BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

*Fachbereich 7*
**MATHEMATIK**

G. Heindl / P. Feuerstein

**Ausgewählte Kapitel aus der Numerik**
(Sommersemester 1999)

**Übungsblatt 4**

**Aufgabe 1:**

Für endlich viele, paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ist der *Schwerpunkt* der Menge $X := \{x_1, \ldots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$s(X) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \ .$$

Zeigen Sie:

Für zwei nichtleere Teilmengen $Y, Z \subset X$ mit $Z \subset Y$ und $1 \leq r := \#Y$ gilt:

$$\|s(Y) - s(Z)\|_2 \leq \frac{r-1}{r} \cdot d_2(X) \ .$$

Dabei ist

$$\mathrm{d}_2(X) = \max \left\{ \|x_i - x_j\|_2 \ : \ x_i, x_j \in X \right\} \ \ (= \mathrm{d}_2(\mathrm{conv}(X)))$$

der Durchmesser von $X$.

Was folgt aus obiger Ungleichung für den größtmöglichen Abstand der Schwerpunkte zweier Seiten $S_1, S_2$ mit $S_1 \subset S_2$ eines $n$–dimensionalen Simplex' $S = \langle y_0, \ldots, y_n \rangle \subset \mathbb{R}^n$ ?

**Aufgabe 2:**

Mit $a_i \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, sei

$$P := \left\{ t \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i^\top t \geq \beta_i \ , \ i = 1, \ldots, k \right\} .$$

Zeigen Sie: Für jedes $t^\circ \in \mathring{P}$ ist

$$\varrho(t^\circ) := \min_{i=1}^{k} \frac{a_i^\top t^\circ - \beta_i}{\|a_i\|_2} \quad (> 0 \ !)$$

der Radius der größten Kugel mit Mittelpunkt $t^\circ$, die in $P$ enthalten ist.

Bestimmen Sie zu

$$P := \left\{ t \in \mathbb{R}^3 \ : \ t_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, \ t_1 + t_2 + t_3 \geq 1 \right\}$$

und

$$t^0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ \left( \in \mathring{P} \right)$$

den Durchschnitt von $\partial P$ mit der Kugel mit Mittelpunkt $t^\circ$ und Radius $\varrho(t^\circ)$.

**Aufgabe 3:**

$G$ sei eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von konvexen Zellen des $\mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften:

- Kein $Q \in G$ ist Seite einer Zelle aus $G \backslash \{Q\}$ .
- Sind $P, Q \in G$, so ist $P \cap Q$ eine gemeinsame Seite von $P$ und $Q$.
- Jeder Punkt aus $\overline{G} := \bigcup_{Q \in G} Q$ besitzt eine Umgebung, die nur mit endlich vielen Zellen aus $G$ gemeinsame Punkte hat.

Zeigen Sie:

Es gibt genau einen Zellenkomplex $K$, so daß $G$ die Menge der Grundzellen von $K$ ist, nämlich

$$K := G \cup \{S \,:\, \exists\, Q \in G : S \text{ Seite von } Q\} \,.$$

$K$ ist euklidisch, $\overline{G}\ \left(= \overline{K}\right)$ also ein Polyeder.

*Anleitung:* Für jedes konvexe Raumstück $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

a) Sind $S, T$ Seiten von $Q$, so ist $S \cap T$ eine Seite von $Q$.
b) Ist $S$ eine Seite von $Q$ und $T$ eine Seite von $S$, so ist $T$ eine Seite von $Q$.
c) Sind $S, T$ Seiten von $Q$ und gilt $S \subset T$, so ist $S$ eine Seite von $T$.

(Vergl. dazu §1.5 der Vorlesung und Aufgabe 4 auf Übungsblatt 3)

**Aufgabe 4:**

$(e_1, \ldots, e_n)$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^n$,

$$P := \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \,:\, 0 \le x_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n \right\}$$

(das von $e_1, \ldots, e_n$ aufgespannte Parallelepiped).

Ferner seien für jede Permutation $\sigma$ von $\{1, \ldots, n\}$ definiert:

$$x_k^\sigma := \sum_{i=k}^{n} e_{\sigma(i)} \,,\ k = 1, \ldots, n, \text{ und}$$
$$\Delta_\sigma := \operatorname{conv}(0, x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma) \,.$$

Zeigen Sie:

$\{\Delta_\sigma \,:\, \sigma \text{ Permutation von } \{1, \ldots, n\}\}$ ist die Menge der Grundelemente einer simplizialen Zerlegung von $P$.

