

**Geometrie
und
Vollständigkeit
des Komplementes von
 $G_{2,6}$ in \mathbb{P}^{14}**

Diplomarbeit im Fachbereich 7 - Mathematik an der
Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal

von Peter Feuerstein

Betreuung: Prof.Dr.Klaus Fritzsche

Wuppertal, den 31. Mai 1991

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
0. Einleitung	1
1. Hilfsmittel und Definitionen	5
1.1 Die Plücker-Einbettung	5
1.2 Die Fubini-Study-Metrik	6
1.3 Homogene und normal-homogene Untermannigfaltigkeiten	7
1.4 Der Schnittort	7
1.5 Der Schubert-Calculus	9
1.6 Positive holomorphe Vektorraumbündel	10
2. Die Geometrie von $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$	14
A. Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,6}$	14
B. Das Komplement $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$	15
C. Der Schnittort $C(G_{2,6})$ und der Orbitraum	23
3. Die Cohomologie von $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$	37
4. Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion	40
 Literaturverzeichnis	

0. Einleitung

Für das Studium komplexer Mannigfaltigkeiten ist die Frage nach der Lösbarkeit der Cousin'schen Probleme von großer Bedeutung. Die Ausweitung dieser Probleme auf kohärente analytische Garben auf Steinschen Mannigfaltigkeiten liefert als wichtige Ergebnisse die Theoreme A und B von Cartan. Theorem B besagt, daß auf Steinschen Mannigfaltigkeiten sämtliche Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i \geq 1$ und jede kohärente analytische Garbe \mathcal{F} verschwinden. Tatsächlich sind die Steinschen Mannigfaltigkeiten sogar durch diese Eigenschaft charakterisiert. Nun gibt es aber in der komplexen Analysis eine große Klasse von nicht-Steinschen Mannigfaltigkeiten. Während man über kompakte Mannigfaltigkeiten noch weiß, daß alle Cohomologiegruppen endlich-dimensional sind, verhalten sich nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten sehr unterschiedlich. Für n -dimensionale parakompakte Mannigfaltigkeiten ohne kompakte Komponenten hat man das auf den Arbeiten von Malgrange, Komatsu und Siu aufbauende Resultat von Greene und Wu [GW], welches besagt, daß alle Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i > n$ verschwinden. Daran anknüpfend liefert folgende Definition eine Möglichkeit der groben Klassifikation:

Def.: Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) X heißt q -vollständig, wenn es eine (mindestens \mathcal{O}^2 -)Ausschöpfungsfunktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in X$ die Leviform $L_x(f)$ positiv definit auf einem mindestens $(n-q+1)$ -dimensionalen Unterraum des Tangentialraumes $T_x X$ ist.
- (ii) X heißt cohomologisch q -vollständig, wenn alle Cohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ für $i \geq q$ und jede kohärente analytische Garbe \mathcal{F} verschwinden.

Man weiß bereits, daß diese beiden Begriffe für $q = 1$, d.h. für Steinsche Mannigfaltigkeiten äquivalent sind (s.o.).

Einen Ausgangspunkt für weitere Überlegungen liefert das wichtige Ergebnis von A. Andreotti und H. Grauert [AG], welches besagt, daß für beliebige $q \geq 1$ und jede komplexe Mannigfaltigkeit aus der q -Vollständigkeit die cohomologische q -Vollständigkeit folgt. Die Umkehrbarkeit dieser Implikation ist jedoch eine bislang unbeantwortete Frage, denn es ist weder ein Gegenbeispiel bekannt, noch konnte die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe gezeigt werden.

Ein Ansatzpunkt zur Lösung dieses Problems ist die Betrachtung spezieller Beispiele. Eine interessante Klasse von Beispielen stellen die Komplemente algebraischer Untervarietäten in komplex projektiven Räumen dar. Ihre Untersuchung wurde mit folgendem Resultat von W.Barth [Ba2] begonnen:

Ist $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine abgeschlossene zusammenhängende komplexe Untermannigfaltigkeit der komplexen Codimension q , dann ist die Funktion $f : \mathbb{P}^n \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := -\text{dist}^2(x, Y)$, eine Ausschöpfungsfunktion für $\mathbb{P}^n \setminus Y$, deren Leviform in jedem Punkt, in dem f differenzierbar ist, höchstens $q-1$ Eigenwerte ≤ 0 hat.

Offenbar sind also die Punkte, in denen die Funktion f nicht differenzierbar ist, von besonderem Interesse, da in ihnen die Konstruktion einer q -konvexen Ausschöpfungsfunktion und damit der Beweis der q -Vollständigkeit von $\mathbb{P}^n \setminus Y$ i.a. Schwierigkeiten bereitet.

Diese Beobachtung war Ausgangspunkt der Untersuchungen von M. Buchner, K. Fritzsche und T. Sakai in [BFS], wo sie eine Klasse von komplexen Mannigfaltigkeiten untersuchten, für die sie explizit durch Konstruktion von Ausschöpfungsfunktionen und Berechnung der Cohomologien die Äquivalenz der beiden Begriffe zeigten. In diesen Fällen handelte es sich um Komplemente normal-homogener Untermannigfaltigkeiten (Def. siehe 1.3) in einem komplex projektiven Raum \mathbb{P}^n . Jedes dieser Komplemente war der Totalraum eines Faserbündels über einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit mit Steinschen Fasern, so daß sich die entsprechende Ausschöpfungsfunktion leicht konstruieren ließ.

Eine weitere Klasse von komplexen Mannigfaltigkeiten wurde von M. Buchner und K. Fritzsche in [BF] untersucht, nämlich die Komplemente der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_{2,n}$, die mit der Plücker-Einbettung in \mathbb{P}^N mit $N = \binom{n}{2} - 1$ eingebettet sind. Dabei sind die ersten beiden nicht trivialen Fälle $G_{2,4} \cong Q_4$ und $G_{2,5}$ normal-homogene Untermannigfaltigkeiten, also solche, die bereits in [BFS] behandelt wurden. Für $n \geq 6$ ist $G_{2,6}$ nicht mehr normal-homogen, jedoch handelt es sich bei diesen Grassmann-Mannigfaltigkeiten noch immer um homogene Untermannigfaltigkeiten, also Bahnen von abgeschlossenen Untergruppen der Isometrien des \mathbb{P}^N .

In dieser Arbeit wird der erste nicht normal-homogene Fall behandelt, also das Komplement $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$. Da die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für beliebige $n \in \mathbb{N}$ bereits in [BF] gezeigt wurde, wird großer Wert auf die Übersichtlichkeit in den konstruktiven Teilen dieses Beweises gelegt, insbesondere also bei der Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion. Neu sind die geometrischen Untersuchungen der $G_{2,6}$ und ihres Komplements, vor allem die Bestimmung der Orbitstruktur (Kap.2). Ziel ist dabei ein tieferes Verständnis der Hindernisse gegen eine Verbesserung des Vollständigkeitsgrades. Es ist zu vermuten, daß sich die hier entwickelten Methoden auch auf andere Situationen anwenden lassen.

Zum Aufbau der Arbeit:

Zunächst werden in Kapitel 1 die erforderlichen Hilfsmittel eingeführt.

In Kapitel 2 folgt dann die genaue geometrische Untersuchung der Grassmann-Mannigfaltigkeit und ihres Komplements $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$. Anschließend werden diejenigen Punkte betrachtet, in denen die Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion Schwierigkeiten bereitet. Diese Punkte, in denen die Funktion $f(x) = -\text{dist}^2(x, G_{2,6})$ nicht differenzierbar ist, liegen dicht im Schnittort $C(G_{2,6})$ von $G_{2,6}$. Es wird sich im vorliegenden Fall zeigen, daß der Schnittort wie in den normal-homogenen Fällen nur aus solchen Punkten besteht, von denen ausgehend man mindestens zwei minimale Geodätische zur Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,6}$ finden kann. Da die Menge $C_0(G_{2,6})$ dieser Punkte eine Teilmenge derjenigen Menge von Punkten ist, in denen f nicht differenzierbar ist, und andererseits dicht im Schnittort liegt, erhält man die Gleichheit der drei Mengen. Unter Verwendung einer natürlichen Stratifikation sowie der speziellen Gestalt der Geodätischen in $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ läßt sich nun der Schnittort explizit angeben. Es folgt die Berechnung des Orbitraums bezüglich der oben genannten Untergruppe der Isometrien, sowie eine geometrische Interpretation der Ergebnisse.

In den anschließenden Kapiteln wird die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für den vorliegenden Fall bewiesen.

Dazu wird in Kap.3 zunächst die analytische Cohomologie berechnet, insbesondere wird gezeigt, daß $H^9(\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}, \Omega^{14}) \neq 0$ ist, so daß das Komplement $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ nicht 9-vollständig sein kann.

In Kap.4 schließlich wird eine Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ konstruiert, deren Leviform für alle $x \in \mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ auf einem mindestens 5-dimensionalen Unterraum des Tangentialraumes $T_x(\mathbb{P}^{14})$ positiv definit ist, d.h. es wird die 10-Vollständigkeit des Komplements $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ gezeigt. Die Konstruktion erfolgt dabei unter Zuhilfenahme der schon oben erwähnten Stratifikation. In der Nähe von $G_{2,6}$ entspricht die Ausschöpfungsfunktion fast der von W.Barth betrachteten Funktion f , mit größerem Abstand sieht sie aber (erwartungsgemäß) deutlich anders aus. Aus den Resultaten der letzten beiden Kapitel folgt schließlich die Äquivalenz der beiden Vollständigkeitsbegriffe für das betrachtete Beispiel.

1. Hilfsmittel und Definitionen

1.1 Die Plücker-Einbettung

Sei $St(k,n) := \{ A \in \mathbb{C}^{k \times n} \mid \text{rg}(A) = k \}$, $G_{k,n} := \{ k\text{-dim. Unterräume von } \mathbb{C}^n \}$.

Die Abbildung $\tilde{\rho} : St(k,n) \rightarrow (\Lambda^k \mathbb{C}^n) \setminus \{0\} = \mathbb{C}^{\binom{n}{k}} \setminus \{0\}$
 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_k \quad (x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}^n)$

induziert die Abbildung

$$\rho : G_{k,n} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$$

$$\mathbb{C}(x_1, \dots, x_k) \mapsto [x_1 \wedge \dots \wedge x_k].$$

Man erhält das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} St(k,n) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & (\Lambda^k \mathbb{C}^n) \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} \\ G_{k,n} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) \end{array}$$

(π und $\tilde{\pi}$ sind die kanonischen Projektionen auf die Äquivalenzklassen).

Bem.: 1.) $G_{k,n} \cong St(k,n) / GL(k,\mathbb{C})$

($GL(k,\mathbb{C})$ operiert vermöge Linksmultiplikation auf dem Zeilenraum).

2.) $\rho(G_{k,n}) = \{ [\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n) \mid \omega = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \text{ für } x_i \in \mathbb{C}^n \}$
 (d.h. ω ist zerlegbar)

$\Rightarrow G_{k,n}$ läßt sich durch Gleichungen beschreiben, ist also eine algebraische Varietät.

3.) $G_{k,n}$ ist eine $(k \cdot (n-k))$ -dim. kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und heißt Grassmann-Mannigfaltigkeit.

4.) Die Abbildung ρ ist eine Einbettung und heißt Plücker-Einbettung
 ($\Rightarrow G_{k,n}$ ist projektiv-algebraisch).

(vergleiche z.B. [HP] oder [B])

1.2 Die Fubini-Study-Metrik

Sei $\tilde{\pi} : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ die kanonische Projektion $z \mapsto [z]$,
 $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{\nu=0}^n z_{\nu} \bar{w}_{\nu}$ das kanonische hermitesche Skalarprodukt.

Für $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei $H_z := \{ w \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle w, z \rangle_{\mathbb{C}} = 0 \}$ und

$$\varphi_z : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow T_{[z]}\mathbb{P}^n \quad \text{def. durch } \varphi_z(w) := \left(f \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f([z+tw]) \right);$$

dann ist $\varphi_z|_{H_z} : H_z \rightarrow T_{[z]}\mathbb{P}^n$ ein Isomorphismus, und die Abbildung

$$h : T(\mathbb{P}^n) \oplus T(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\begin{matrix} \omega \\ (v, w) \end{matrix} \mapsto \langle (\varphi_z|_{H_z})^{-1}(v), (\varphi_z|_{H_z})^{-1}(w) \rangle_{\mathbb{C}}$$

definiert eine hermitesche Metrik auf \mathbb{P}^n .

Der Realteil dieser Metrik, ab hier bezeichnet durch eckige Klammern $\langle \dots \rangle$, liefert eine Riemannsche Metrik auf $T(\mathbb{P}^n)$, die Fubini-Study-Metrik.

Bem.: 1.) $\langle v, w \rangle = \operatorname{Re} \langle v, w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \operatorname{Re}(v), \operatorname{Re}(w) \rangle_{\mathbb{R}} + \langle \operatorname{Im}(v), \operatorname{Im}(w) \rangle_{\mathbb{R}}$.

2.) Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, $z \in \tilde{\pi}^{-1}(Y)$, dann induziert die Tangentialabbildung $T_z(\tilde{\pi})$ Isomorphismen

$$H_z \cap T_z(\tilde{\pi}^{-1}(Y)) \xrightarrow{\sim} T_{[z]}(Y)$$

und $(H_z \cap T_z(\tilde{\pi}^{-1}(Y)))^{\perp} \xrightarrow{\sim} T_{[z]}^{\perp}(Y)$.

Man betrachte nun die Hopf-Faserung $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \xrightarrow{\pi'} \mathbb{P}^n$, $\pi' := \tilde{\pi}|_{S^{2n+1}}$.
 $\begin{matrix} \omega \\ z \end{matrix} \mapsto [z]$

Es gilt: a.) π' ist eine Riemannsche Submersion.

b.) Die Fasern $(\pi')^{-1}(z) = \mathbb{C}z \cap S^{2n+1}$ sind Großkreise.

c.) Die Geodätischen γ in \mathbb{P}^n mit Startpunkt $\gamma(0) = [z]$ und Startrichtung $\dot{\gamma}(0) = \varphi_z(w)$ (mit $w \in H_z$ und $\|w\| = \|z\| = 1$) sind der Gestalt $\gamma(t) = [(\cos(t))z + (\sin(t))w]$ und haben die Länge π .

1.3 Homogene und normal-homogene Untermannigfaltigkeiten

Sei $p: T(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{P}^n$ das Tangentialbündel, $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, $T^\perp(Y) = \{ v \in T(\mathbb{P}^n)|_Y \mid \langle u, v \rangle = 0 \ \forall u \in T_{p(v)}(Y) \}$ das Normalenbündel von Y und $S^\perp(Y) = \{ v \in T^\perp(Y) \mid \|v\|=1 \}$ das Einheitsnormalenbündel.

Def.: a.) Y heißt homogen $:\Leftrightarrow$ es gibt eine abgeschlossene Untergruppe $G \subset \text{Isom}(\mathbb{P}^n)$ der Isometrien des \mathbb{P}^n , so daß Y ein G -Orbit ist, d.h. $Y = G \cdot x$ für $x \in Y$.

b.) Y heißt normal-homogen $:\Leftrightarrow$ Y ist homogen und es gibt ein $x \in Y$, so daß die Isotropiegruppe G_x transitiv auf $S_x^\perp(Y)$ operiert.

Bem.: a.) $\text{Isom}(\mathbb{P}^n) = \text{PU}(n+1) \subset \text{PGL}(n+1, \mathbb{C}) = \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

b.) Sei $g \in G_x \subset G$, dann operiert g auf dem Normalenvektorraum von Y in x durch die Tangentialabbildung: $T_x(g)|_{T_x^\perp(Y)} \in \text{Isom}(T_x^\perp(Y))$.
($G_x \rightarrow \text{Isom}(T_x^\perp(Y))$ ist die "Scheibendarstellung", vergl. [J])

1.4 Der Schnittort

Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ Untermannigfaltigkeit. Die Exponentialabbildung von X induziert eine differenzierbare Abbildung $\exp: T^\perp(Y) \rightarrow \mathbb{P}^n$, die in einer Umgebung des Nullschnittes von $T^\perp(Y)$ ein Diffeomorphismus ist.

Für $y \in Y$ und $v \in S_y^\perp(Y)$ ist $\gamma_{y,v}: t \mapsto \exp(t \cdot v)$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Geodätische, die im Punkt $\gamma_{y,v}(0) = y$ in Richtung $\dot{\gamma}_{y,v}(0) = v$ senkrecht zu Y startet.

Def.: Eine Geodätische γ heißt minimale Geodätische von Y nach $x \in \mathbb{P}^n$ $:\Leftrightarrow$ $\gamma(0) \in Y$, $\gamma(a) = x$ für $a \in \mathbb{R}_0^+$, und es gilt für alle $0 \leq t \leq a$, daß die Länge $L(\gamma|_{[0,t]}) = t$ gleich der Entfernung $\text{dist}(\gamma(t), Y)$ ist.

Bem.: a.) Für eine minimale Geodätische γ gilt: $\dot{\gamma}(0) \in S_{\gamma(0)}^\perp(Y)$
($\|\dot{\gamma}(0)\| = 1$ folgt aus der Parametrisierung. Für $\dot{\gamma}(0) \notin S_{\gamma(0)}^\perp(Y)$ erhält man in der Nähe von Y einen Widerspruch (vergl. [BC])).

b.) Für jeden Punkt $x \in \mathbb{P}^n \setminus Y$ gibt es eine minimale Geodätische von Y nach x (\mathbb{P}^n ist vollständig \Rightarrow Beh. (vergl. [HR], [BC])).

Für $y \in Y$, $v \in S_y^\perp(Y)$ und $\gamma_{y,v}$ wie oben sei nun

$$e(y,v) := \sup\{s > 0 \mid L(\gamma_{y,v}|_{[0,s]}) = \text{dist}(\gamma_{y,v}(s), Y)\} .$$

Def.: $C(Y) := \{ \exp(e(y,v) \cdot v) \mid y \in Y, v \in S_y^\perp(Y) \}$ heißt Schnittort von Y in \mathbb{P}^n .

Es gilt dann mindestens eine der folgenden Aussagen:

- (i) \exp ist singulär in $e(y,v) \cdot v$
 und regulär für alle $t \cdot v$ mit $0 \leq t < e(y,v)$,
- (ii) es gibt mindestens zwei minimale Geodätische von Y nach $\exp(e(y,v) \cdot v)$.

Bem.: 1.) Ist \exp singulär in $e \cdot u$, dann heißt $\exp(e \cdot u)$ Brennpunkt von Y .

2.) Die Abbildung $e : S^\perp(Y) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist stetig.

