BERGISCHE UNIVERSITÄT
GESAMTHOCHSCHULE WUPPERTAL

Fachbereich 7
MATHEMATIK

G. Heindl / P. Feuerstein

Ausgewählte Kapitel
aus der Komplexitätstheorie
(Wintersemester 1996/97)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:

Es sei $Z := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| = 1,\ i = 1, \dots, n\}$. Zeigen Sie:

a.) $\|A\|_{\infty,1}\Big(:= \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_1\Big) = \max_{\|x\|_\infty \le 1} \|Ax\|_1 = \max_{x \in Z} \|Ax\|_1 \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

b.) Für alle symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$\begin{aligned}\|A\|_{\infty,1} &= \max\left\{y^\top Ax : \|x\|_\infty = 1,\ \|y\|_\infty = 1\right\} = \max\left\{y^\top Ax : \|x\|_\infty \le 1,\ \|y\|_\infty \le 1\right\} \\ &= \max\left\{y^\top Ax : x, y \in Z\right\} = \max_{\|x\|_\infty = 1} x^\top Ax = \max_{\|x\|_\infty \le 1} x^\top Ax = \max_{x \in Z} x^\top Ax \ .\end{aligned}$$

Hinweise:

- $u^\top v \le \|u\|_\infty \|v\|_1 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$. (Beweis!)
- Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und C eine kompakte konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so gilt $\max_{x \in C} f(x) = \max_{x \in \mathrm{Ext}(C)} f(x)$. Dabei bezeichnet $\mathrm{Ext(C)}$ die Menge der Extrempunkte von C.
- $\mathrm{Ext}(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \le 1\}) = Z$. (Beweis!)
- $y^\top Ax = \frac{1}{4}\Big[(x+y)^\top A(x+y) - (y-x)^\top A(y-x)\Big]$ falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. (Beweis!)
- $y^\top Ax \le \big(\frac{x+y}{2}\big)^\top A\big(\frac{x+y}{2}\big)$ falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. (Beweis!)

Aufgabe 2:

Für $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n,\ D = (d_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $C \le D :\Leftrightarrow c_{ij} \le d_{ij},\ i,j = 1, \dots, n$, und $|D| := (|d_{ij}|)_{i,j=1}^n$. Desweiteren sei $E := (1)_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Zeigen Sie, daß für eine symmetrische positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

a.) $\|A\|_{\infty,1} < 1 \ \Rightarrow C$ regulär $\forall C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\big|A^{-1} - C\big| \le E$.

b.) C regulär $\forall$ symmetrischen $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\big|A^{-1} - C\big| \le E \ \Rightarrow\ \|A\|_{\infty,1} < 1$.

Hinweise: Zeigen Sie

zu a.): $\Delta \in \mathbb{R}^{n\times n},\ |\Delta| \le E \Rightarrow \|\Delta y\|_\infty \le \|y\|_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$,

zu b.): falls $\|A\|_{\infty,1} \ge 1$ und $\|A\|_{\infty,1} = x^\top Ax$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty \le 1$, dann ist $C := A^{-1} - \|A\|_{\infty,1}^{-1}\big(xx^\top\big)$ symmetrisch, wegen $C(Ax) = 0$ und $Ax \ne 0$ aber singulär.

Aufgabe 3:

Die Entscheidungsprobleme Π_1, Π_2 seien definiert durch

$$\begin{aligned}D_{\Pi_1} &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{A \in \mathbb{Q}^{n\times n} : A \text{ symm., pos.def.}\big\},\ Y_{\Pi_1} := \Big\{A \in D_{\Pi_1} : \|A\|_{\infty,1} < 1\Big\}, \\ D_{\Pi_2} &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{(\underline{C}, \overline{C}) : \underline{C}, \overline{C} \in \mathbb{Q}^{n\times n} \text{ und } \underline{C} \le \overline{C}\big\}, \\ Y_{\Pi_2} &:= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big\{(\underline{C}, \overline{C}) : \underline{C}, \overline{C} \in \mathbb{Q}^{n\times n},\ \underline{C} \le \overline{C} \text{ und } C \text{ regulär } \forall C \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } \underline{C} \le C \le \overline{C}\big\}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß Π_1 auf Π_2 reduzierbar ist (indem Sie eine Abbildung $f : D_{\Pi_1} \to D_{\Pi_2}$ mit der Eigenschaft $A \in Y_{\Pi_1} \Leftrightarrow f(A) \in Y_{\Pi_2}$ konstruieren).

Aufgabe 4:

Untersuchen Sie empirisch das Laufzeitverhalten der folgenden Algorithmen zur Berechnung von

$$C = \begin{pmatrix} c[1,1] & c[1,2] \\ c[2,1] & c[2,2] \end{pmatrix} := A \cdot B$$

für `integer`-Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} a[1,1] & a[1,2] \\ a[2,1] & a[2,2] \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} b[1,1] & b[1,2] \\ b[2,1] & b[2,2] \end{pmatrix}:$$

Alg.1: (8 Multiplikationen, 4 Additionen (aus der Definition von $A \cdot B$ folgender Algorithmus))

```
c[1,1]:=a[1,1]*b[1,1]+a[1,2]*b[2,1];
c[1,2]:=a[1,1]*b[1,2]+a[1,2]*b[2,2];
c[2,1]:=a[2,1]*b[1,1]+a[2,2]*b[2,1];
c[2,2]:=a[2,1]*b[1,2]+a[2,2]*b[2,2];
```

Alg.2: (7 Multiplikationen, 11 Additionen, 7 Subtraktionen (Strassen [1969]))

```
m1:=(a[1,2]-a[2,2])*(b[2,1]+b[2,2]);
m2:=(a[1,1]+a[2,2])*(b[1,1]+b[2,2]);
m3:=(a[1,1]-a[2,1])*(b[1,1]+b[1,2]);
m4:=(a[1,1]+a[1,2])*b[2,2];
m5:=a[1,1]*(b[1,2]-b[2,2]);
m6:=a[2,2]*(b[2,1]-b[1,1]);
m7:=(a[2,1]+a[2,2])*b[1,1];
c[1,1]:=m1+m2-m4+m6;
c[1,2]:=m4+m5;
c[2,1]:=m6+m7;
c[2,2]:=m2-m3+m5-m7;
```

Alg.3: (7 Multiplikationen, 7 Additionen, 8 Subtraktionen (Winograd [1973]))

```
s1:=a[2,1]+a[2,2];
s2:=s1-a[1,1];
s3:=a[1,1]-a[2,1];
s4:=a[1,2]-s2;
s5:=b[1,2]-b[1,1];
s6:=b[2,2]-s5;
s7:=b[2,2]-b[1,2];
s8:=s6-b[2,1];
m1:=s2*s6;
m2:=a[1,1]*b[1,1];
m3:=a[1,2]*b[2,1];
m4:=s3*s7;
m5:=s1*s5;
m6:=s4*b[2,2];
m7:=a[2,2]*s8;
t1:=m1+m2;
t2:=t1+m4;
c[1,1]:=m2+m3;
c[1,2]:=t1+m5+m6;
c[2,1]:=t2-m7;
c[2,2]:=t2+m5;
```

Bemerkung: Algorithmus 2 wurde als schnellerer Ersatz für Algorithmus 1, Algorithmus 3 als schnellerer Ersatz für Algorithmus 2 konzipiert!

Abgabetermin: Donnerstag, 5. Dezember 1996, in der Vorlesung