Skizzieren Sie diese Grundelemente für $n = 2$ und $n = 3$.

*Anleitung:*

Sei $x \in P$, d. h. $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ mit $0 \le x_j \le 1,\ j = 1, \ldots, n$. Dann gibt es eine Permutation $\sigma$ von $\{1, \ldots, n\}$ mit $x_{\sigma(i)} \ge x_{\sigma(i-1)}$ , $i = 2, \ldots, n$.

Mit $y_1 := x_{\sigma(1)}$ und $y_i := x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}$ , $i = 2, \ldots, n$, ist $x_{\sigma(i)} = \sum_{j=1}^{i} y_j$ , $i = 1, \ldots, n$. Es folgt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}\, e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{i} y_j \right) e_{\sigma(i)} = \sum_{k=1}^{n} y_k\, x_k^\sigma \overset{!}{\in} \Delta_\sigma \,.$$

**Aufgabe 5:**

$(e_1, e_2, e_3)$ sei eine Basis von $\mathbb{R}^3$,

$$P := \left\{ \sum_{j=1}^{3} x_j e_j \ : \ 0 \leq x_j \leq 1, \ j = 1, 2, 3 \right\}$$

(das von $e_1, e_2, e_3$ aufgespannte Parallelepiped). Weiter seien definiert:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \operatorname{conv}\{0, \ e_1, \ e_2, \ e_3\}, \\
\Delta_2 &:= \operatorname{conv}\{e_1, \ e_2, \ e_3, \ e_1 + e_2 + e_3\}, \\
\Delta_3 &:= \operatorname{conv}\{e_1 + e_2, \ e_1, \ e_2, \ e_1 + e_2 + e_3\}, \\
\Delta_4 &:= \operatorname{conv}\{e_1 + e_3, \ e_1, \ e_3, \ e_1 + e_2 + e_3\}, \\
\Delta_5 &:= \operatorname{conv}\{e_2 + e_3, \ e_2, \ e_3, \ e_1 + e_2 + e_3\}.
\end{aligned}$$

Belegen Sie (eventuell teilweise graphisch):

a) $\Delta_i$ , $i = 1, \ldots, 5$, sind die Grundelemente einer simplizialen Zerlegung von $P$.

b) $-\Delta_i$ , $i = 1, \ldots, 5$, sind die Grundelemente einer simplizialen Zerlegung von $-P$.

c) $i_1 e_1 + i_2 e_2 + i_3 e_3 + \Delta_i$ , $i_1 e_1 + i_2 e_2 + i_3 e_3 - \Delta_i \ : \ i_1, i_2, i_3 \in \mathbb{Z}, \ i_1 + i_2 + i_3$ gerade, $i = 1, \ldots, 5$, sind die Grundelemente einer simplizialen Zerlegung von $\mathbb{R}^3$.

Versuchen Sie eine simpliziale Zerlegung von $P$ mit weniger als $5$ Grundelementen zu finden.

**Aufgabe 6:**

Begründen oder widerlegen Sie:

a) Zu jedem Dreieck $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ gibt es einen euklidischen simplizialen Komplex $K$ mit den Eigenschaften:

- Jedes Grundelement von $K$ ist kongruent zu $\Delta$ ,
- $\overline{K} = \mathbb{R}^2$ .

b) Zu jedem konvexen Viereck $Q \subset \mathbb{R}^2$ gibt es einen euklidischen Zellenkomplex $K$ mit den Eigenschaften:

- Jedes Grundelement von $K$ ist kongruent zu $Q$ ,
- $\overline{K} = \mathbb{R}^2$ .

c) Es gibt ein Tetraeder $\Delta \subset \mathbb{R}^3$, zu dem ein euklidischer simplizialer Komplex $K$ mit den Eigenschaften

- jedes Grundelement von $K$ ist kongruent zu $\Delta$ ,
- $\overline{K} = \mathbb{R}^3$

existiert.

**Abgabetermin:** Freitag, 21. Mai 1999, in der Vorlesung