3.) Sei $U := \{ t \cdot u \in T^\perp(Y) \mid 0 \leq t < e(p(u), u), u \in S_{p(u)}^\perp(Y) \}$. Es gilt:

- a.) $\exp : U \rightarrow \exp(U)$ ist Diffeomorphismus,
- b.) $C(Y) = \exp(\partial U)$ ist eine Nullmenge in \mathbb{P}^n ,
- c.) $\mathbb{P}^n = \exp(U) \cup C(Y)$,
- d.) $C(Y)$ ist kompakt und starker Deformationsretrakt von $\mathbb{P}^n \setminus Y$,
- e.) ist $\text{codim}_{\mathbb{R}}(Y, \mathbb{P}^n) \geq 2$, so ist $C(Y)$ zusammenhängend.

(Für die obigen Aussagen vergleiche [BC] und [H].)

Sei nun $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert durch $f(x) := \text{dist}^2(x, Y)$

(f ist offenbar differenzierbar auf $\mathbb{P}^n \setminus C(Y)$).

Für $x \in \mathbb{P}^n \setminus Y$ sei $k(x) := \{ u \in S^\perp(Y) \mid \exp(\text{dist}(x, Y) \cdot u) = x \}$
 und $C_0(Y) := \{ x \in \mathbb{P}^n \setminus Y \mid \#k(x) \geq 2 \}$.

Dann gilt das folgende Theorem 1.8 aus [BFS] :

Theorem: (i) $C_0(Y) \subset \{ x \in \mathbb{P}^n \setminus Y \mid f \text{ nicht diffb. in } x \} \subset C(Y)$,
 (ii) $C_0(Y) \subset C(Y)$ dicht.

Desweiteren gilt (vergleiche [BFS]):

Satz: Y normal-homogene Untermannigfaltigkeit $\Rightarrow C_0(Y) = C(Y)$.

1.5 Der Schubert-Calculus

Def.: Sei $0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n = \mathbb{C}^n$ eine Fahne von linearen Unterräumen und für $1 \leq k \leq n$ sei $a := (a_1, \dots, a_k)$ eine nicht-aufsteigende Folge von natürlichen Zahlen zwischen 0 und $n-k$.

Dann heißen die Untervarietäten

$\sigma_a(L_1, \dots, L_n) := \{ \Lambda \in G_{k,n} \mid \dim(\Lambda \cap L_{n-k+i-a_i}) \geq i \text{ für } i=1 \dots k \}$
die Schubert-Zyklen der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{k,n}$.

Sei $W_{a_1, \dots, a_k} := \{ \Lambda \in G_{k,n} \mid \dim(\Lambda \cap L_{n-k+i-a_i}) = i \text{ für } i=1 \dots k \}$.

Bem.: 1.) Falls $a_i < a_{i+1}$ für ein i , dann gilt für $\Lambda \in W_{a_1, \dots, a_k}$:

$$\dim(\Lambda \cap L_{n-k+i-a_i}) = i \quad \text{und} \quad \dim(\Lambda \cap L_{n-k+i+1-a_{i+1}}) = i+1.$$

$$\text{Aber: } n-k+i+1-a_{i+1} \leq n-k+i-a_i \Rightarrow L_{n-k+i+1-a_{i+1}} \subset L_{n-k+i-a_i} \\ \Rightarrow W_{a_1, \dots, a_k} = \emptyset.$$

2.) Falls ein $a_i > n-k$ ist, so folgt: $\dim(L_{n-k+i-a_i}) < \dim(L_i) = i$
 $\Rightarrow W_{a_1, \dots, a_k} = \emptyset$.

3.) $W_{a_1, \dots, a_k} \cong \mathbb{C}^{k \cdot (n-k) - \sum a_i}$.

4.) Für nicht-aufsteigende Folgen von natürlichen Zahlen a_1, \dots, a_k mit $n-k \geq a_1 \geq \dots \geq a_k \geq 0$ bilden die Mengen W_{a_1, \dots, a_k} eine Zerlegung von $G_{k,n}$ in offene Zellen, deren Abschlüsse die Schubert-Zyklen sind: $\sigma_{a_1, \dots, a_k} = \overline{W_{a_1, \dots, a_k}}$.

(vergl. [GH])

Im vorliegenden Fall $G_{2,6} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ betrachtet man die spezielle Fahne

$$0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_6 = \mathbb{C}^6 \quad \text{mit} \quad L_i := \{ (z_1, \dots, z_6) \in \mathbb{C}^6 \mid z_{i+1} = z_{i+2} = \dots = z_6 = 0 \}.$$

Für $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $4 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0$ erhält man die Schubert-Zyklen

$$\sigma_{a_1 a_2} = \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \dim(\Lambda \cap L_{5-a_1}) \geq 1, \dim(\Lambda \cap L_{6-a_2}) \geq 2 \} \\ = \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \dim(\Lambda \cap L_{5-a_1}) \geq 1, \Lambda \subset L_{6-a_2} \}.$$

Bem.: $\sigma_{a_1 a_2}$ ist eine irreduzible Untervarietät der Dimension $8 - a_1 - a_2$ und der Abschluß der offenen Zelle $W_{a_1 a_2}$.

1.6 Positive holomorphe Vektorraumbündel

Sei X eine n -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\pi: E \rightarrow X$ ein holomorphes Vektorraumbündel vom Rang q .

Def.: Eine hermitesche Metrik H auf E ist eine Zuordnung, die jeder Faser E_x ein Produkt $\langle \dots \rangle_x$ zuordnet, s.d. gilt:

für alle $U \subset X$ offen und alle $\xi, \eta \in \mathcal{E}(U, E)$ ist die Funktion

$$\langle \xi, \eta \rangle : U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \langle \xi, \eta \rangle(x) := \langle \xi(x), \eta(x) \rangle_x \in \mathcal{C}^\infty.$$

Bem.: Ein holomorphes Vektorraumbündel $\pi: E \rightarrow X$ zusammen mit einer hermiteschen Metrik H heißt hermitesches holom. Vektorraumbündel.

Sei nun $U \subset X$ offen, $\varphi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine lokale Trivialisierung und \tilde{e}_i der i -te Einheitsvektor.

Definiere für $i=1, \dots, q$: $e_i(x) := \varphi^{-1}(x, \tilde{e}_i)$, dann ist $f := (e_1, \dots, e_q)$ eine Basis über U (d.h. $\forall x \in U$ ist $e_1(x), \dots, e_q(x)$ eine Basis).

Sei $\xi \in \mathcal{E}(U, E)$, dann gilt: $\xi = \sum_{i=1}^q \xi_i(f) \cdot e_i$ mit $\xi_i(f) \in \mathcal{E}(U) \cong \mathcal{E}(U, U \times \mathbb{C})$, und man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(E, U) &\rightarrow \mathcal{E}(U)^q \cong \mathcal{E}(U, U \times \mathbb{C}^q) \\ \xi &\mapsto \begin{pmatrix} \xi_1(f) \\ \vdots \\ \xi_q(f) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $H(f)_{\mu\nu} := \langle e_\nu, e_\mu \rangle$ und $H(f) := (H(f)_{\mu\nu})_{\mu, \nu=1}^q$, dann ist $H(f)(x)$ eine positiv definite hermitesche Matrix.

Desweiteren gilt für $\xi, \eta \in \mathcal{E}(U, E)$: $\langle \xi, \eta \rangle = \bar{\eta}(f)^T H(f) \xi(f)$.

Für einen Basiswechsel g mit $f \cdot g = (\sum_i e_i g_{i1}, \dots, \sum_i e_i g_{iq})$ gilt:

$$\xi(f) = g \cdot \xi(f \cdot g) \quad \text{und} \quad H(f \cdot g) = \bar{g}^T \cdot H(f) \cdot g.$$

Desweiteren induziert die hermitesche Metrik H einen Zusammenhang $D(H)$ auf E , d.h. eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$D(H) : \mathcal{E}(X,E) \rightarrow \mathcal{E}^1(X,E) := \mathcal{E}(X, \Lambda^1 T^*(X) \otimes E) \cong \mathcal{E}^1(X) \otimes \mathcal{E}(X,E)$$

$$(\mathcal{E}^1(X) = \{ \mathbb{C}\text{-wertige } \mathcal{C}^\infty\text{-1-Formen auf } X \})$$

s.d. für $\xi \in \mathcal{E}(X,E)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(X)$ gilt: $D(H)(\varphi \cdot \xi) = d\varphi \otimes \xi + \varphi \cdot D(H)\xi$.

Lokal gilt für den Zusammenhang: $D(H) = \partial + H^{-1} \partial H + \bar{\partial}$.

Sei nun X wie oben, $\pi: E \rightarrow X$ eine hermitesches holomorphes Vektorraum-bündel und $\varphi: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^q$ eine lokale Trivialisierung. Dann wird die Metrik zu einer differenzierbaren Abbildung

$$H : U \rightarrow \{ \text{positiv definite hermitesche Matrizen} \}$$

$$\underset{U}{x} \mapsto H(x)$$

In [Fr] wurde gezeigt:

Zu $x_0 \in X$ kann man immer eine normale Trivialisierung finden, d.h. eine

Trivialisierung $\varphi_{U(x_0)}: E|_{U(x_0)} \rightarrow U(x_0) \times \mathbb{C}^q$, so daß gilt:

$$H(x_0) = \text{id} \quad \text{und} \quad \partial H(x_0) = 0.$$

Def.: Das Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ heißt positiv, falls gilt:

Das Quadrat der Norm, die zur dualen Metrik auf E^* assoziiert ist, ist 1-konvex außerhalb des Null-Schnittes.

Es gilt: (vergl. [Fr])

$E \rightarrow X$ positiv \iff Für jedes $x_0 \in X$ und jede normale Trivialisierung in x_0

gilt für die lokale Darstellung der Metrik $H(x) = \left(H_{\mu\nu}(x) \right)_{\mu,\nu=1}^q$:

$$\forall w, \eta \neq 0 : \sum_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ \mu,\nu=1,\dots,q}} \frac{\partial^2 H_{\mu\nu}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} (x_0) \eta_i \bar{\eta}_j w_\mu \bar{w}_\nu < 0. \quad (*)$$

Sei nun $\xi : X \rightarrow E$ ein holomorpher Schnitt. Die Abbildung $a_\xi : X \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $a_\xi(x) := \|\xi(x)\|^2$; weiter bezeichne D den durch die Metrik H induzierten Zusammenhang.

Falls eine normale Trivialisierung in x_0 gewählt wurde und lokal $\xi = (f_1, \dots, f_q)$ ist, so gilt mit $f := (f_1, \dots, f_q)$:

$$(i) \quad (\partial a_\xi)_{x_0}(v) = (\partial f)_{x_0}(v) \cdot (\bar{f}(x_0))^T,$$

$$(ii) \quad L_{x_0}(a_\xi)(v,v) = f(x_0) \cdot L_{x_0}(H)(v,v) \cdot (\bar{f}(x_0))^T + (\partial f)_{x_0}(v) \cdot (\dots)$$

(Mit den Eigenschaften $H(x_0) = \text{id}$ und $\partial H(x_0) = 0$ lassen sich die beiden Behauptungen leicht durch Nachrechnen verifizieren).

Folgerung: a.) $V_{x_0} := \{ v \in T_{x_0}(X) \mid D\xi(v) = 0 \} \subset \ker(\partial a_\xi)_{x_0}$,

$$b.) \quad L_{x_0}(a_\xi)|_{V_{x_0}} < 0 \quad \text{falls} \quad \xi(x_0) \neq 0.$$

Bew.: Lokal gilt:

$$(a) \quad D\xi(v) = 0 \Rightarrow Df(v) = 0 \Rightarrow \partial f(v) = 0 \xrightarrow{(i)} \partial a_\xi(v) = 0,$$

$$(b) \quad v \in V_{x_0} \Rightarrow (\partial a_\xi)_{x_0}(v) = 0 \xrightarrow{(i)} (\partial f)_{x_0}(v) \cdot (\bar{f}(x_0))^T = 0$$

$$\xrightarrow{(f(x_0) \neq 0)} (\partial f)_{x_0}(v) = 0$$

$$\xrightarrow{(ii) \& (*)} L_{x_0}(a_\xi)(v,v) = f(x_0) \cdot L_{x_0}(H)(v,v) \cdot (\bar{f}(x_0))^T < 0.$$

Bem.: Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$(\partial f)_x = \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(x) dz_i : T_x X \rightarrow \mathbb{R}.$$

Also erhält man

a.) für $(\partial f)_x = 0$:

$$\ker(\partial f)_x = T_x X \Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\partial f)_x) = n,$$

b.) für $(\partial f)_x \neq 0$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker(\partial f)_x) = 2n-1,$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\{ v \in T_x(X) \mid (\partial f)_x(v) = 0 \}) = n-1.$$

Man betrachte nun das Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$

(Die Schnitte in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ entsprechen Hyperflächen).

Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\otimes d}$ für $d \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ ist ein positives Geradenbündel.

(Bezüglich der offenen Überdeckung $\{ U_i = \{ (z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}^n \mid z_i \neq 0 \} \}$ ist die Metrik über U_i durch die positive Funktion $(\sum | \frac{z_j}{z_i} |^2)^{-d}$ gegeben.)

Sei $Y := \{ F_1 = \dots = F_k = 0 \} \subset \mathbb{P}^n$ eine Varietät, wobei F_1, \dots, F_k homogene Polynome vom Grad d_1, \dots, d_k sind.

Dann erhält man durch jedes F_i einen Schnitt ξ_i in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$ und
und $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ist ein Schnitt im positiven Bündel $\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d_i)$.

Sei nun $a_F := \| \xi \|^2$. Da ξ ein holomorpher Schnitt ist, gilt wegen obiger Folgerung:

$L_x(a_F)$ ist negativ definit auf $V_x \subset \ker(\partial a_F)_x$ für $\xi(x) \neq 0$.

Es folgt also:

- a.) $(-a_F)$ ist eine Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^n \setminus Y$,
- b.) die Leviform von a_F hat überall mindestens $n-k$ negative Eigenwerte .

($a_F|_Y = 0$, $a_F|_{\mathbb{P}^n \setminus Y} > 0$, $\dim V_x \geq n-k$ (man hat k Linearformen)
 $\Rightarrow L_x(a_F)|_{V_x} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{P}^n \setminus Y \Rightarrow \text{Beh.}$)

Im Fall $k=1$, also für $Y = \{ x \mid F(x) = 0 \}$ gilt:

Die Leviform von a_F ist für alle $x \in \mathbb{P}^n \setminus Y$ auf $\ker(\partial a_F)_x$ negativ definit.

2. Die Geometrie von $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$

A. Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,6}$

Man hat das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{St}(2,6) & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & (\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus \{0\} \cong \mathbb{C}^{15} \setminus \{0\} \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 G_{2,6} & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \cong \mathbb{P}^{14} \\
 \mathbb{C}(a_1^w, a_2) & \mapsto & [a_1 \wedge a_2]
 \end{array}$$

Sei $\{e_1, \dots, e_6\}$ die Standardbasis des \mathbb{C}^6 , dann erhält man die Identifizierungen $\Lambda^2 \mathbb{C}^6 \cong \mathbb{C}^{15}$ und $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \cong \mathbb{P}^{14}$ durch die Wahl von $\{e_i \wedge e_j \mid 1 \leq i < j \leq 6\}$ als Orthonormalbasis. Die Metrik auf $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ ist entsprechend Kap.1.2 die korrespondierende Fubini-Study-Metrik.

Für einen linearen Unterraum $V \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim(V) \geq 2$ sei

$G_2(V) := \{ \mathbb{C}(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in V \text{ linear unabhängig} \}$; dann induziert die Plücker-Einbettung ρ eine Einbettung $G_2(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Man betrachte nun die Gruppe $G := \text{PU}(6)$. Diese operiert auf $\mathbb{P}^{14} = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ durch $[A] \cdot [a \wedge b] := [Aa \wedge Ab]$ für $[A] \in G$ und wird dadurch zu einer Untergruppe der Isometrien von \mathbb{P}^{14} : $G = \text{PU}(6) \subset \text{PU}(15) = \text{Isom}(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6))$.

Beh.: $G_{2,6}$ ist G -homogen, d.h. $G_{2,6} = G \cdot [e_1 \wedge e_2]$ (als Mengen gleich).

Bew.: Sei $[a \wedge b] \in G_{2,6} \Rightarrow \exists$ orthonormale $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^6$, s.d. $[a \wedge b] = [a_1 \wedge a_2]$; ergänzt man $\{a_1, a_2\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_6\}$ von \mathbb{C}^6 , so gilt mit $A := (a_1 \dots a_6)$: $[A] \cdot [e_1 \wedge e_2] = [a_1 \wedge a_2] = [a \wedge b] \Rightarrow G$ operiert transitiv.

Für die Isotropiegruppe von G in $[e_1 \wedge e_2]$ gilt:

$$\begin{aligned}
 G_{[e_1 \wedge e_2]} &= \{ [A] \in \text{PU}(6) \mid [A] \cdot [e_1 \wedge e_2] = [e_1 \wedge e_2] \} \\
 &= \{ [A] \in \text{PU}(6) \mid \mathbb{C}(Ae_1) \oplus \mathbb{C}(Ae_2) = \mathbb{C}(e_1, e_2) \} \\
 &= \{ [A] \in \text{PU}(6) \mid A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, A_1 \in \text{U}(2), A_2 \in \text{U}(4) \} = \text{P}(\text{U}(2) \times \text{U}(4)).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt: $G_{2,6} \cong \text{PU}(6) / \text{P}(\text{U}(2) \times \text{U}(4)) \cong \text{U}(6) / (\text{U}(2) \times \text{U}(4))$

B. Das Komplement $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$

Lemma 2.1 : Sei $e := e_1 \wedge e_2$ ($\cong (1,0,\dots,0) \in \mathbb{C}^{15}$).

