unterteilungen führt zur Ausscheidung aller Kanten mit einer Länge $> \frac{1}{2}\sqrt{3}\, l$. Man hat damit eine (von der in der Vorlesung beschriebenen verschiedene) Strategie, um endliche simpliziale Komplexe beliebig fein zu unterteilen.

Aufgabe 2:

Zu beliebigem $c \in]0,1[$ seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$ so gewählt, daß $\frac{1}{1+\frac{1}{k}} > c$ und $\cos(\alpha) \geq 1 - \frac{1}{2k}$ gilt.
Q sei die konvexe Hülle der $2k+2$ Punkte

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{i\alpha}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{i\alpha}{k}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ i = -k, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k.$$

Zeigen Sie:

a) Der Durchmesser von Q ist 1 .

b) Die gegebenen Punkte sind die Eckpunkte von Q .

c) Für den Schwerpunkt $(s_1, s_2)^\top$ von Q gilt $s_1 > c$.

d) Die eigentliche baryzentrische Unterteilung von Q enthält ein Dreieck mit dem Durchmesser s_1 $(> c)$.

e) Der Satz IIa auf Seite 136 der Topologie von P. Alexandroff und H. Hopf ist falsch.

Aufgabe 3:

Für $r \geq 1$ seien $x_0, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig. Dann ist für jedes $i \in \{0, \ldots, r\}$

$$(x_j - x_i \,:\, j \in \{0, \ldots, r\} \setminus \{i\})$$

eine Basis des zu $\mathrm{aff}(\{x_0, \ldots, x_r\})$ gehörigen Unterraums U von $\mathbb{R}^n$.
Für jedes $i \in \{0, \ldots, r\}$ gibt es daher ein eindeutig bestimmtes $\mathfrak{n}_i \in U$ mit

$$\mathfrak{n}_i^\top (x_j - x_i) = 1 \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, r\} \setminus \{i\} \ .$$

Zeigen Sie:

a) $\operatorname{conv}(\{x_0,\ldots,x_r\}) = \operatorname{aff}(\{x_0,\ldots,x_r\}) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \mathfrak{n}_i^\top x \le \mathfrak{n}_i^\top x_i + 1,\ i = 0,\ldots,r\right\}$.

b) $x \in \operatorname{aff}(\{x_0,\ldots,x_r\})$ ist genau dann ein relativ innerer Punkt von $\operatorname{conv}(\{x_0,\ldots,x_r\})$, wenn

$$\mathfrak{n}_i^\top x < \mathfrak{n}_i^\top x_i + 1,\ i = 0,\ldots,r$$

gilt.

c) Aus $x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i(x)\, x_i$ und $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i(x) = 1$ folgt:

$$\lambda_i(x) = 1 - \mathfrak{n}_i^\top (x - x_i) \quad \forall\, i \in \{0,\ldots,r\}\ .$$

d) $\sum_{i=0}^{r} \mathfrak{n}_i = 0$.

Aufgabe 4:

$x_0,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^p$ seien affin unabhängig.
Dann gibt es eindeutig bestimmte (baryzentrische Koordinaten-) Funktionen

$$\lambda_i : \mathbb{R}^p \ni x \longmapsto \lambda_i(x) \in \mathbb{R},\ i = 0,\ldots,p,$$

mit den Eigenschaften

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(x)\, x_i = x \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^p.$$

Mit $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\Omega := \left\{ (\alpha_0,\ldots,\alpha_p) \in \mathbb{N}_0^p \,:\, \sum_{i=0}^{p} \alpha_i = n \right\}$$

und zu jedem $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p) \in \Omega$

$$\Pi_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)} : \mathbb{R}^p \ni x \longmapsto \prod_{i=0}^{p} \lambda_i^{\alpha_i}(x) \in \mathbb{R}\ .$$

Zeigen Sie, daß

$$\left(\Pi_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)} \,:\, (\alpha_0,\ldots,\alpha_p) \in \Omega\right)$$

eine Basis des Vektorraums der Polynome $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ vom Grad $\le n$ ist.

Hinweis: Ist $(\alpha_0',\ldots,\alpha_p') \in \mathbb{N}_0^p$ mit $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i' = n - 1$, so ist

$$p : \mathbb{R}^p \ni x \longmapsto \prod_{i=0}^{p} \lambda_i^{\alpha_i'}(x) = \left(\prod_{i=0}^{p} \lambda_i^{\alpha_i'}(x)\right) \sum_{j=0}^{p} \lambda_j(x) = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j^{\alpha_j'+1}(x) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{p} \lambda_i^{\alpha_i'}(x)$$

eine Linearkombination von Polynomen $\Pi_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)}$ mit $(\alpha_0,\ldots,\alpha_p) \in \Omega$.

Abgabetermin: Mittwoch, 9. Juni 1999, in der Vorlesung