Durch die Identifikation $T_e(\pi) : H_e \xrightarrow{\sim} T_{[e]}(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6))$ folgt

a.) für den Tangentialraum:

$$\begin{aligned} T_{[e]}(G_{2,6}) &= \mathbb{C} \{ e_1 \wedge e_i, e_2 \wedge e_j \mid i, j = 3, \dots, 6 \} \\ &= \{ w = (w_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu < \nu \leq 6) \mid w_{\mu\nu} = 0 \ \forall \ 3 \leq \mu < \nu \leq 6, w_{12} = 0 \}, \end{aligned}$$

b.) für den Normalenraum:

$$\begin{aligned} T_{[e]}^\perp(G_{2,6}) &= \mathbb{C} \{ e_i \wedge e_j \mid 3 \leq i < j \leq 6 \} \\ &= \{ w = (w_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu < \nu \leq 6) \mid w_{1\mu} = w_{2\nu} = 0 \ \forall \ \mu, \nu \} \\ &= \Lambda^2 \mathbb{C}(e_3, e_4, e_5, e_6). \end{aligned}$$

Bew.: Für $3 \leq \mu \leq 6$ gilt: $(e_1 \wedge e_2 + t \cdot e_1 \wedge e_\mu) = e_1 \wedge (e_2 + t e_\mu)$

$$\text{und } (e_1 \wedge e_2 + t \cdot e_2 \wedge e_\mu) = e_2 \wedge (t e_\mu - e_1),$$

d.h. $\forall t \neq 0$ sind $[e_1 \wedge e_2 + t \cdot e_1 \wedge e_\mu]$ und $[e_1 \wedge e_2 + t \cdot e_2 \wedge e_\mu] \in G_{2,6}$

$$\Rightarrow e_1 \wedge e_\mu, e_2 \wedge e_\mu \in T_{[e]}(G_{2,6}) \text{ für } \mu=3, \dots, 6.$$

Da $\dim(T_{[e]}(G_{2,6})) = (2 \cdot (6-2)) = 8$, $\dim(T_{[e]}^\perp(G_{2,6})) = 14-8 = 6$

folgt die Behauptung durch Abzählen der Basiselemente. \square

Das Komplement $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus G_{2,6}$ kann nun folgendermaßen stratifiziert (d.h. in Schichten zerlegt) werden :

Für $\nu = 0, 1, 2, 3$ sei

$$R_\nu := \{ [\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \mid \omega^{\nu+1} = 0 \} \text{ (insb. } R_0 = \emptyset \text{)}.$$

Die Strata werden für $\nu = 1, 2, 3$ definiert durch

$$S_\nu := R_\nu \setminus R_{\nu-1} = \{ [\omega] \mid \omega^\nu \neq 0, \omega^{\nu+1} = 0 \}.$$

Bem.: Die Strata lassen sich auch folgendermaßen beschreiben:

$$S_1 = \{ [a_1 \wedge a_2] \mid a_1, a_2 \in \mathbb{C}^6 \text{ linear unabhängig} \},$$

$$S_2 = \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}^6 \text{ l.u.} \},$$

$$S_3 = \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6] \mid a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{C}^6 \text{ l.u.} \}.$$

Insbesondere gilt:

$$S_1 = R_1 = G_{2,6} \text{ und } R_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6).$$

Beweis der Bemerkung:

Sei $A_\nu := \{ [a_1 \wedge a_2 + \dots + a_{2\nu-1} \wedge a_{2\nu}] \mid a_1, \dots, a_{2\nu} \text{ l.u.} \}$.

a.) Sei $[\omega] \in A_\nu$, $\omega = a_1 \wedge a_2 + \dots + a_{2\nu-1} \wedge a_{2\nu}$ mit $a_1, \dots, a_{2\nu}$ l.u.

$\Rightarrow \omega^\nu = \nu! \cdot a_1 \wedge \dots \wedge a_{2\nu} \neq 0$ und $\omega^{\nu+1} = 0 \Rightarrow A_\nu \subset S_\nu$.

b.) Sei $[\omega] \in S_\nu$, dann ist $\omega^\nu \neq 0$ und $\omega^{\nu+1} = 0$. Nun gibt es ein

$\mu \in \{1, 2, 3\}$, so daß gilt: $[\omega] \in A_\mu$ (siehe Lemma 2.5 oder [G]).

Falls $\mu > \nu \Rightarrow \omega^{\nu+1} \neq 0 \nmid$, falls $\mu < \nu \Rightarrow \omega^\nu = 0 \nmid$

$\Rightarrow \mu = \nu \Rightarrow S_\nu \subset A_\nu \Rightarrow A_\nu = S_\nu$. □

Bem.: $\text{PGL}(n, \mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$ durch $[A] \cdot [x \wedge y] := [Ax \wedge Ay]$ und die

Strata S_ν sind die Bahnen der Gruppenoperation, d.h. es gilt

$$S_\nu = \{ [A] \cdot [e_1 \wedge e_2 + \dots + e_{2\nu-1} \wedge e_{2\nu}] \mid [A] \in \text{PGL}(n, \mathbb{C}) \}.$$

Für $\nu=1, 2, 3$ seien nun die Abbildungen

$p_\nu : S_\nu \rightarrow G_{2\nu, 6}$ definiert durch

$$[\omega] \mapsto \{ x \in \mathbb{C}^6 \mid \omega^\nu \wedge x = 0 \},$$

dann zeigt man sehr leicht : $p_\nu([a_1 \wedge a_2 + \dots + a_{2\nu-1} \wedge a_{2\nu}]) = \mathbb{C}(a_1, \dots, a_{2\nu})$.

Bem.: a.) Die Abbildung $p_1 : S_1 \rightarrow G_{2, 6}$ ist die Umkehrabbildung der Plücker-Einbettung, und

b.) die Abbildung $p_3 : S_3 \rightarrow G_{6, 6}$ bildet ganz S_3 auf einen Punkt ab.

Für $\nu=1,2,3$ gilt nun folgendes Lemma:

Lemma 2.2: (i) $p_\nu : S_\nu \rightarrow G_{2\nu,6}$ ist ein holomorphes Faserbündel ,

(ii) Die Fasern sind folgender Gestalt :

$$V \in G_{2\nu,6} : p_\nu^{-1}(V) = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus \left(\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_{\nu-1} \right) .$$

Bew.: (ii) Für $V \in G_{2\nu,6}$ ist $p_\nu^{-1}(V) = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap S_\nu$, und für $\omega \in \Lambda^2 V$ ist $\omega^{\nu+1} \in \Lambda^{2\nu+2} V$. Da $\dim(V) = 2\nu$ ist, folgt $\omega^{\nu+1} = 0$, also

$$\begin{aligned} p_\nu^{-1}(V) &= \{ [\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \mid \omega^\nu \neq 0 \} \\ &= \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus \left(\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_{\nu-1} \right) . \end{aligned}$$

(i) $\nu=1$: $p_1 : S_1 \rightarrow G_{2,6}$ mit $p_1^{-1}(V) = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cong \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^2) = \text{Pkt.}$ ist ein Faserbündel mit trivialen Fasern.

$\nu=2$: $G_{4,6}$ wird überdeckt von den offenen Mengen

$$P_{ij} := \{ V \in G_{4,6} \mid V \oplus \mathbb{C}e_i \oplus \mathbb{C}e_j = \mathbb{C}^6 \}, \quad 1 \leq i < j \leq 6 .$$

Sei $V \in P_{ij} \subset G_{4,6}$, dann gibt es eine eindeutige Darstellung der Standard-Basisvektoren e_k für $k \in \{1, \dots, 6\} \setminus \{i, j\}$:

$$e_k = w_k^V + \alpha_k^V e_i + \beta_k^V e_j \quad \text{mit } w_k^V \in V \text{ und } \alpha_k^V, \beta_k^V \in \mathbb{C}$$

\Rightarrow die Menge $\{ w_k^V \mid k \in \{1, \dots, 6\} \setminus \{i, j\} \}$ ist eine Basis von V .

Definiere nun $\tilde{\pi}^V : \Lambda^2 V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^5$ durch

$$\sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq 6 \\ \mu, \nu \notin \{i, j\}}} z_{\mu\nu} w_\mu^V \wedge w_\nu^V \mapsto (z_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu < \nu \leq 6, \mu, \nu \notin \{i, j\}) ,$$

dann erhält man eine lokale Trivialisierung

$$\begin{aligned} \psi_{ij} : p_{2, \omega}^{-1}(P_{ij}) &\xrightarrow{\sim} P_{ij} \times (\mathbb{P}^5 \setminus G_{2,4}) \\ [\omega] &\mapsto (p_2([\omega]), \tilde{\pi}^{P_2([\omega])}(\omega)) \end{aligned}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^{-1} : P_{ij} \times (\mathbb{P}^5 \setminus G_{2,4}) &\rightarrow p_{2, \omega}^{-1}(P_{ij}) \\ (V, (z_{\mu\nu} \mid 1 \leq \mu < \nu \leq 6, \mu, \nu \notin \{i, j\})) &\mapsto \left[\sum_{\substack{1 \leq \mu < \nu \leq 6 \\ \mu, \nu \notin \{i, j\}}} z_{\mu\nu} w_\mu^V \wedge w_\nu^V \right] . \end{aligned}$$

$\nu=3$: Für $[\omega] \in S_3$ ist $p_3([\omega]) = \mathbb{C}^6 = G_{6,6}$, d.h. $p_3 : S_3 \rightarrow G_{6,6}$ ist (trivialerweise) ein Faserbündel über einem Punkt.

□

Die folgende Bemerkung soll dem besseren Verständnis der anschließenden Beweise dienen:

Bem.2.3 :

a.) Sei $\{e_1, \dots, e_6\}$ die Standardbasis des \mathbb{C}^6 .

Wie im Fall $\Lambda^2 \mathbb{C}^6 \cong \mathbb{C}^{15}$ erhält man eine Identifizierung von $\Lambda^k \mathbb{C}^6$ mit \mathbb{C}^m für $m = \binom{6}{k}$ durch die Wahl von $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 6\}$ als Orthonormalbasis von $\Lambda^k \mathbb{C}^6$. Wie oben operiert die unitäre Gruppe $U(6)$ auf $\Lambda^k \mathbb{C}^6$ durch die Vorschrift

$U \cdot (\sum a_{i_1 i_2, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) := \sum a_{i_1 i_2, \dots, i_k} U e_{i_1} \wedge \dots \wedge U e_{i_k}$ für $U \in U(6)$ und es gilt insbesondere $\|U \cdot x\| = \|x\|$ für $x \in \Lambda^k \mathbb{C}^6$, wobei die Norm auf $\Lambda^k \mathbb{C}^6$ durch die kanonische Norm auf \mathbb{C}^m induziert wird.

b.) Je zwei verschiedene Geodätische $\gamma_1 \neq \gamma_2$ in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ schneiden sich in höchstens einem Punkt, denn die antipodischen Schnittpunkte zweier verschiedener Geodätischer auf S^{29} werden durch die Projektivierung identifiziert (betrachte dazu die Hopf-Faserung $S^1 \hookrightarrow S^{29} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^{14}$).

Für das nächste Lemma wird nun ein Resultat aus [BFS] benötigt:

Bem.2.4 :

Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,4}$ wird durch die Plücker-Einbettung zu einer normal-homogenen Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$.

Es gilt:

a.) Sei $[a_1 \wedge a_2] \in G_{2,4}$ mit Orthonormalvektoren a_1 und a_2 , dann sind die Geodätischen in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$, die in $[a_1 \wedge a_2]$ senkrecht zu $G_{2,4}$ starten, der Gestalt $\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) a_3 \wedge a_4]$, wobei $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^4 ist.

b.) Für den Schnittort erhält man:

$$C(G_{2,4}) = \left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \text{ Orthonormalbasis von } \mathbb{C}^4 \right\} \\ \cong \mathbb{RP}^5.$$

Lemma 2.5 :

Sei $\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_6\}$ von \mathbb{C}^6 und reelle Zahlen $1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0$ mit $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$, so daß gilt:

$$\omega = [k_1 b_1 \wedge b_2 + k_2 b_3 \wedge b_4 + k_3 b_5 \wedge b_6].$$

Bew.: Man hat drei Fälle zu untersuchen:

1.) Sei $\omega = [a_1 \wedge a_2] \Rightarrow \omega = [b_1 \wedge b_2]$ durch Orthonormierung.

2.) Sei $\omega = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4]$ mit a_1, \dots, a_4 linear unabhängig, dann ist $\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ für $V := \mathbb{C}(a_1, a_2, a_3, a_4) \cong \mathbb{C}^4$. Nun gibt es eine minimale Geodätische γ in $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, die in $G_2(V)$ senkrecht startet, so daß gilt $\gamma(t_0) = \omega$.

Also folgt aus 2.4: $\omega = [\cos(t_0) b_1 \wedge b_2 + \sin(t_0) b_3 \wedge b_4]$ für eine Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von V .

3.) Sei $\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus G_{2,6}$ beliebig. Dann gibt es eine minimale Geodätische γ in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$, die in $G_{2,6}$ senkrecht startet, so daß gilt $\gamma(t_0) = \omega$. Sei $\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) u]$ und $\{a_1, \dots, a_6\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^6 , dann folgt aus 2.1: $u \in \Lambda^2 \mathbb{C}(a_3, a_4, a_5, a_6)$. Aus den obigen Fällen (1) und (2) folgt nun:
 $u = e^{i\vartheta} (\cos(s_0) b_1 \wedge b_2 + \sin(s_0) b_3 \wedge b_4)$ (ggf. wähle $s_0 = 0$)
 $= \cos(s_0) (e^{i\vartheta} b_1 \wedge b_2) + \sin(s_0) (e^{i\vartheta} b_3 \wedge b_4)$, wobei $\{b_1, \dots, b_4\}$,
 also auch $\{e^{i\vartheta} b_1, b_2, e^{i\vartheta} b_3, b_4\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}(a_3, \dots, a_6)$ ist und $\vartheta \in [0, 2\pi[$. Es gilt also:

$$\omega = [\cos(t_0) a_1 \wedge a_2 + \sin(t_0) (\cos(s_0) e^{i\vartheta} b_1 \wedge b_2 + \sin(s_0) e^{i\vartheta} b_3 \wedge b_4)].$$

□

Eine weitere Folgerung aus Bemerkung 2.4:

Lemma 2.6 :

Sei $[\cos(s_1) a_1 \wedge a_2 + \sin(s_1) a_3 \wedge a_4] = [\cos(s_2) b_1 \wedge b_2 + \sin(s_2) b_3 \wedge b_4]$, wobei $\{a_1, \dots, a_4\}, \{b_1, \dots, b_4\} \subset \mathbb{C}^6$ Orthonormalsysteme sind, $s_1, s_2 \in]0, \frac{\pi}{4}]$ und $[a_1 \wedge a_2] \neq [b_1 \wedge b_2]$.

Dann gilt: $s_1 = s_2 = \frac{\pi}{4}$.

Bew.: Sei $\cos(s_1) a_1 \wedge a_2 + \sin(s_1) a_3 \wedge a_4 = e^{i\vartheta} (\cos(s_2) b_1 \wedge b_2 + \sin(s_2) b_3 \wedge b_4)$
für ein $\vartheta \in [0, 2\pi[$, dann folgt (durch Quadrieren bzgl. " \wedge "):

$$2 \cos(s_1) \sin(s_1) a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 = 2 \cos(s_2) \sin(s_2) e^{2i\vartheta} b_1 \wedge b_2 \wedge b_3 \wedge b_4 .$$

Da $\{a_1, \dots, a_4\}$ und $\{b_1, \dots, b_4\}$ Orthonormalsysteme sind, müssen die Normen beider Seiten der Gleichung übereinstimmen, d.h. es gilt $\cos(s_1) \sin(s_1) = \cos(s_2) \sin(s_2)$, und da $(\sin(t)\cos(t))$ auf $[0, \frac{\pi}{4}]$ streng monoton wächst, folgt : $s_1 = s_2$.

Für $s_1 = s_2 < \frac{\pi}{4}$ erhält man einen Widerspruch zu dem Resultat für $C(G_{2,4})$ in Bem.2.4, denn

$$C_0(G_{2,4}) \subset C(G_{2,4}) \quad \text{und} \quad \text{dist}(G_{2,4}, C(G_{2,4})) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow s_1 = s_2 = \frac{\pi}{4} .$$

□

Lemma 2.7 :

Sei $[k_1 a_1 \wedge a_2 + k_2 a_3 \wedge a_4 + k_3 a_5 \wedge a_6] = [l_1 b_1 \wedge b_2 + l_2 b_3 \wedge b_4 + l_3 b_5 \wedge b_6] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$,

wobei $\{a_1, \dots, a_6\}$, $\{b_1, \dots, b_6\}$ Orthonormalbasen sind, $\sum k_\mu^2 = \sum l_\mu^2 = 1$ und

$1 > k_1 \geq k_2 \geq k_3 > 0$, $1 > l_1 \geq l_2 \geq l_3 > 0$. Dann gilt:

a.) $k_\mu = l_\mu$ für $\mu = 1, 2, 3$ und

b.) es gibt ein $\vartheta \in [0, 2\pi[$, so daß für $\mu \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\text{Ist } k_\nu \neq k_\mu \text{ für alle } \nu \neq \mu, \text{ so ist } a_{2\mu-1} \wedge a_{2\mu} = e^{i\vartheta} b_{2\mu-1} \wedge b_{2\mu} .$$

Bew.:

a.) Durch die Vorschrift $\Lambda_{a \wedge b}(x) := \frac{1}{2} ((a, x) b - (b, x) a)$ mit

$(a, x) := \sum_{i=1}^6 a_i x_i$ erhält man einen Isomorphismus $\omega \mapsto \Lambda_\omega$ zwischen $\Lambda^2 \mathbb{C}^6$ und den schiefsymmetrischen Matrizen $M_{6,6}^{\text{skew}}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{6 \times 6}$.

Für eine Orthonormalbasis $\mathfrak{A} := \{a_1, \dots, a_6\}$ von \mathbb{C}^6 kann einen (von \mathfrak{A} abhängigen) Isomorphismus $\Lambda^{\mathfrak{A}} : \Lambda^2 \mathbb{C}^6 \rightarrow M_{6,6}^{\text{skew}}(\mathbb{C})$ definieren,

so daß gilt:

$$\Lambda^{\mathfrak{A}}(a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\omega = k_1 a_1 \wedge a_2 + k_2 a_3 \wedge a_4 + k_3 a_5 \wedge a_6 = e^{i\vartheta} (l_1 b_1 \wedge b_2 + l_2 b_3 \wedge b_4 + l_3 b_5 \wedge b_6)$
mit k_μ, l_ν wie oben und $\vartheta \in [0, 2\pi[$.

Dann gilt mit $\mathfrak{A} = \{a_1, \dots, a_6\}$ und $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_6\}$:

$$\Lambda^{\mathfrak{A}}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & & & \\ k_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -k_2 & & \\ & & k_2 & 0 & & \\ & & & & 0 & -k_3 \\ & & & & k_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Lambda^{\mathfrak{B}}(\omega) = e^{i\vartheta} \begin{pmatrix} 0 & -l_1 & & & & \\ l_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -l_2 & & \\ & & l_2 & 0 & & \\ & & & & 0 & -l_3 \\ & & & & l_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\Lambda^{\mathfrak{A}}(\omega)$ und $\Lambda^{\mathfrak{B}}(\omega)$ gehen dabei wie folgt auseinander hervor: Es gibt eine unitäre Matrix $P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \in U(6)$, so daß gilt:

$$\Lambda^{\mathfrak{A}}(\eta) = P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^T \cdot \Lambda^{\mathfrak{B}}(\eta) \cdot P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} \quad \text{für } \eta \in \Lambda^2 \mathbb{C}^6 \quad (\text{vergl. [M]}).$$

Nun gilt für die durch $\|A\| := (\text{maximaler Eigenwert von } (\overline{A}^T A))^{\frac{1}{2}}$

definierte Spektralnorm : $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$; desweiteren gilt für

unitäre Matrizen $U \in U(6)$: $\|U\| = 1$. Da die Matrizen $\overline{\Lambda^{\mathfrak{A}}(\omega)}^T \Lambda^{\mathfrak{A}}(\omega)$

und $\overline{\Lambda^{\mathfrak{B}}(\omega)}^T \Lambda^{\mathfrak{B}}(\omega)$ Diagonalmatrizen sind, folgt offensichtlich:

$k_1^2 = l_1^2$, also auch $k_1 = l_1$. Betrachtet man $\omega^3 = \omega \wedge \omega \wedge \omega$, so erhält man: $k_1 k_2 k_3 = l_1 l_2 l_3 \Rightarrow k_2 k_3 = l_2 l_3$ und mit $k_2^2 + k_3^2 = l_2^2 + l_3^2$ folgt wie im Beweis von Lemma 2.6 : $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$, $k_3 = l_3$.

b.) Sei $\omega = k_1 a_1 \wedge a_2 + k_2 a_3 \wedge a_4 + k_3 a_5 \wedge a_6 = e^{i\vartheta} (k_1 b_1 \wedge b_2 + k_2 b_3 \wedge b_4 + k_3 b_5 \wedge b_6)$.

Aus der Gleichung $\Lambda^{\mathfrak{A}}(\omega) \cdot \overline{P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}^T = P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^T \cdot \Lambda^{\mathfrak{B}}(\omega)$ folgt, daß $P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ eine Matrix mit Kästchen entlang der Diagonalen ist, wobei außer-

halb der Kästchen nur Nullen stehen : $P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = e^{i\tau} \cdot P$ mit $\tau = -\frac{\vartheta}{2}$

und einer symplektischen Matrix $P \in Sp(3)$ folgender Gestalt:

$$k_1 > k_2 > k_3: \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & P_3 \end{pmatrix}, \quad P_\mu \in Sp(1) \quad ; \quad k_1 = k_2 > k_3: \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & P_2 \end{pmatrix}, \quad P_1 \in Sp(2); \\ P_2 \in Sp(1)$$

$$k_1 > k_2 = k_3: \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & P_2 & \\ & & P_2 \end{pmatrix}, \quad P_1 \in Sp(1) \quad ; \quad k_1 = k_2 = k_3: \begin{pmatrix} P & & \\ & P & \\ & & P \end{pmatrix}, \quad P \in Sp(3)$$

$$\text{Bem.: } Sp(n) = \{ P \in U(2n) \mid P F_n P^T = F_n \} \quad \text{mit} \quad F_n := \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ = \{ P \in U(2n) \mid P(e) = e \} \quad \text{mit} \quad e := e_1 \wedge e_2 + \dots + e_{2n-1} \wedge e_{2n}.$$

Sei nun o.B.d.A. $\mu = 1$ und $k_\nu \neq k_1$ für $\nu \neq 1$, dann folgt :

$$\Lambda^{\mathfrak{A}}(b_1 \wedge b_2) = P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}^T \cdot \Lambda^{\mathfrak{B}}(b_1 \wedge b_2) \cdot P_{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = e^{-i\vartheta} \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & \\ k_1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \Lambda^{\mathfrak{A}}(b_1 \wedge b_2) = e^{-i\vartheta} \Lambda^{\mathfrak{A}}(a_1 \wedge a_2) \\ \Rightarrow a_1 \wedge a_2 = e^{i\vartheta} b_1 \wedge b_2 \quad (\text{da } \Lambda^{\mathfrak{A}} \text{ ein Isomorphismus ist}).$$

□

Korollar 2.8 :

Für jedes $\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element

$$\eta \in \left\{ \left[k_1 e_1 \wedge e_2 + k_2 e_3 \wedge e_4 + k_3 e_5 \wedge e_6 \right] \mid 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0, \sum k_\mu^2 = 1 \right\},$$

so daß gilt: $\omega \in G \cdot \eta$, d.h. ω liegt auf der G -Bahn von η ($G = \text{PU}(6)$).

Bew.: Sei $\omega \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$, dann kann man wegen Lemma 2.5 eine Darstellung

$$\omega = \left[k_1 a_1 \wedge a_2 + k_2 a_3 \wedge a_4 + k_3 a_5 \wedge a_6 \right] \text{ w\"ahlen, wobei } \{ a_1, \dots, a_6 \} \text{ eine}$$

Orthonormalbasis ist und k_1, k_2, k_3 obige Eigenschaften haben. Sei

$$\text{nun } A := (a_1 \dots a_6) \in \text{U}(6) \Rightarrow [A] \cdot \left[k_1 e_1 \wedge e_2 + k_2 e_3 \wedge e_4 + k_3 e_5 \wedge e_6 \right] = \omega.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus den obigen Lemmata.

□

Bem.2.9: Sei $V \subset \mathbb{C}^6$ ein linearer Unterraum, $x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$, dann

$$\text{gilt: } \text{dist}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(x, G_2(V)) = \text{dist}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)}(x, G_{2,6}).$$

Bew.: Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß $4 \leq \dim(V) \leq 5$ ist,

denn die anderen Fälle sind trivial :

$$\dim(V) \in \{2,3\} \Rightarrow G_2(V) = \mathbb{P}(\Lambda^2 V), \quad \dim(V) \leq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V) = \emptyset.$$

Desweiteren sind für $x \in G_2(V) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ beide obige Distanzen 0.

Sei also $x = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \subset S_2$ mit linear unabhängigen

$\{a_1, \dots, a_4\} \subset V$. Dann gibt es eine kürzeste Geodätische γ in $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$

mit $\gamma(0) \in G_2(V)$ und $\gamma(t_0) = x$ für ein $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (siehe Bem.2.4).

Da $\xi(t) := [\cos(t) b_1 \wedge b_2 + \sin(t) (k_1 b_3 \wedge b_4 + k_2 b_5 \wedge b_6)] \in S_3$ für

$t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\{b_1, \dots, b_6\} \subset \mathbb{C}^6$ Orthonormalbasis, $k_1, k_2 \neq 0$ und $k_1^2 + k_2^2 = 1$,

genügt es, Geodätische $\psi(t) := [\cos(t) b_1 \wedge b_2 + \sin(t) b_3 \wedge b_4]$ für

orthonormale Vektoren $\{b_1, \dots, b_4\} \subset \mathbb{C}^6$ zu betrachten.

Da offenbar $\psi(t) \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}(b_1, b_2, b_3, b_4))$ für $t \in [0, \pi]$ ist, folgt aus

$$\psi(s_0) = x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \quad \text{für } s_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[:$$

$$V \supset \mathbb{C}(a_1, a_2, a_3, a_4) = p_2(x) = p_2(\psi(s_0)) = \mathbb{C}(b_1, b_2, b_3, b_4)$$

$$\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \subset V \Rightarrow \psi([0, \pi]) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$$

\Rightarrow eine kürzeste Geodätische von $G_{2,6}$ zu x in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ kann stets

so gewählt werden, daß sie ganz in $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ verläuft.

□

C. Der Schnittpunkt $C(G_{2,6})$ und der Orbitraum

Im ersten Teil dieses Abschnittes wird der Schnittpunkt berechnet. Dazu wird zunächst die dichte Teilmenge $C_0(G_{2,6}) \subset C(G_{2,6})$ betrachtet, also solche Punkte, in denen mindestens zwei kürzeste Geodätische zu $G_{2,6}$ existieren.

$C_0(G_{2,6})$:

Sei $x_0 := [a_1 \wedge a_2] \in G_{2,6}$ mit orthonormalen Vektoren a_1 und a_2 .

Dann sind die Geodätischen in $P(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ mit Startpunkt x_0 , die senkrecht zu $G_{2,6}$ starten, der Gestalt

$$\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) u_0] \quad \text{mit } u_0 \in S_{x_0}^\perp(G_{2,6}).$$

Ergänzt man $\{a_1, a_2\}$ zu einer Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_6\}$ von \mathbb{C}^6 , so gilt:

$$T_{x_0}^\perp(G_{2,6}) \cong \Lambda^2 \mathbb{C}(a_3, a_4, a_5, a_6) \quad (\text{siehe Lemma 2.1}).$$

Mit Lemma 2.5 (Teil 2 des Beweises) folgt:

Es gibt eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_4\}$ von $\mathbb{C}(a_3, \dots, a_6)$, so daß gilt:

$$u_0 = k_1(b_1 \wedge b_2) + k_2(b_3 \wedge b_4) \quad \text{mit } k_1, k_2 \in \mathbb{R}_0^+, k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

Für die Berechnung des Schnittpunktes bietet es sich an, die folgenden beiden Typen von Geodätischen zu betrachten:

(a) $\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) b_1 \wedge b_2]$

(wobei $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ ein Orthonormalsystem ist)

$$\Rightarrow \gamma([0, \pi]) \cap G_{2,6} = \{ \gamma(0), \gamma(\frac{\pi}{2}) \} = \{ [a_1 \wedge a_2], [b_1 \wedge b_2] \}$$

$$\text{und } \gamma([0, \pi]) \subset \mathbb{R}_2 = S_2 \cup G_{2,6},$$

(b) $\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) (k_1 b_1 \wedge b_2 + k_2 b_3 \wedge b_4)]$

(wobei $\{b_1, \dots, b_4\} \subset \mathbb{C}(a_1, a_2)^\perp$ ein Orthonormalsystem ist,

$$0 < k_1, k_2 < 1, \quad \| k_1 b_1 \wedge b_2 + k_2 b_3 \wedge b_4 \| = 1, \quad \text{d.h. } k_1^2 + k_2^2 = 1)$$

$$\Rightarrow \gamma([0, \pi]) \cap G_{2,6} = \gamma(0) = [a_1 \wedge a_2],$$

$$\gamma([0, \pi]) \cap S_2 = \gamma(\frac{\pi}{2}) = [k_1 b_1 \wedge b_2 + k_2 b_3 \wedge b_4],$$

$$\gamma(]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[) \subset S_3.$$

Zunächst zu (a):

Sei $\gamma(t) = [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) a_3 \wedge a_4]$ vom Typ (a).

Da $\gamma(\frac{\pi}{2}) = [a_3 \wedge a_4]$ ist, reicht es, das Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ zu betrachten, denn $\tilde{\gamma}(t) := [\cos(t) a_3 \wedge a_4 + \sin(t) a_1 \wedge a_2]$ ist auch eine Geodätische, die senkrecht zu $G_{2,6}$ startet, und es gilt $\tilde{\gamma}([0, \frac{\pi}{4}]) = \gamma([\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$.

Beh.: $\gamma([0, \frac{\pi}{4}]) \cap C_0(G_{2,6}) = \gamma(\frac{\pi}{4}) = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4]$.

Bew.: Alle Geodätischen ψ vom Typ (b) treffen das Stratum S_2 erst im Punkt $\psi(\frac{\pi}{2})$, daher reicht es, Geodätische vom Typ (a) zu betrachten.

Sei also $\psi(t) := [\cos(t) b_1 \wedge b_2 + \sin(t) b_3 \wedge b_4]$ mit $\psi(t_0) = \gamma(t_0)$ für $t_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$. Falls $[b_1 \wedge b_2] \neq [a_1 \wedge a_2]$ ist, folgt aus 2.6 : $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Falls $[b_1 \wedge b_2] = [a_1 \wedge a_2]$ ist, so gilt entweder $\psi = \gamma$, oder es gilt $\psi(t) := [\cos(t) a_1 \wedge a_2 - \sin(t) a_3 \wedge a_4] \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Speziell erhält man für $\tilde{\gamma}(t) := [\cos(t) a_3 \wedge a_4 + \sin(t) a_1 \wedge a_2]$:
 $\tilde{\gamma}(\frac{\pi}{4}) = \gamma(\frac{\pi}{4}) = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \Rightarrow [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \in C_0(G_{2,6})$.

□

Zu (b):

Sei $s_1 \in]0, \frac{\pi}{4}[$, $\gamma(t) := [\cos(t) a_1 \wedge a_2 + \sin(t) (\cos(s_1) a_3 \wedge a_4 + \sin(s_1) a_5 \wedge a_6)]$ vom Typ (b). Nach obiger Überlegung reicht es, das Intervall $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zu betrachten.

Sei $\tilde{\gamma}$ eine weitere Geodätische mit $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0)$, $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Wäre $\tilde{\gamma}$ vom Typ (a), so folgte : $\gamma(t_0) \in R_2 \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{\gamma}(t_0) \in G_{2,6} \nmid$
 $\Rightarrow \tilde{\gamma}$ ist vom Typ (b).

Falls $t_0 = \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\gamma(t_0) = [k_1 a_3 \wedge a_4 + k_2 a_5 \wedge a_6]$

\Rightarrow es gibt eine Geodätische vom Typ (a), die $\gamma(t_0)$ auf kürzerem Weg mit $G_{2,6}$ verbindet (siehe Fall (a)).

Sei also $t_0 < \frac{\pi}{2}$.

Sei $s_2 \in]0, \frac{\pi}{4}]$, $\tilde{\gamma}(t) := [\cos(t) b_1 \wedge b_2 + \sin(t) (\cos(s_2) b_3 \wedge b_4 + \sin(s_2) b_5 \wedge b_6)]$
eine weitere Geodätische vom Typ (b) mit $\tilde{\gamma}(t_0) = \gamma(t_0)$.

Falls $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$ ist, so folgt : $a_1 \wedge a_2 = e^{i\theta} b_1 \wedge b_2$

$$\Rightarrow \cos(s_1) a_3 \wedge a_4 + \sin(s_1) a_5 \wedge a_6 = e^{i\theta} (\cos(s_2) b_3 \wedge b_4 + \sin(s_2) b_5 \wedge b_6)$$

$$\Rightarrow \gamma = \tilde{\gamma} \quad (\text{denn } t_0 < \frac{\pi}{2}).$$

Sei also $\gamma(0) \neq \tilde{\gamma}(0)$. Mit 2.6 und 2.7 erhält man folgende Fälle für den

Startpunkt $\tilde{\gamma}(0) = [b_1 \wedge b_2] \in G_{2,6}$:

$$(i) [b_1 \wedge b_2] = [a_3 \wedge a_4] \Rightarrow \cos(t_0) = \sin(t_0) \cos(s_1) \Rightarrow t_0 = \arctan\left(\frac{1}{\cos(s_1)}\right),$$

$$(ii) [b_1 \wedge b_2] = [a_5 \wedge a_6] \Rightarrow \cos(t_0) = \sin(t_0) \sin(s_1) \Rightarrow t_0 = \arctan\left(\frac{1}{\sin(s_1)}\right),$$

$$(iii) s_1 = \frac{\pi}{4}, a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6 = c_1 \wedge c_2 + c_3 \wedge c_4 \text{ für geeignete Orthonormalvektoren } \{c_1, \dots, c_4\} \text{ und } [b_1 \wedge b_2] = [c_1 \wedge c_2]$$

$$\Rightarrow \cos(t_0) = \sin(t_0) \cos(s_1) \Rightarrow t_0 = \arctan\left(\frac{1}{\cos(s_1)}\right),$$

$$(iv) a.) \cos(t_0) = \sin(t_0) \cos(s_1), a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 = d_1 \wedge d_2 + d_3 \wedge d_4 \\ \text{und } [b_1 \wedge b_2] = [d_1 \wedge d_2],$$

$$b.) \cos(t_0) = \sin(t_0) \sin(s_1), a_1 \wedge a_2 + a_5 \wedge a_6 = d_1 \wedge d_2 + d_3 \wedge d_4 \\ \text{und } [b_1 \wedge b_2] = [d_1 \wedge d_2],$$

$$c.) \cos(t_0) = \sin(t_0) \cos(s_1) = \sin(t_0) \sin(s_1), \\ a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6 = d_1 \wedge d_2 + d_3 \wedge d_4 + d_5 \wedge d_6 \text{ und } [b_1 \wedge b_2] = [d_1 \wedge d_2]$$

für jeweils geeignete Orthonormalvektoren $\{d_1, \dots, d_4\}$ bzw. $\{d_1, \dots, d_6\}$.

In jedem Fall gilt : $t_0 \geq \arctan\left(\frac{1}{\cos(s_1)}\right) \quad (s_1 \in]0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \cos(s_1) \geq \sin(s_1)$.

Speziell gilt für die Geodätische

$$\psi(t) := [\cos(t) a_3 \wedge a_4 + \sin(t) (\cos(s_1) a_1 \wedge a_2 + \sin(s_1) a_5 \wedge a_6)] :$$

$$\gamma(t_0) = \psi(t_0) = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + \frac{\sin(s_1)}{\cos(s_1)} a_5 \wedge a_6] \quad \text{für } t_0 := \arctan\left(\frac{1}{\cos(s_1)}\right) .$$

Da γ für kleine t sicher die kürzeste Verbindung zwischen $\gamma(0)$ und $\gamma(t)$ ist, folgt aus Stetigkeitsgründen:

$$\gamma(t_0) \in C_0(G_{2,6}).$$

Fazit:

Sei $\{a_1, \dots, a_6\}$ eine Orthonormalbasis, $0 \leq k_2 \leq k_1 \leq 1$, $k_1^2 + k_2^2 = 1$.

Dann trifft die Geodätische

$$\gamma(t) := [\cos(t)a_1 \wedge a_2 + \sin(t)(k_1 a_3 \wedge a_4 + k_2 a_5 \wedge a_6)]$$

$C_0(G_{2,6})$ im Punkt $\gamma(t_0)$ für $t_0 = \arctan(\frac{1}{k_1})$.

Da $1 \geq k_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, gilt: $\frac{\pi}{4} \leq t_0 \leq \arctan(\sqrt{2})$

$\Rightarrow \gamma(t_0) = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + \frac{k_2}{k_1} a_5 \wedge a_6] \in C_0(G_{2,6})$, also folgt aus (a),(b):

$\Rightarrow C_0(G_{2,6}) = \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis, } 0 \leq k \leq 1 \}$.

Nun kann auch der Schnittort angegeben werden.

$C(G_{2,6})$:

Für eine Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_6\}$ von \mathbb{C}^6 und $k \in [0,1]$ ist für die

unitäre Matrix $A := (a_1 \dots a_6) \in U(6)$

$$a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6 = A \cdot (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6).$$

$\Rightarrow \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_1, \dots, a_6\} \text{ Orthonormalbasis} \}$

$$= PU(6) \cdot [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6], \text{ also abgeschlossen.}$$

Folglich ist auch $C_0(G_{2,6})$ als Vereinigung dieser Orbits abgeschlossen, da

$k \in [0,1]$ ein abgeschlossenes Intervall durchläuft.

Da $C_0(G_{2,6})$ eine dichte Teilmenge von $C(G_{2,6})$ ist, folgt :

Satz 2.10 :

$$C(G_{2,6}) = \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis, } 0 \leq k \leq 1 \}.$$

Bevor weitere Aussagen über den Schnittort gemacht werden, soll nun der Orbitraum der Gruppenoperation von $PU(6)$ auf $\Lambda^2 \mathbb{C}^6$ berechnet werden, um auf diesem Weg eine geometrische Vorstellung der betrachteten Situation und insbesondere der Struktur des Schnittortes zu erhalten.

Der Orbitraum :

Sei $\omega \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbb{C}^6)$, dann folgt aus Korollar 2.8:

Die Menge $\left\{ [k_1 e_1 \wedge e_2 + k_2 e_3 \wedge e_4 + k_3 e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0, \sum k_\mu^2 = 1 \right\}$

enthält einen eindeutig bestimmten Repräsentanten ω_0 für ω , so daß gilt :

$$\omega \in \text{PU}(6) \cdot \omega_0 .$$

Für den Orbitraum gilt folglich :

$$\text{OR} \cong \left\{ [k_1 e_1 \wedge e_2 + k_2 e_3 \wedge e_4 + k_3 e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0, \sum k_\mu^2 = 1 \right\} .$$

Diese Menge wird zu einer Teilmenge der 2-Sphäre durch folgende Abbildung:

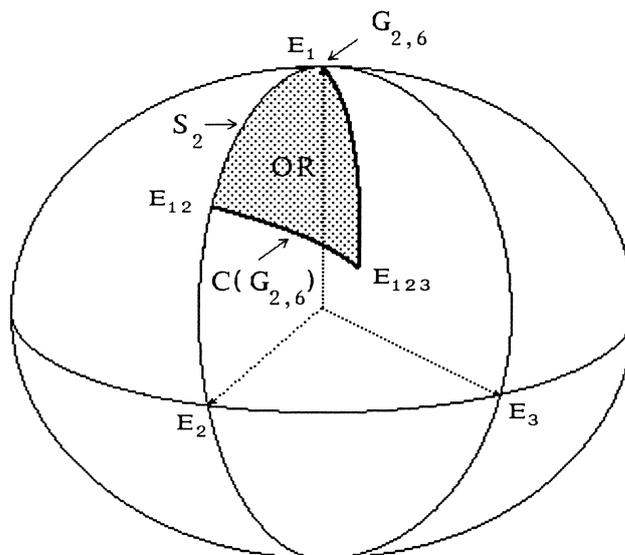
$$\chi : \text{OR} \hookrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{mit}$$

$$\chi([k_1 e_1 \wedge e_2 + k_2 e_3 \wedge e_4 + k_3 e_5 \wedge e_6]) := (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 .$$

Geometrische Interpretation des Orbitraumes:

Der Orbitraum wird durch ein Dreieck auf der 2-Sphäre repräsentiert. Eine Ecke entspricht $G_{2,6}$ und die dieser Ecke gegenüberliegende Seite entspricht $C(G_{2,6})$. Der Orbitraum kann also folgendermaßen veranschaulicht werden:

Seien $E_1 := [e_1 \wedge e_2]$, $E_2 := [e_3 \wedge e_4]$, $E_3 := [e_5 \wedge e_6]$, $E_{12} := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4]$,
 $E_{123} := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]$.



Dabei ist zu beachten, daß aufgrund der Projektivierung antipodische Punkte zu identifizieren sind, was hier jedoch keine Rolle spielt, da sich das den Orbitraum repräsentierende Dreieck auf einer Hälfte der S^2 befindet.

Bem.: Für die Winkel und Seitenlängen des Dreiecks gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}(E_1, E_{12}) &= \frac{\pi}{4} & \sphericalangle(\overline{E_1 E_{12}}, \overline{E_1 E_{123}}) &= \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad (\cong 45^\circ) \\ \text{dist}(E_{12}, E_{123}) &= \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \sphericalangle(\overline{E_{123} E_1}, \overline{E_{123} E_{12}}) &= \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad (\cong 60^\circ) \\ \text{dist}(E_1, E_{123}) &= \arctan(\sqrt{2}) & \sphericalangle(\overline{E_{12} E_{123}}, \overline{E_{12} E_1}) &= \frac{\pi}{2} \quad (\cong 90^\circ). \end{aligned}$$

Bew.: Man betrachte die entsprechenden Geodätischen.

Dazu wählt man die folgenden Tangentialvektoren:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\overline{E_1 E_{12}}, \overline{E_1 E_{123}}) : & \quad u_1 = (e_3 \wedge e_4) \\ & \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6) \quad \Rightarrow \cos \sphericalangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ \sphericalangle(\overline{E_{123} E_1}, \overline{E_{123} E_{12}}) : & \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4 - e_5 \wedge e_6) \\ & \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 - 2e_5 \wedge e_6) \quad \Rightarrow \cos \sphericalangle = \frac{1}{2}. \\ \sphericalangle(\overline{E_{12} E_{123}}, \overline{E_{12} E_1}) : & \quad u_1 = (e_5 \wedge e_6) \\ & \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4) \quad \Rightarrow \cos \sphericalangle = 0. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß die in den entsprechenden Eckpunkten in obige Richtungen startenden Geodätischen gerade die Seiten des Dreiecks beschreiben. Für die Berechnung der Längen der Seiten braucht nur ermittelt zu werden, für welches $t_0 \in [0, \pi]$ der anvisierte Eckpunkt erreicht wird. \square

Berechnung der einzelnen Isotropiegruppen / Orbits :

Man betrachte dazu $OR \cong \{ [e_1 \wedge e_2 + k_1 e_3 \wedge e_4 + k_2 e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq 0 \}$
(indem durch den ersten (also größten) Koeffizienten dividiert wird).

Man hat die folgenden Fälle zu untersuchen:

- 1.) $k_1 = k_2 = 0$ (die Ecke E_1)
- 2.) a.) $k_2 = 0$ und $0 < k_1 < 1$ (die offene Seite $\overline{E_1 E_{12}}$)
b.) $k_2 = 0$ und $k_1 = 1$ (die Ecke E_{12})
- 3.) a.) $0 < k_1 = k_2 < 1$ (die offene Seite $\overline{E_1 E_{123}}$)
b.) $k_1 = k_2 = 1$ (die Ecke E_{123})
- 4.) a.) $1 > k_1 > k_2 > 0$ (das Innere des Dreiecks ($E_1 E_{12} E_{123}$))
b.) $1 = k_1 > k_2 > 0$ (die offene Seite $\overline{E_{12} E_{123}}$).

1.) $k_1 = k_2 = 0$

Man erhält die Ecke $[e_1 \wedge e_2]$ und als Orbit $G_{2,6} = G \cdot [e_1 \wedge e_2]$, wobei gilt:
 $G_{2,6} \cong U(6) / (U(2) \times U(4))$, d.h. $G_{2,6}$ ist (natürlich) eine 8-dimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit.

2.) $k_2 = 0$, $0 < k_1 \leq 1$

Man erhält die Menge $\{ [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4] \mid 0 < k \leq 1 \} \subset S_2$

a.) $0 < k < 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4]$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 [A] \in G_{x_0} &\iff A \cdot (e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4) = e^{i\vartheta} (e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4) \\
 &\iff [A] = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix} \in \text{PU}(6) \text{ mit } A_1, A_2, A_3 \in U(2), \\
 &\qquad\qquad\qquad A_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) = e^{i\vartheta} (e_1 \wedge e_2) \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{und } A_2 \cdot (e_3 \wedge e_4) = e^{i\vartheta} (e_3 \wedge e_4)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{x_0} \cong P(U(2) \times (U(2)/S^1) \times U(2))$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - (4 + 3 + 4) = 25, \text{ codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 3$$

$\Rightarrow G \cdot x_0$ ist keine komplexe Untermannigfaltigkeit.

b.) $k = 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4] \in C_0(G_{2,6}) \cap S_2$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 [A] \in G_{x_0} &\iff [A] = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} \cdot A_1 & & \\ & & \\ & & A_2 \end{pmatrix} \in \text{PU}(6) \text{ mit } A_1 \in U(4), \\
 &\qquad\qquad\qquad A_2 \in U(2) \text{ und} \\
 &\qquad\qquad\qquad A_1 \cdot (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) = (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_{x_0} \cong P(\text{Sp}(2) \times S^1 \times U(2))$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - (10 + 1 + 4) = 21, \text{ codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 7$$

$\Rightarrow G \cdot x_0$ ist keine komplexe Untermannigfaltigkeit.

Bem.: Bei den Punkten $\{ [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4] \mid 0 \leq k \leq 1 \}$ handelt es sich um die Seite $\overline{E_1 E_{12}}$ des Dreiecks $(E_1 E_{12} E_{123})$. Die Länge der Seite ist $\frac{\pi}{4}$. Desweiteren ist die Seite die kürzeste Verbindung von $[e_1 \wedge e_2] \in G_{2,6}$ zum Punkt $[e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4] \in C(G_{2,6})$.

3.) $1 \geq k_1 = k_2 > 0$

Man erhält die Menge $\{ [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k > 0 \} \subset S_3$.

a.) $k < 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6]$, dann gilt:

$$[A] \in G_{x_0} \iff [A] = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & e^{i\vartheta} \cdot A_2 & \\ & & \end{pmatrix} \in \text{PU}(6) \quad \text{mit } A_1 \in \text{U}(2), A_2 \in \text{Sp}(2) \\ \text{und } A_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) = e^{i\vartheta} (e_1 \wedge e_2)$$

$$\Rightarrow G_{x_0} \cong \text{P} \left((\text{U}(2)/\text{S}^1) \times \text{Sp}(2) \times \text{S}^1 \right) \cong \text{P} \left(\text{Sp}(2) \times \text{U}(2) \right)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - (10+4) = 22, \text{codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 6.$$

b.) $k = 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6] \in C(G_{2,6}) \cap S_3$

$$\Rightarrow G_{x_0} \cong \text{P} \left(\text{Sp}(3) \times \text{S}^1 \right)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - 22 = 14, \text{codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 14$$

Bem.: Die Punkte $\{ [e_1 \wedge e_2 + k e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k \geq 0 \}$ bilden die Seite von $[e_1 \wedge e_2] \in G_{2,6}$ nach $[e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6] \in C(G_{2,6})$ des Dreiecks. Diese Seite hat die Länge $\arctan(\sqrt{2})$.

4.) $1 \geq k_1 > k_2 > 0$

Man erhält die Menge $\{ [e_1 \wedge e_2 + k_1 e_3 \wedge e_4 + k_2 e_5 \wedge e_6] \mid 1 \geq k_1 > k_2 > 0 \} \subset S_3$.

a.) $k_1 < 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + k_1 e_3 \wedge e_4 + k_2 e_5 \wedge e_6]$, dann gilt:

$$[A] \in G_{x_0} \iff [A] = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{pmatrix} \in \text{PU}(6) \quad \text{mit } A_1, A_2, A_3 \in \text{U}(2) \text{ und} \\ A \cdot (e_1 \wedge e_2 + k_1 e_3 \wedge e_4 + k_2 e_5 \wedge e_6) \\ = e^{i\vartheta} (e_1 \wedge e_2 + k_1 e_3 \wedge e_4 + k_2 e_5 \wedge e_6)$$

$$\Rightarrow G_{x_0} \cong \text{P} \left(\text{U}(2) \times (\text{U}(2)/\text{S}^1) \times (\text{U}(2)/\text{S}^1) \right)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - (4+3+3) = 26, \text{codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 2.$$

b.) $k_1 = 1$

Sei $x_0 := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6]$, dann gilt:

$$[A] \in G_{x_0} \iff [A] = \begin{pmatrix} e^{i\vartheta} \cdot A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} \in \text{PU}(6) \quad \text{mit } A_1 \in \text{Sp}(2), A_2 \in \text{U}(2) \\ \text{und } A_2 \cdot (e_1 \wedge e_2) = e^{i\vartheta} (e_1 \wedge e_2)$$

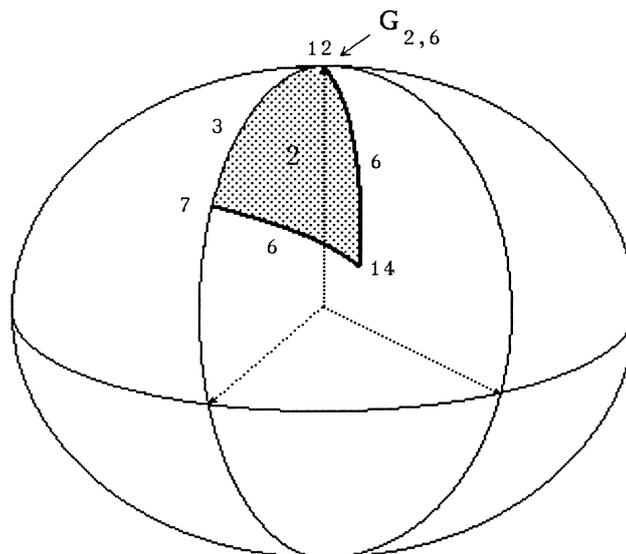
$$\Rightarrow G_{x_0} \cong \text{P}(S^1 \times \text{Sp}(2) \times (\text{U}(2)/S^1)) \cong \text{P}(\text{Sp}(2) \times \text{U}(2))$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 36 - (10+4) = 22, \quad \text{codim}_{\mathbb{R}}(G \cdot x_0) = 6.$$

Bem.: Für $1 > k_1 > k_2 > 0$ erhält man die Punkte im Inneren des Dreiecks.

Die Punkte $\{ [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6] \mid 0 \leq k \leq 1 \} \subset C(G_{2,6})$ bilden die dem Punkt $[e_1 \wedge e_2]$ gegenüberliegende Seite des Dreiecks. Die Länge dieser Seite ist $\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Der Orbitraum mit den einzelnen reellen Codimensionen im Bild:

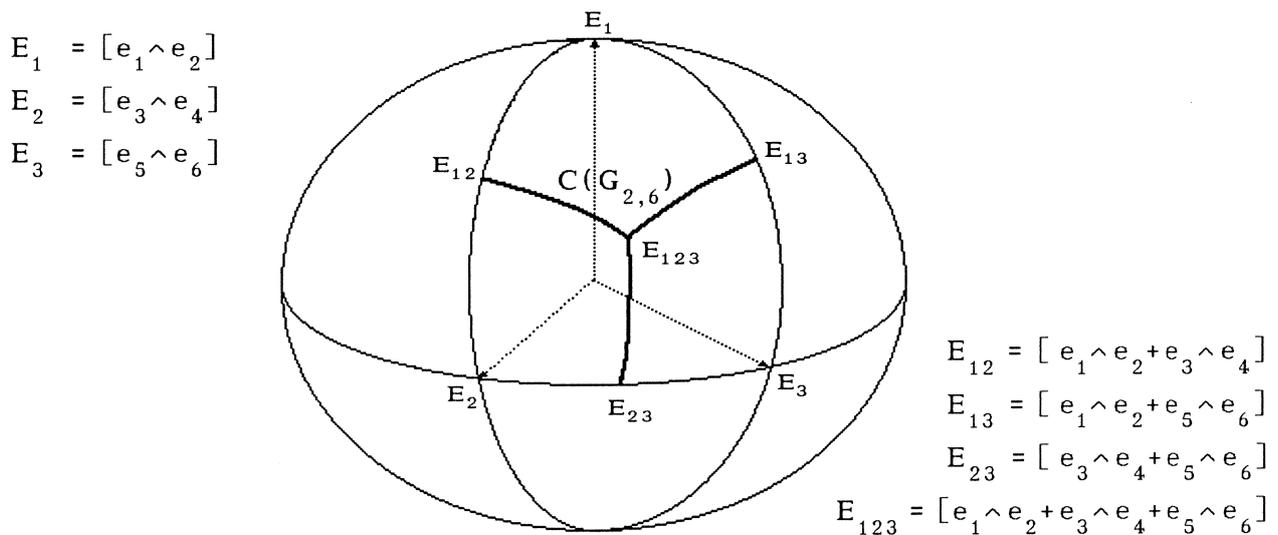


(Die Orbits der reellen Codimension 2 sind die Hauptorbits) .

Geometrische Interpretation des Schnittortes:

Die Punkte E_1, E_2 und E_3 beschreiben ein gleichseitiges Dreieck auf der Sphäre. In dieses Dreieck läßt sich der Orbitraum durch Vertauschen der Komponentenfunktionen von κ auf 6 verschiedene Arten abbilden, wobei stets eine der Ecken E_μ die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{2,6}$ und die gegenüberliegende Seite den Schnittort $C(G_{2,6})$ repräsentiert. Da sich diese 6 verschiedenen Abbildungen ebenso durch Multiplikation mit Matrizen aus $PU(6)$ auf den Urbildern ausdrücken lassen, erhält man eine sinnvolle Vorstellung der Gestalt des Schnittortes. Permutiert man nämlich die Punkte $[e_1 \wedge e_2]$, $[e_3 \wedge e_4]$ und $[e_5 \wedge e_6]$, so erhält man auf der Sphäre die Verbindungen der Seitenmittelpunkte $E_{12} := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4]$, $E_{13} := [e_1 \wedge e_2 + e_5 \wedge e_6]$ und $E_{23} := [e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]$ mit dem (auf die Sphäre projizierten) Baryzentrum $E_{123} := [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]$. Die Seitenmittelpunkte entsprechen dabei gerade den im Stratum S_2 liegenden Punkten des Schnittortes, also Endpunkten $\gamma(t_0)$ zweier Geodätischer vom Typ (a) mit $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Die Verbindungslinien mit dem Baryzentrum E_{123} ohne die Seitenmittelpunkte entsprechen den Endpunkten $\gamma(t_0)$ zweier Geodätischer vom Typ (b) mit $t_0 \in]\frac{\pi}{4}, \arctan(\sqrt{2})]$ (in E_{123} ist $t_0 = \arctan(\sqrt{2})$).

Man kann sich den Schnittort also folgendermaßen veranschaulichen:



Bem.: Die Punkte $(E_1, E_{12}, E_{123}, E_{23})$ beschreiben ein (entlang E_1) auf die Sphäre projiziertes Quadrat. Dabei hat die Diagonale $\overline{E_1 E_{123}}$ die Länge $\arctan(\sqrt{2})$, die Seiten $\overline{E_1 E_{12}}$ und $\overline{E_1 E_{13}}$ haben die Länge $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, und die Seiten $\overline{E_{12} E_{123}}$ und $\overline{E_{13} E_{123}}$ haben die Länge $\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Die Struktur des Schnittortes :

Die obige Veranschaulichung gibt zu der Vermutung Anlaß, daß der Schnittort außer in den durch das Baryzentrum $E_{123} = [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]$ repräsentierten Punkten glatt ist. Es gilt nämlich:

Beh.: Die Seite $\overline{E_{12}E_{123}}$ des den Orbitraum repräsentierenden Dreiecks wird durch eine Geodätische beschrieben, die

- a.) über den Punkt E_{12} hinaus weiter im Schnittort verläuft,
- b.) über den Punkt E_{123} hinaus aber den Schnittort verläßt.

Bew.: a.) Sei $u := \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 - 2e_5 \wedge e_6)$, dann ist die Geodätische $\gamma(t) := [\cos(t) \frac{1}{\sqrt{3}} (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6) + \sin(t) \cdot u]$ die kürzeste Verbindung zwischen $\gamma(0) = E_{123} = [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6]$ und $\gamma(\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})) = E_{12} = [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4]$. Die Punkte $\gamma(t)$ für $t \in [0, \arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})]$ liegen offenbar auf der Strecke $\overline{E_{12}E_{123}}$. Weiter gilt: $\dot{\gamma}(\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}})) = -(e_5 \wedge e_6)$, d.h. die Geodätische γ läßt sich glatt durch die im Schnittort verlaufende Geodätische $\tilde{\gamma}(t) := [\cos(t) \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + \sin(t) (-e_5 \wedge e_6)]$ fortsetzen.

b.) Sei $\gamma'(t) := [\cos(t) \frac{1}{\sqrt{3}} (e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + e_5 \wedge e_6) + \sin(t) \cdot (-u)]$, also die (glatte) Fortsetzung der Geodätischen $\gamma(t) = \gamma'(-t)$. Für $t \in]0, \arctan(\sqrt{2})[$ liegt $\gamma'(t) = [e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + k e_5 \wedge e_6]$ mit $k > 1$ offenbar nicht in $C(G_{2,6})$.

□

Es läßt sich also die allgemeine Behauptung ableiten:

Lemma 2.11 :

- a.) $\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis, } 0 \leq k < 1 \} \subset C(G_{2,6})$ ist eine (reelle) Untermannigfaltigkeit in \mathbb{P}^{14} und
- b.) für eine Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_6\}$ ist $[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6]$ kein glatter Punkt des Schnittortes $C(G_{2,6})$.

Bew.:

a.) Zunächst ist die Menge

$$\left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis}, 0 < k < 1 \right\}$$

eine Untermannigfaltigkeit, denn es handelt sich um die Vereinigung aller Orbits desselben Typs (vergl. [J]).

Folglich ist nur die Glattheit in Punkten $[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4]$ zu zeigen.

Sei $A := \left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis}, 0 \leq k < 1 \right\}$

und $B := \left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalsystem} \right\}$.

Wegen Lemma 2.7 kann man die folgende Abbildung definieren:

$$p : A \rightarrow B \quad \text{mit} \quad p([a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6]) := [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4].$$

Beh.: p ist ein differenzierbares Faserbündel mit der typischen Faser $D^2 \setminus S^1$, also einer offenen Kreisscheibe.

Bew.: Für eine Orthonormalbasis $\{a_1, \dots, a_6\}$ und $\omega := [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4]$

gilt: $\mathbb{C}(a_1, a_2, a_3, a_4)^\perp = \mathbb{C}(a_5, a_6)$ und $\Lambda^2 \mathbb{C}(a_5, a_6) \cong \mathbb{C}(a_5 \wedge a_6) \cong \mathbb{C}$,

also folgt zunächst:

$$p^{-1}(\omega) = \left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + e^{i\vartheta} k a_5 \wedge a_6] \mid 0 \leq k < 1, \vartheta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Eine lokale Trivialisierung erhält man folgendermaßen:

Es gibt eine offene Umgebung $V \subset \text{PU}(6) \cdot \omega$ von ω , so daß für $\eta \in V$

gilt: $\eta = [b_1^\eta \wedge b_2^\eta + b_3^\eta \wedge b_4^\eta]$, wobei $\{b_1^\eta, \dots, b_4^\eta\}$ differenzierbar von η

abhängen und $\mathbb{C}(b_1^\eta, b_2^\eta, b_3^\eta, b_4^\eta, a_5, a_6) = \mathbb{C}^6$ ist. Durch Orthonormierung

von a_5 und a_6 erhält man so eine Orthonormalbasis $\{b_1^\eta, \dots, b_6^\eta\}$, die

differenzierbar von η abhängt.

Sei nun

$$W := \left\{ [c_1 \wedge c_2 + c_3 \wedge c_4 + k c_5 \wedge c_6] \mid \begin{array}{l} \{c_i\} \text{ Orthonormalbasis} \\ [c_1 \wedge c_2 + c_3 \wedge c_4] \in V \end{array}, 0 \leq k < 1 \right\},$$

dann ist $W \subset A$ offen und für alle $\eta \in W$ gibt es ein $k \in [0, 1[$ und ein

$\vartheta \in [0, 2\pi[$, so daß gilt:

$$\eta = [b_1^\eta \wedge b_2^\eta + b_3^\eta \wedge b_4^\eta + e^{i\vartheta} k b_5^\eta \wedge b_6^\eta]. \text{ Man erhält somit einen}$$

Diffeomorphismus $\varphi : W \xrightarrow{\sim} V \times D^2 \setminus S^1$ durch

$$[b_1^\eta \wedge b_2^\eta + b_3^\eta \wedge b_4^\eta + e^{i\vartheta} k b_5^\eta \wedge b_6^\eta] \mapsto ([b_1^\eta \wedge b_2^\eta + b_3^\eta \wedge b_4^\eta], e^{i\vartheta} k).$$

Da der Orbit $\text{PU}(6) \cdot \omega$ eine Untermannigfaltigkeit ist, folgt die Behauptung.

b.) Sei $x_0 := a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6$, $\omega_0 := [x_0]$.

Sei $u := -\frac{1}{\sqrt{6}} (a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 - 2a_5 \wedge a_6)$, also $u = \dot{\gamma}(0)$ für den Weg

$$\gamma(t) = \left[\cos(t) \frac{1}{\sqrt{3}} x_0 + \sin(t) \cdot u \right].$$

$\Rightarrow \gamma$ verläuft für $t \in [-\arctan(\frac{1}{\sqrt{2}}), 0]$ in $C(G_{2,6})$.

Beh.: Es gibt keinen glatten Weg $\psi: \mathbb{R} \rightarrow C(G_{2,6})$ mit $\dot{\psi}(0) = u$.

Bew.: Für $t > 0$ nahe bei 0 gilt:

$$\gamma(t) = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + K \cdot a_5 \wedge a_6] \quad \text{mit} \quad K = \frac{\sqrt{2} \cos(t) + 2 \sin(t)}{\sqrt{2} \cos(t) - \sin(t)}$$

$$\Rightarrow K > \frac{1+t}{\sqrt{2}} > \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow \gamma$ entfernt sich mindestens linear von $C(G_{2,6}) \Rightarrow$ Beh.

Bem.: Es gehen hier Sätze über differenzierbare Mannigfaltigkeiten und deren Tangentialräume ein (vergl. z.B. [BC],[N]).

□

Nun noch eine abschließende Überlegung zur Struktur des Schnittortes:

1.) Für die Menge $\{[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalsystem}\}$ betrachte man das Faserbündel $p_2: S_2 \rightarrow G_{4,6}$. Für die Faser über $V \in G_{4,6}$ erhält man:

$$p_2^{-1}(V) = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus (\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \mid \omega^2 \neq 0\}.$$

Es gilt: $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap G_{2,6} = \{[a_1 \wedge a_2] \mid a_1, a_2 \in V \text{ lin. unabh.}\}$.

Da $V \cong \mathbb{C}^4$ ist, folgt: $\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1 \cong G_{2,4} \subset \mathbb{P}^5 \cong \mathbb{P}(\Lambda^2 V) =: L$ durch geeignete Isometrien. Der Fall $G_{2,4} \subset \mathbb{P}^5$ ist einer der normal-homogenen

Fälle, die in [BFS] betrachtet wurden. Man erhält das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^5 &\cong C_L(L \cap R_1) = C_L(L \cap G_{2,6}) \supset C_{\mathbb{P}^{14}}(G_{2,6}) \cap L = \\ &= \{[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid \{a_1, \dots, a_4\} \text{ Orthonormalbasis von } V\} \\ &\cong \mathbb{P}(U(4)/Sp(2)) \quad (\text{reell 5-dimensional}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1) = C_{\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)}(G_{2,6}) \cap \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cong \mathbb{R}P^5$$

$\Rightarrow p_2|_{C(G_{2,6}) \cap S_2}: C(G_{2,6}) \cap S_2 \rightarrow G_{4,6}$ ist ein differenzierbares Faserbündel mit der typischen Faser

$$\begin{aligned} (p_2|_{C(G_{2,6}) \cap S_2})^{-1}(V) &= (\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus (\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1)) \cap C(G_{2,6}) \\ &= \{[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \mid \{a_1, \dots, a_4\} \text{ Orthonormalbasis von } V\} \cong \mathbb{R}P^5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow C(G_{2,6}) \cap S_2$ ist reell 21-dimensional.

2.) Sei $S := \{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \{a_i\} \text{ Orthonormalbasis}, 0 < k < 1 \}$.

Aufgrund der in Lemma 2.7 bewiesenen Eindeutigkeit läßt sich die Abbildung p_2 folgendermaßen nach S fortsetzen:

$$\tilde{p}_2 : S \rightarrow G_{4,6} \text{ mit } \tilde{p}_2([a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6]) := \mathbb{C}(a_1, a_2, a_3, a_4)$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_2^{-1}(V) = \left\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + k a_5 \wedge a_6] \mid \begin{array}{l} \{a_1, \dots, a_4\} \text{ Orthonormalbasis von } V, \\ \{a_1, \dots, a_6\} \text{ Orthonormalbasis von } \mathbb{C}^6, \\ 0 < k < 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_2^{-1}(V) \cong P(U(4)/Sp(2) \times S^1 \times]0,1[)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\tilde{p}_2^{-1}(V)) = (16 - 10 + 1 + 1) - 1 = 7$$

$\Rightarrow S$ ist reell 23-dimensional.

3.) Die Punkte $\{ [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6] \mid \{a_1, \dots, a_6\} \text{ Orthonormalbasis} \} =: M$ können kein Faserbündel über $G_{4,6}$ sein, denn $M \cong P(U(6)/Sp(3))$, also $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 36 - 21 - 1 = 14$ und $\dim_{\mathbb{R}}(G_{4,6}) = 16$.

3. Die Cohomologie von $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$

In diesem Kapitel wird die analytische Cohomologie des Komplements von $G_{2,6}$ in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$ betrachtet.

Dafür wird das folgende Resultat von W.Barth aus [Ba1] verwendet:

Theorem 3.1:

Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit, $d \leq \dim(Y)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a.) $H^q(\mathbb{P}^n, Y; \mathbb{R}) = 0$ für $q = 0, \dots, d$,
- b.) $H^{n-q}(\mathbb{P}^n \setminus Y, \Omega^n) = 0$ für $q = 0, \dots, d$,
- c.) $H^{n-q}(\mathbb{P}^n \setminus Y, \mathcal{F}) = 0$ für $q = 0, \dots, d$ und für alle kohärenten analytischen Garben \mathcal{F} auf \mathbb{P}^n .

Lemma 3.2:

Es gilt: $H^q(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6), G_{2,6}; \mathbb{R}) = 0$ für $q = 0, 1, 2, 3, 4$
 und $H^5(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6), G_{2,6}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Bew.: Man betrachte die lange exakte Cohomologiesequenz für $G_{2,6} \subset \mathbb{P}^{14}$:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^k(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) &\rightarrow H^k(G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+1}(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^{k+1}(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+1}(G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k+2}(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Aus der Zellenzerlegung von $G_{2,6}$ in die offenen Zellen $W_{a_1 a_2}$, deren Abschlüsse die Schubert-Zyklen sind (vergl. 1.5), erhält man für die Cohomologie-Gruppen von $G_{2,6}$:

$$\text{a.) } H^{2k}(G_{2,6}; \mathbb{R}) = \bigoplus_{\substack{a_1 + a_2 = k \\ 4 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0}} \deg(\sigma_{a_1 a_2}) \cdot \mathbb{R} \quad \text{für } k = 0, \dots, 8,$$

$$\text{b.) } H^{2k+1}(G_{2,6}; \mathbb{R}) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, 7,$$

wobei der Grad der Schubert-Varietät $\sigma_{a_1 a_2}$ definiert ist durch

$$\deg(\sigma_{a_1 a_2}) = \left(\frac{(8 - a_1 - a_2)!}{(4 - a_1)! (5 - a_2)!} \right) (a_1 - a_2 + 1).$$

(vergl. [HP])

Daraus folgt: $H^2(G_{2,6}; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ und $H^4(G_{2,6}; \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Aus der Zellenzerlegung $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \dots \cup \mathbb{C}^0$ folgt:

$$H^q(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } q \text{ gerade und } 0 \leq q \leq 28, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erhält somit folgende zwei exakte Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^2(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\alpha_1} & H^2(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\alpha} & H^2(G_{2,6}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\alpha_2} & H^3(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ & & \text{"} & & \text{"} & & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \\ 0 \rightarrow H^4(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\beta_1} & H^4(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\beta} & H^4(G_{2,6}; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\beta_2} & H^5(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ & & \text{"} & & \text{"} & & \\ & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & & \end{array}$$

Um weitere Aussagen über $H^3(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R})$ und $H^5(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R})$ machen zu können, werden die Abbildungen α und β betrachtet:

- a.) $H_2(G_{2,6})$ wird vom einzigen Schubert-Zyklus der komplexen Dimension 1 erzeugt, also von

$$\begin{aligned} \sigma_{4,3} &= \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1)) \geq 1, \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1, e_2, e_3)) \geq 2 \} \\ &= \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \mathbb{C}(e_1) \subset \Lambda \subset \mathbb{C}(e_1, e_2, e_3) \}. \end{aligned}$$

Als Bild unter der Plücker-Einbettung erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_{4,3}) &= \{ [e_1 \wedge v] \mid v \in \mathbb{C}(e_2, e_3) \} = \{ [z_0 : z_1 : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^{14} \} \\ &\cong \mathbb{P}^1 \end{aligned}$$

Andererseits wird auch $H_2(\mathbb{P}^{14})$ aufgrund der Zellenzerlegung $\mathbb{P}^{14} = \mathbb{C}^{14} \cup \dots \cup \mathbb{C}^0$ von \mathbb{P}^1 erzeugt.

Also ist $H_2(G_{2,6}) \cong H_2(\mathbb{P}^{14})$ und für die Abbildung α gilt:

$$\alpha : H^2(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(G_{2,6}; \mathbb{R}) \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

- b.) $H_4(G_{2,6})$ wird von den Schubert-Zyklen der komplexen Dimension 2 erzeugt, also von

$$\begin{aligned} \sigma_{4,2} &= \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1)) \geq 1, \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1, \dots, e_4)) \geq 2 \} \\ &= \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \mathbb{C}(e_1) \subset \Lambda \subset \mathbb{C}(e_1, e_2, e_3, e_4) \} \text{ und} \\ \sigma_{3,3} &= \{ \Lambda \in G_{2,6} \mid \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1, e_2)) \geq 1, \dim(\Lambda \cap \mathbb{C}(e_1, e_2, e_3)) \geq 2 \}. \end{aligned}$$

Als Bild unter der Plücker-Einbettung erhält man:

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_{4,2}) &= \{ [e_1 \wedge v] \mid v \in \mathbb{C}(e_2, e_3, e_4) \} = \{ [z_0 : z_1 : z_2 : 0 : \dots : 0] \in \mathbb{P}^{14} \} \\ &\cong \mathbb{P}^2 \text{ als einen Erzeugenden von } H_4(G_{2,6}). \end{aligned}$$

Da auch $H_4(\mathbb{P}^{14})$ von \mathbb{P}^2 erzeugt wird, folgt:

$$\begin{aligned} H_4(G_{2,6}) &\longrightarrow H_4(\mathbb{P}^{14}) \text{ ist surjektiv} \\ \Rightarrow \beta : H^4(\mathbb{P}^{14}; \mathbb{R}) &\hookrightarrow H^4(G_{2,6}; \mathbb{R}) \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Durch die obigen beiden exakten Sequenzen erhält man nun:

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) &= 0 \\ &(\ker(\alpha) = \text{im}(\alpha_1) = 0, \ker(\alpha_1) = 0), \\ H^3(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) &= 0 \\ &(\text{im}(\alpha) = \ker(\alpha_2) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{im}(\alpha_2) = 0), \\ H^4(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) &= 0 \\ &(\ker(\beta) = \text{im}(\beta_1) = 0, \ker(\beta_1) = 0), \\ H^5(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) &\cong \mathbb{R} \\ &(\text{im}(\beta) = \ker(\beta_2) = \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \Rightarrow \text{im}(\beta_2) \cong \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $H^0(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R})$ und $H^1(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R})$ betrachtet man den Anfang der langen exakten Cohomologiesequenz. Da $H_0(\mathbb{P}^{14})$ und $H_0(G_{2,6})$ von \mathbb{P}^0 , d.h. einem Punkt erzeugt werden, erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \xrightarrow{\gamma_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma_2} H^1(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow H^0(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) = 0 \\ &(\ker(\gamma_1) = 0 \text{ und } \text{im}(\gamma_1) = 0), \\ H^1(\mathbb{P}^{14}, G_{2,6}; \mathbb{R}) &= 0 \\ &(\ker(\gamma_2) = \mathbb{R} \Rightarrow \text{im}(\gamma_2) = 0). \end{aligned}$$

□

Aus Theorem 3.1 und Lemma 3.2 folgt nun:

Korollar 3.3:

- (i) $H^q(\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}, \mathcal{F}) = 0$ für $q = 10, 11, 12, 13, 14$ und alle kohärenten analytischen Garben \mathcal{F} auf \mathbb{P}^{14} ,
- (ii) $H^9(\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}, \Omega^{14}) \neq 0$.

Da desweiteren für $q \geq 14$, \mathcal{F} wie oben $H^q(\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}, \mathcal{F}) = 0$ ist (vergl. [GW]), erhält man:

Satz 3.4: $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ ist cohomologisch 10-vollständig, aber nicht 9-vollständig.

4. Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion

In diesem Kapitel wird eine 10-konvexe Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ konstruiert, d.h. eine differenzierbare Funktion $\Phi : \mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6} \rightarrow \mathbb{R}$, s.d gilt:

- (i) $\Phi^{-1}(]-\infty, c[) = \{ x \in \mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6} \mid \Phi(x) < c \} \subset \subset \mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$
- (ii) $\forall x_0 \in \mathbb{P}^{14} \setminus G_{2,6}$ gilt: $L_{x_0}(\Phi)$ ist positiv definit auf einem mindestens 5-dimensionalen komplexen Unterraum von $T_{x_0} \mathbb{P}^{14}$.

Diese Ausschöpfungsfunktion wird nacheinander für die Strata S_2 und S_3 konstruiert und anschließend verklebt.

Zunächst werden die Überlegungen von Kapitel 1.6 auf folgende Situation angewandt:

Sei $\Lambda_k^{(n)} : \Lambda^2 \mathbb{C}^n \rightarrow \Lambda^{2k+2} \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{2k+2}}$ für $k \leq \frac{n}{2}$ definiert durch

$$\omega \mapsto \omega^{k+1}.$$

Die Komponentenfunktionen von $\Lambda_k^{(n)}$ liefern (bezüglich der Standardbasis $\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{2k+2}} \} \subset \binom{n}{2k+2} = N$) N homogene Polynome vom Grad $(k+1)$, also einen Schnitt $\xi_k^{(n)}$ in dem positiven Bündel $\bigoplus_{i=1}^N \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{(2)}-1}(k+1)$, und somit eine reellwertige Funktion $a(\Lambda_k^{(n)}) := \|\xi_k^{(n)}\|^2$.

Bem.: Offenbar gilt: $\Lambda_k^{(n)}(\omega) = 0 \iff \omega^{k+1} = 0$, d.h. die Nullstellenmenge von $a(\Lambda_k^{(n)})$ ist gerade $R_k^{(n)} := \{ [\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n) \mid \omega^{k+1} = 0 \}$.

Sei $B := \{ a_1, \dots, a_p \} \subset \mathbb{C}^n$ ein Orthonormalsystem, dann induziert B eine isometrische Einbettung $i_B : \mathbb{C}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ durch $i_B(e_\nu) := a_\nu$ für $\nu = 1, \dots, p$. Dadurch wiederum wird folgende isometrische Einbettung induziert:

$$\begin{aligned} \lambda_B : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^p) &\rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n) \\ [x \wedge y] &\mapsto [i_B(x) \wedge i_B(y)]. \end{aligned}$$

Bem.: Es gilt $a(\Lambda_k^{(n)}) \circ \lambda_B = a(\Lambda_k^{(p)})$ für $p \leq n$ und $k \leq \frac{p}{2}$.

(Da die Abbildung $a(\Lambda_k^{(n)})$ offensichtlich unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis ist, ist sie verträglich mit Orthonormalbasiswechseln.)

Für die Konstruktion der Ausschöpfungsfunktion wird außerdem das folgende Lemma benötigt:

Lemma 4.1:

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- a.) $\overline{\{x \in X \mid f(x) < c\}}$ ist für alle $c < \sup(f)$ eine kompakte Teilmenge von X .
- b.) Es gibt ein $c_0 < \sup(f)$, so daß gilt:
 - (i) f ist \mathcal{C}^∞ auf $X \setminus \overline{\{x \in X \mid f(x) < c_0\}}$,
 - (ii) $L_x(f)|_{\ker(\partial f)_x}$ hat für alle $x \in X \setminus \overline{\{x \in X \mid f(x) < c_0\}}$ höchstens $q-1$ Eigenwerte ≤ 0

(auch zugelassen sind die Fälle $c_0 = -\infty$ und $(\partial f)_x = 0$).

Dann gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine streng-monoton wachsende \mathcal{C}^∞ -Funktion

$h_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in X \setminus \overline{\{x \in X \mid f(x) < c_0 + \varepsilon\}}$ gilt:

$L_x(h_\varepsilon \circ f)$ hat mindestens $n-q+1$ positive Eigenwerte.

(Die Funktion h_ε kann dabei so gewählt werden, daß sie überall positiv ist.)

Bew.: Sei $K := \overline{\{x \in X \mid f(x) < c_0\}}$, $K_\varepsilon := \overline{\{x \in X \mid f(x) < c_0 + \varepsilon\}}$, $x \in X \setminus K_\varepsilon$

$\Rightarrow L_x(f)|_{\ker(\partial f)_x}$ hat höchstens $q-1$ Eigenwerte ≤ 0 .

a.) $(\partial f)_x = 0 \Rightarrow \dim(\ker(\partial f)_x) = n \Rightarrow L_x(f)$ hat mindestens $n-q+1$ positive Eigenwerte.

b.) $(\partial f)_x \neq 0 \Rightarrow \dim(\ker(\partial f)_x) = n-1$.

Dieser Fall wird im Beweis des Lemmas 3.10 in [BFS] behandelt.

□

Bew.:

Sei a_1, \dots, a_6 eine Basis von \mathbb{C}^6 , so daß $\omega_0 = a_1 \wedge a_2 + \dots + a_{2\nu-1} \wedge a_{2\nu}$.

Sei $V := \mathbb{C}(a_{2\nu+1}, \dots, a_6)$, dann gilt: $T_{\omega_0}(\tilde{S}_\nu) \oplus \Lambda^2 V = T_{\omega_0}(\mathbb{P}^{14})$, denn

$$T_{\omega_0}(\tilde{S}_\nu) = \mathbb{C}(a_i \wedge x \mid i=1, \dots, 2\nu, x \in \mathbb{C}^6).$$

Jedes ω_i nahe bei ω_0 ist darstellbar als $\omega_i = \omega_{i,0} + t_i v_i$, mit

$$\omega_{i,0} \in \tilde{S}_\nu, \omega_{i,0} \rightarrow \omega_0, v_i \in \Lambda^2 V, \|v_i\| = 1, t_i \in \mathbb{R}_0^+, t_i \rightarrow 0.$$

$$\text{Sei } v := \lim_{i \rightarrow \infty} v_i.$$

a.) $\nu = 1$:

$$\tilde{S}_1 = \{ \omega = a \wedge b \in \Lambda^2 \mathbb{C}^6 \mid a, b \text{ linear unabhängig} \},$$

$$\omega_0 = a_1 \wedge a_2, V = \mathbb{C}(a_3, a_4, a_5, a_6).$$

$$\text{Sei } \eta \in T_{\omega_0} S_1 \Rightarrow \omega_0 \wedge \eta = 0 \quad (\text{denn } a_1 \wedge a_2 \wedge a_\mu \wedge x = 0 \text{ f\u00fcr } \mu=1,2).$$

$$\text{Z.z.: } \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_i^2 \wedge \eta}{\|\omega_i^2\|} = 0 \quad (\text{Problem: Z\u00e4hler} \rightarrow 0 \text{ und Nenner} \rightarrow 0).$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \omega_i^2 &= (\omega_{i,0} + t_i v_i)^2 = 2\omega_{i,0} \wedge t_i v_i + t_i^2 v_i \wedge v_i \\ &= t_i (2\omega_{i,0} + t_i v_i) \wedge v_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_i^2 \wedge \eta}{\|\omega_i^2\|} = \frac{(2\omega_{i,0} + t_i v_i) \wedge v_i \wedge \eta}{\|(2\omega_{i,0} + t_i v_i) \wedge v_i\|} = \frac{2\omega_{i,0} \wedge v_i \wedge \eta + t_i(\dots)}{\|2\omega_{i,0} \wedge v_i + t_i(\dots)\|}$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_i^2 \wedge \eta}{\|\omega_i^2\|} = \frac{\omega_0 \wedge v \wedge \eta}{\|\omega_0 \wedge v\|} = 0 \quad (\omega_0 \wedge \eta = 0, \omega_0 \wedge v \neq 0).$$

b.) $\nu = 2$:

$$\tilde{S}_2 = \{ a \wedge b + c \wedge d \mid a, b, c, d \text{ linear unabhängig} \},$$

$$\omega_0 = a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4, V = \mathbb{C}(a_5, a_6).$$

$$\text{Sei } \eta \in T_{\omega_0} \tilde{S}_2 \Rightarrow \omega_0^2 \wedge \eta = 0$$

$$(\text{denn } a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge a_4 \wedge a_i \wedge x = 0 \text{ f\u00fcr } i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\omega_i^2 \wedge \eta}{\|\omega_i^2\|} = \frac{\omega_0^2 \wedge \eta}{\|\omega_0^2\|} = 0 \quad (\omega_0^2 \neq 0).$$

In beiden F\u00e4llen folgt: $\lim_{i \rightarrow \infty} (\omega_i^2 \wedge \eta) = 0$,

und folglich gilt mit Beh.4.2:

$$\begin{aligned} \eta &\in \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\ker(\xi \mapsto \omega_i^2 \wedge \xi) \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\ker(\partial g)_{\omega_i} \right) \\ \Rightarrow T_{\omega_0}(\tilde{S}_\nu) &\subset \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\ker(\partial g)_{\omega_i} \right) \text{ f\u00fcr } \nu = 1, 2. \end{aligned}$$

□

Es wird noch der folgende Sachverhalt verwendet (vergl. [BFS] Prop.5.4):

Bem. 4.4:

Sei g ein homogenes Polynom vom Grad d , $Z := V(g) = \{ z \in \mathbb{P}^n \mid g(z) = 0 \}$.

Dann ist die Funktion $\psi(z) := \log \left(\frac{\left(\sum_{i=0}^n z_i \bar{z}_i \right)^d}{|g(z)|^2} \right)$

eine Ausschöpfungsfunktion auf $\mathbb{P}^n \setminus Z$, und für alle $x_0 \in \mathbb{P}^n \setminus Z$ ist die Leviform $L_{x_0}(\psi)$ positiv definit auf $T_{x_0}(\mathbb{P}^n)$.

Bew.:

1.) a.) Offensichtlich ist ψ wohldefiniert, denn für $[w] = [z]$ gilt:

$$w_i = a \cdot z_i \text{ für } i = 0, \dots, n \Rightarrow \psi(w) = \log \left(\frac{\left(|a|^2 \sum_{i=0}^n z_i \bar{z}_i \right)^d}{(|a|^d |g(z)|)^2} \right) = \psi(z) .$$

b.) ψ ist eine Ausschöpfungsfunktion:

$$\begin{aligned} \text{O.E. kann man voraussetzen: } & \left(\sum_{i=0}^n z_i \bar{z}_i \right)^d = 1 \\ \Rightarrow \text{für } z \rightarrow Z \text{ gilt } & g(z) \rightarrow 0 \Rightarrow \psi(z) \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

$$2.) \text{ Z.z.: } L_{x_0}(\psi)(\xi, \xi) = \sum_{\mu, \nu=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial t_\mu \partial \bar{t}_\nu} (x_0) \xi_\mu \bar{\xi}_\nu \stackrel{!}{>} 0$$

(in Koordinaten $t_\nu = \frac{z_\nu}{z_0}$ für $\nu = 1, \dots, n$ auf $U_0 = \{ z_0 \neq 0 \}$).

Es gilt: (vergleiche [BFS])

$$L_{x_0}(\psi)(\xi, \xi) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{(1+|t|^2)^2} \left(|\xi|^2 + (|t|^2 |\xi|^2 - |\langle \xi, t \rangle|^2) \right) - L_{x_0}(\log \circ (g \bar{g}))(\xi, \xi) \\ & \geq \frac{d}{(1+|t|^2)^2} |\xi|^2 \Rightarrow \text{positiv definit.} \end{aligned}$$

□

Nun soll das Ergebnis von Lemma 4.3 verallgemeinert werden:

Sei $G^{(13)}$ das Bündel der Hyperflächen im Tangentialbündel $TP(\Lambda^2\mathbb{C}^6) = TP^{14}$ über \mathbb{P}^{14} .

Desweiteren werde $\Lambda_2^{(6)}$ im folgenden identifiziert mit der holomorphen Funktion $g : \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^6) \rightarrow \mathbb{C}$ (definiert durch $[\Lambda_2^{(6)}(\omega)] = [g(\omega) e_1 \wedge \dots \wedge e_6]$).

Lemma 4.5 :

Seien $[\omega_0], [\omega_j] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^6)$ mit $[\omega_0] \in S_2 \subset R_2 = \{ [\omega] \mid \omega^3 = 0 \} = V(g)$,

$[\omega_j] \in \mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^6) \setminus V(g) = S_3$ und $\lim_{j \rightarrow \infty} [\omega_j] = [\omega_0]$.

Es gelte weiter: $\ker(\partial(a(\Lambda_2^{(6)}))_{[\omega_j]})$ konvergiert in $G^{(13)}$.

Dann gilt: $\lim_{j \rightarrow \infty} \ker(\partial(a(\Lambda_2^{(6)}))_{[\omega_j]}) \supset T_{[\omega_0]}S_2$.

Bew.:

Es gilt $a(\Lambda_2^{(6)}) = \|\xi_2^{(6)}\|^2$. Deshalb läßt sich $a(\Lambda_2^{(6)})$ lokal darstellen

durch $a(\Lambda_2^{(6)}) = |g|^2 \cdot h$, wobei h eine reellwertige überall positive

Funktion ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \partial(a(\Lambda_2^{(6)}))_{[\omega_j]} &= \partial(|g|^2 \cdot h)_{[\omega_j]} \\ &= (\partial g)_{[\omega_j]} \cdot \bar{g}([\omega_j]) \cdot h([\omega_j]) + |g([\omega_j])|^2 \cdot (\partial h)_{[\omega_j]}. \end{aligned}$$

Sei $\eta \in T_{\omega_0} \tilde{S}_2$, dann ist zu zeigen:

$$\eta \in \lim_{j \rightarrow \infty} \ker(\partial(a(\Lambda_2^{(6)}))_{[\omega_j]}).$$

Mit Beh.4.2 erhält man die folgende Behauptung:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\exists \omega_j^2 \wedge \eta) \wedge \bar{\omega}_j^3 h(\omega_j) + \omega_j^3 \bar{\omega}_j^3 (\partial h)_{\omega_j}(\eta)}{\|\exists \omega_j^2 \wedge \bar{\omega}_j^3 h(\omega_j) + \omega_j^3 \bar{\omega}_j^3 (\partial h)_{\omega_j}\|} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wie im Beweis von Lemma 4.3 läßt sich ω_j schreiben als $\omega_j = \omega_{j,0} + t_j v_j$

mit $\omega_{j,0} \in \tilde{S}_2$, $\omega_{j,0} \rightarrow \omega_0$, $v_j \in T_{\omega_0}(\tilde{S}_2)^\perp$, $\|v_j\| = 1$, $t_j \in \mathbb{R}_0^+$, $t_j \rightarrow 0$.

Sei $v := \lim_{j \rightarrow \infty} v_j$.

Man erhält:

$$\begin{aligned}
\omega_j^2 &= \omega_{j,0}^2 + 2 t_j \omega_{j,0} \wedge v_j + t_j^2 v_j^2, \\
\omega_j^3 &= t_j \cdot (3 \omega_{j,0}^2 \wedge v_j + 3 t_j \omega_{j,0} \wedge v_j^2 + t_j v_j^3) \quad (\text{denn } \omega_{j,0}^3 = 0) \\
\Rightarrow & \frac{ (3 \omega_j^2 \wedge \eta) \wedge \bar{\omega}_j^3 h(\omega_j) + \omega_j^3 \bar{\omega}_j^3 (\partial h)_{\omega_j}(\eta) }{ \| 3 \omega_j^2 \wedge \bar{\omega}_j^3 h(\omega_j) + \omega_j^3 \bar{\omega}_j^3 (\partial h)_{\omega_j} \| } \\
&= \frac{ 3 \omega_{j,0}^2 \wedge \eta \wedge 3 \bar{\omega}_{j,0}^2 \wedge \bar{v}_j h(\omega_j) + t_j \cdot (\dots) }{ \| 3 \omega_{j,0}^2 \wedge 3 \bar{\omega}_{j,0}^2 \wedge \bar{v}_j h(\omega_j) + t_j \cdot (\dots) \| } =: L_j \\
\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} L_j &= \frac{ \omega_0^2 \wedge \eta \wedge \bar{\omega}_0^2 \wedge \bar{v} }{ \| \omega_0^2 \wedge \bar{\omega}_0^2 \wedge \bar{v} \| } = 0 \\
& \quad (\text{denn: } \omega_0 = a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 \in \tilde{S}_2, \eta \in T_{\omega_0} \tilde{S}_2 \\
& \quad \Rightarrow T_{\omega_0} \tilde{S}_2 = \mathbb{C}(a_i \wedge x \mid 1 \leq i \leq 4, x \in \mathbb{C}^6) \Rightarrow \omega_0^2 \wedge \eta = 0).
\end{aligned}$$

□

Nun wird das folgende Resultat von W.Barth aus [Ba2] benötigt:

Lemma 4.6:

Sei $Y \subset \mathbb{P}^N$ eine abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit der komplexen Codimension q .

Sei die Funktion $f : \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := -\text{dist}^2(x, Y)$.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{P}^N \setminus (Y \cup C(Y))$:

- (i) $L_x(f)$ hat mindestens $N-q$ positive Eigenwerte auf $H_x(f) = \ker(\partial f)_x$.
- (ii) Es gibt ein $A \in \text{PGL}(N+1, \mathbb{C})$ mit den folgenden Eigenschaften:
 - a.) $x \in A(Y)$
 - b.) $d_x(f|_{A(Y)}) = 0$
 - c.) $L_x(f|_{A(Y)})$ ist positiv definit.

Lemma 4.6 wird nun auf den Fall $G_{2,n} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$ angewandt:

Sei $f_{(n)} : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n) \setminus G_{2,n} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$[\omega] \mapsto \text{dist}^2([\omega], G_{2,n}) ,$$

dann genügt $(-f_{(n)})$ den Voraussetzungen (a) und (b) von Lemma 4.1 :

(Mit $\dim \ker(\partial f)_x = N-1$ folgt aus Lemma 4.6 : $L_x(-f_{(n)})$ hat höchstens $N-1-(N-q)$, also $q-1$ Eigenwerte ≤ 0 auf $\ker(\partial f)_x$, wobei $N = \dim(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n))$ und $q = \text{codim}(G_{2,n}, \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n))$ ist.)

Sei $\tilde{f}_{(n)} := h \circ (-f_{(n)})$, wobei h gemäß Lemma 4.1 streng monoton wachsend und überall positiv gewählt sei.

Weiter gelte (mit $c_0 < \sup(-f_{(n)})$) :

Für alle $x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus \overline{\{x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \mid f_{(4)}(x) > -c_0 - \varepsilon\}}$, d.h. für alle x , die nahe genug bei $G_{2,4}$ liegen, sei $L_x(\tilde{f}_{(4)})$ positiv definit auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4))$.

Bem.: Diese Wahl ist möglich, denn für $x \in \mathbb{P}^5 \setminus \overline{\{x \mid f_{(4)}(x) > -c_0\}}$ gilt:

- $\text{codim}(G_{2,4}, \mathbb{P}^5) = 1$
- $\Rightarrow L_x(f_{(4)})$ hat mindestens 4 positive Eigenwerte, also keinen Eigenwert ≤ 0 auf $\ker(\partial f_{(4)})_x$
- $\Rightarrow L_x(h \circ (-f_{(4)}))$ hat mindestens $5-1+1 = 5$ positive Eigenwerte (und $\dim(T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4))) = 5$).

Einige weitere Bezeichnungen:

$$R_\nu^{(n)} := \{ [\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n) \mid \omega^{\nu+1} = 0 \} , \quad S_\nu^{(n)} := R_\nu^{(n)} \setminus R_{\nu-1}^{(n)} \quad \text{für } n = 4, 5, 6$$

(insbesondere ist $R_\nu = R_\nu^{(6)}$ und $S_\nu = S_\nu^{(6)}$) .

Sei $\psi_k^{(n)} : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{(n)}) \setminus R_{k-1}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$[\omega] \mapsto \log\left(\frac{\langle \omega, \omega \rangle^k}{\|\omega^k\|^2}\right) .$$

Für $p \leq 6$, $k \leq 3$ und ein Orthonormalsystem $B := \{b_1, \dots, b_p\} \subset \mathbb{C}^6$ gilt dann offenbar: $\psi_k^{(n)} \circ \lambda_B = \psi_k^{(p)}$, wobei $\lambda_B : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^p) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^n)$ die am Anfang des Kapitels definierte isometrische Einbettung ist.

Bem.4.7 :

Da $R_{k-1}^{(2k)}$ eine Hyperfläche in $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k})$ ist, folgt aus Bem.4.4 :

$$\forall x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k}) \setminus R_{k-1}^{(2k)} \text{ ist } L_x(\psi_k^{(2k)}) \text{ positiv definit auf } T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^{2k})) .$$

Nun kann die Ausschöpfungsfunktion konstruiert werden !

Konstruktionsplan :

Zunächst werden die Funktionen $\psi_2^{(4)}$ und $f_{(4)}$ verklebt.

Diese Funktion wird dann (wie in Lemma 4.1) zur Funktion $\Phi_2^{(4)}$ gestreckt.

Analog wird (unter Verwendung von $\Phi_2^{(4)}$) die Funktion $\Phi_2^{(6)}$ konstruiert, so daß für alle $x \in S_2$ gilt: $L_x(\Phi_2^{(6)})$ hat mindestens 5 positive Eigenwerte in Richtung der Fasern von $p_2 : S_2 \rightarrow G_{4,6}$.

Zuletzt werden die Funktionen $\Phi_2^{(6)}$ und $\psi_3^{(6)}$ verklebt und man erhält die gewünschte Ausschöpfungsfunktion $\Phi = \Phi_3^{(6)}$.

Zunächst wird also eine geeignete Verklebungsfunktion benötigt:

Sei $a < b$ und $\rho_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{C}^∞ -Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- | | |
|---|---|
| (i) $\rho_{a,b}(t) = 0$ für $t \leq a$ | (iii) $\rho_{a,b}''(t) > 0$ für $a < t < \frac{a+b}{2}$ |
| $\rho_{a,b}(t) = 1$ für $t \geq b$ | $\rho_{a,b}''(t) < 0$ für $\frac{a+b}{2} < t < b$. |
| (ii) $\rho_{a,b}'(t) > 0$ für $a < t < b$ | |

Sei $a > 0$ so gewählt, daß folgende Implikation gilt:

$$\tilde{f}_{(4)}(x) > a \Rightarrow L_x(\tilde{f}_{(4)}) \text{ ist positiv definit auf } T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)) .$$

Sei weiter $b > a$ und $c > 0$. Definiere nun:

$$\tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)} : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus G_{2,4} \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch}$$

$$\tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)} := (1 - \rho_{a,b} \circ \tilde{f}_{(4)}) \cdot c \psi_2^{(4)} + (\rho_{a,b} \circ \tilde{f}_{(4)}) \cdot \tilde{f}_{(4)} .$$

Beh.4.8: Für $c > 0$ klein genug gilt für alle $x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus G_{2,4}$:

$$L_x(\tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)}) \text{ ist positiv definit auf } \ker(\partial \tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)})_x .$$

Bew.: Zur Vereinfachung werden die Indizes weggelassen !

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \partial \tilde{\Phi}_c &= (1 - \rho \circ \tilde{f}) c \partial \psi - (\rho' \circ \tilde{f}) c \psi \partial \tilde{f} + (\rho \circ \tilde{f}) \partial f + (\rho' \circ \tilde{f}) \tilde{f} \partial \tilde{f} \\ &= (1 - \rho \circ \tilde{f}) c \partial \psi + \left((\rho' \circ \tilde{f})(\tilde{f} - c \psi) + \rho \circ \tilde{f} \right) \partial \tilde{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } L(\tilde{\Phi}_c) &= (1 - \rho \circ \tilde{f}) c L(\psi) + \left((\rho' \circ \tilde{f})(\tilde{f} - c \psi) + \rho \circ \tilde{f} \right) L(\tilde{f}) \\ &\quad - 2(\rho' \circ \tilde{f}) c \operatorname{Re}(\bar{\partial} \tilde{f} \partial \psi) + \left((\rho'' \circ \tilde{f})(\tilde{f} - c \psi) + 2\rho' \circ \tilde{f} \right) |\partial \tilde{f}|^2. \end{aligned}$$

a.) Für $\tilde{f}(x) \leq a$ ist $\rho_{a,b}(\tilde{f}(x)) = 0$, also gilt $L_x(\tilde{\Phi}_c) = c L_x(\psi)$,
und aus Bem.4.7 folgt: $L_x(\tilde{\Phi}_c)$ ist positiv definit auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4))$
für alle $x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus R_1^{(4)} = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus G_{2,4}$.

b.) Für $\tilde{f}(x) \geq b$ gilt entsprechend $L_x(\tilde{\Phi}_c) = L_x(\tilde{f})$, also ist $L_x(\tilde{\Phi}_c)$
aufgrund der Wahl von $b > a$ positiv definit auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4))$.

c.) Sei $A_1 := \{x \mid a < \tilde{f}(x) < \frac{a+b}{2}\}$, $A_2 := \{x \mid \frac{a+b}{2} \leq \tilde{f}(x) < b\}$, $A := A_1 \cup A_2$.

Sei $c > 0$ so klein, daß auf \bar{A} gilt: $|c\psi| < a$. Dann folgt:

$$\tilde{f} - c\psi > 0 \text{ auf } \bar{A} \Rightarrow (\partial \tilde{\Phi}_c)_x = \alpha(x) (\partial \psi)_x + \beta(x) (\partial \tilde{f})_x, \text{ wobei}$$

gilt: $\alpha(x) \geq 0$ für alle x und $\beta(x) > 0$ für $x \in A_1 \cup \bar{A}_2$.

Sei nun $x \in A_1 \cup \bar{A}_2$ und $v \in \ker(\partial \tilde{\Phi}_c)_x$, dann folgt:

$$(\bar{\partial} \tilde{f})_x (\partial \psi)_x(v) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} (\bar{\partial} \psi)_x (\partial \psi)_x(v) = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} |(\partial \psi)_x(v)|^2 \leq 0.$$

Für $x \in A_1$ gilt: $(\rho'' \circ \tilde{f})(x) > 0 \Rightarrow L_x(\tilde{\Phi}_c)$ positiv definit.

Sei $x \in A_2$:

$$\text{Wähle } c := 0 \Rightarrow L_x(\tilde{\Phi}_0) = \beta(x) L_x(\tilde{f}) + \gamma(x) |(\partial \tilde{f})_x|^2$$

$$\text{und } (\partial \tilde{\Phi}_0)_x = \beta(x) (\partial \tilde{f})_x \text{ mit } \beta(x) > 0 \text{ auf } \bar{A}_2.$$

$$\Rightarrow \text{Für } v \in \ker(\partial \tilde{\Phi}_0)_x \text{ ist } (\partial \tilde{f})_x(v) = 0 \Rightarrow L_x(\tilde{\Phi}_0) = \beta(x) L_x(\tilde{f})$$

$$\Rightarrow L_x(\tilde{\Phi}_0) \text{ ist positiv definit auf } \ker(\partial \tilde{\Phi}_0)_x.$$

Da $\tilde{\Phi}_c$, $L(\tilde{\Phi}_c)$ und $\partial \tilde{\Phi}_c$ stetig von c abhängen, folgt:

$$L_x(\tilde{\Phi}_c) \text{ ist positiv definit auf } \ker(\partial \tilde{\Phi}_c)_x \text{ für alle } x \in \bar{A}_2$$

und c klein genug.

□

Sei nun δ_2 so gewählt, daß gilt:

- (i) $0 < f_{(4)}(x) < \delta_2 \Rightarrow L_x(\tilde{f}_{(4)})$ ist positiv definit auf $T_x \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)$,
- (ii) $f_{(6)}$ ist \mathcal{C}^∞ auf $\{x \mid 0 < f_{(6)}(x) < \delta_2\}$

(Nahe genug an $G_{2,n}$ sind die Eigenschaften (i) und (ii) offenbar erfüllt).

Sei weiter $0 < \delta'_2 < \delta_2$, $a := h(-\delta_2)$ und $b := h(-\delta'_2)$.

Die Konstante $c > 0$ sei wie in Beh.4.8 so gewählt, daß gilt:

$L_x(\tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)})$ ist positiv definit auf $\ker(\partial \tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)})_x$ für alle $x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus G_{2,4}$.

Dann folgt mit Lemma 4.1:

Es gibt eine streng monoton wachsende \mathcal{C}^∞ -Funktion $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $L_x(\tilde{h} \circ \tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)})$ positiv definit ist auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4)) \quad \forall x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \setminus G_{2,4}$.

Definiere die Funktion $\Phi_2^{(6)} : \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus G_{2,6} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\Phi_2^{(6)} := \tilde{h} \circ \left((1 - \rho_{a,b} \circ \tilde{f}_{(6)}) \circ \psi_2^{(6)} + (\rho_{a,b} \circ \tilde{f}_{(6)}) \tilde{f}_{(6)} \right).$$

Diese Funktion hat folgende Eigenschaften:

Beh. 4.9:

- (i) $\Phi_2^{(6)}$ ist \mathcal{C}^∞ ,
- (ii) $\Phi_2^{(6)} \circ \lambda_B = \tilde{h} \circ \tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)}$ für jede Orthonormalbasis B eines 4-dimensionalen Untervektorraumes von \mathbb{C}^6 ,
- (iii) Für alle $x \in S_2$ gilt: $L_x(\Phi_2^{(6)})$ hat mindestens 5 positive Eigenwerte in Richtung der Fasern von $p_2 : S_2 \rightarrow G_{4,6}$,
- (iv) $\Phi_2^{(6)} \Big|_{\{x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \mid 0 < f_{(6)}(x) < \delta'_2\}} = \tilde{h} \circ \tilde{f}_{(6)}$.

Bew.:

(i) Auf $\{x \mid \tilde{f}_{(6)} > a\}$ ist $\tilde{f}_{(6)} \in \mathcal{C}^\infty$ und auf $\{x \mid \tilde{f}_{(6)} \leq a\}$ gilt
 $\Phi_2^{(6)} = \tilde{h} \circ (c \psi_2^{(6)}) \Rightarrow$ Beh.

(ii) Es gilt $\psi_2^{(6)} \circ \lambda_B = \psi_2^{(4)}$ (s.o.) und $f_{(6)} \circ \lambda_B = f_{(4)}$ (Bem. 2.9)
 \Rightarrow Beh.

(iii) Erinnerung: Für $V \in G_{4,6}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_2^{-1}(V) &= \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \setminus (\mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cap R_1) \\ &= \{[\omega] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \mid \omega^2 \neq 0\} \\ &= \{[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \mid a_1, \dots, a_4 \text{ linear unabhängig}\}. \end{aligned}$$

Sei $x = [a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4] \in S_2$,

so daß $\{a_1, \dots, a_4\} =: B$ eine Orthonormalbasis von V ist.

Aus (ii) folgt: $L_x(\Phi_2^{(6)} \circ \lambda_B) = L_x(\tilde{h} \circ \tilde{\Phi}_{2,c}^{(4)})$, also gilt nach

Wahl von \tilde{h} : $L_x(\Phi_2^{(6)} \circ \lambda_B)$ ist positiv definit auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^4))$

$\Rightarrow L_x(\Phi_2^{(6)})$ hat mindestens 5 positive Eigenwerte in Richtung
der Fasern von p_2 .

(iv) Sei $0 < f_{(6)}(x) < \delta'_2$, dann folgt:

$$\Rightarrow \tilde{f}_{(6)}(x) = h \circ (-f_{(6)})(x) > b$$

$$\Rightarrow \varrho_{a,b} \circ \tilde{f}_{(6)}(x) = 1$$

$$\Rightarrow \Phi_2^{(6)}(x) = \tilde{h} \circ \tilde{f}_{(6)}(x) \Rightarrow \text{Beh.}$$

□

Nun wird die Funktion $\Phi_3^{(6)}$ konstruiert.

Aus der Eigenschaft (iv) der Funktion $\Phi_2^{(6)}$ folgt, daß für $f_{(6)}(x) < \delta'_2$, also x nahe genug bei $G_{2,6}$, gilt:

$$L_x(\Phi_2^{(6)})(v,v) = \tau(x) L_x(\tilde{f}_{(6)})(v,v) \quad \text{für } v \in \ker(\partial f_{(6)})_x,$$

wobei $\tau(x)$ ein positiver Faktor ist.

$$\left(\text{denn: } L(\tilde{h} \circ \tilde{f}) = (\tilde{h}'' \circ \tilde{f}) |\partial \tilde{f}|^2 + (\tilde{h}' \circ \tilde{f}) L(\tilde{f}) \right)$$

Da $\dim(G_{2,6}) = 8$ ist, folgt aus Lemma 4.6 für $0 < f_{(6)}(x) < \delta'_2$:

$L_x(\tilde{f}_{(6)})$ ist positiv definit auf einem mindestens 8-dimensionalen Untervektorraum von $\ker(\partial f_{(6)})_x$ und aus obiger Überlegung folgt somit:

$L_x(\Phi_2^{(6)})$ ist positiv definit auf einem mindestens 7-dimensionalen Untervektorraum von $\ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$.

Nun müssen noch die Punkte mit $f_{(6)}(x) \geq \delta'_2$ untersucht werden:

Sei $R'_2 := \{ x \in R_2 \mid f_{(6)}(x) \geq \delta'_2 \}$, $x_0 \in R'_2$, dann liegt x_0 in S_2 .

Aus Beh.4.9 (iii) folgt:

Es gibt einen Unterraum $A_{x_0} \subset T_{x_0}(S_2)$ der Dimension 5, so daß gilt:

$L_{x_0}(\Phi_2^{(6)})$ ist positiv definit auf A_{x_0} .

Aus Lemma 4.5 folgt:

Es gibt eine offene Umgebung $U(x_0)$ von x_0 , so daß für alle $x \in U(x_0)$ gilt: $L_x(\Phi_2^{(6)})$ ist positiv definit auf einem mindestens 5-dimensionalen Unterraum von $\ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$.

Bew.: Da $\Phi_2^{(6)} \in C^\infty$ ist, gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} L_x(\Phi_2^{(6)}) = L_{x_0}(\Phi_2^{(6)})$;

aus Lemma 4.5 folgt: $\lim_{x \rightarrow x_0} \ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x \supset T_{x_0}(S_2)$.

Also gibt es für x nahe genug bei x_0 einen Unterraum $A_x \rightarrow A_{x_0}$, $A_x \subset \ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$, so daß $L_x(\Phi_2^{(6)})$ positiv definit auf A_x ist.

Sei $R := \bigcup_{x_0 \in R'_2} U(x_0)$ die Vereinigung der offenen Umgebungen.

Wähle nun:

$b' > 0$ so daß $\{x \mid 0 < a(\Lambda_2^{(6)})(x) < b'\} \subset \{x \mid 0 < f_{(6)}(x) < \delta'_2\} \cup \mathbb{R}$,

$0 < a' < b'$ und $0 < \delta'_3 < \delta'_2$ s.d. gilt : $(0 < f_{(6)}(x) < \delta'_3 \Rightarrow a(\Lambda_2^{(6)})(x) < a')$,

$\beta := \inf \{ \Phi_2^{(6)}(x) \mid a' \leq a(\Lambda_2^{(6)})(x) \leq b' \}$,

$c' > 0$ so klein, daß auf $\{a' \leq a(\Lambda_2^{(6)})(x) \leq b'\}$ gilt: $c' \psi_3^{(6)} - (\Phi_2^{(6)} - \beta + 1) < 0$.

Nun kann die Ausschöpfungsfunktion definiert werden :

$$\Phi_3^{(6)} := (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)})) c' \psi_3^{(6)} + (1 - (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))) (\Phi_2^{(6)} - \beta + 1).$$

Die Funktion $\Phi := \Phi_3^{(6)}$ hat folgende Eigenschaften:

Beh. 4.10:

(i) Φ ist \mathcal{C}^∞ .

(ii) $\Phi|_{\{x \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \mid 0 < f_{(6)}(x) < \delta'_3\}} = \tilde{h} \circ \tilde{f}_{(6)} + \text{Konstante}$.

(iii) Für $v \in \{2, 3\}$ gilt:

Für alle $x \in S_v$ hat $L_x(\Phi)$ mindestens 5 positive Eigenwerte in

Richtung der Fasern von $p_v : S_v \rightarrow G_{2v,6}$.

Da $\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus G_{2,6} = S_2 \cup S_3$ ist und Φ für alle $x \in S_2 \cup S_3$ mindestens $5 = \dim(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)) - 10 + 1 = 14 - 10 + 1$ positive Eigenwerte auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6))$ hat, gilt:

Korollar 4.11:

$\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus G_{2,6}$ ist 10-vollständig.

Beweis der Beh.4.10:

(i) ist offensichtlich.

(ii) Für $f_{(6)}(x) < \delta'_3$ ist $a(\Lambda_2^{(6)})(x) < a' \Rightarrow (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) = 0$

$\Rightarrow \Phi(x) = \Phi_2^{(6)} - \beta + 1$ und da $\delta'_3 < \delta'_2$ folgt aus Beh.4.9 (iv):

$\Phi(x) = \tilde{h} \circ f_{(6)}(x) - \beta + 1 \Rightarrow \text{Beh.}$

(iii) 1.) $v = 2$:

$$S_2 \subset R_2 = \{x \mid x^3=0\} = \{x \mid a(\Lambda_2^{(6)})(x) = 0\}$$

$\Rightarrow \Phi|_{S_2} = \Phi_2^{(6)} - \beta + 1$. Mit Beh.4.9 (iii) folgt die Behauptung.

2.) $v = 3$:

$$S_3 = \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6) \setminus R_2$$

$$= \{[a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_5 \wedge a_6] \mid a_1, \dots, a_6 \text{ linear unabhängig}\}.$$

a.) Für $a(\Lambda_2^{(6)})(x) \geq b'$ ist $(\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) = 1$

$$\Rightarrow \Phi(x) = c' \cdot \psi_3^{(6)}(x).$$

Aus Bem.4.4 folgt die Behauptung, wobei sogar gilt:

$L_x(\Phi)$ ist positiv definit auf $T_x(\Lambda^2 \mathbb{C}^6)$.

b.) Sei $x \in \{x \mid 0 < a(\Lambda_2^{(6)})(x) < b'\}$, dann gilt :

$$\begin{aligned} L_x(\Phi)(v,v) &= (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) \cdot c' \cdot L_x(\psi_3^{(6)})(v,v) \\ &\quad + (1 - (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x)) \cdot L_x(\Phi_2^{(6)})(v,v) \\ &\quad + (c' \psi_3^{(6)}(x) - (\Phi_2^{(6)}(x) - \beta + 1)) (\rho_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) \\ &\quad \cdot L_x(a(\Lambda_2^{(6)}))(v,v) \end{aligned}$$

für $v \in \ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$.

Die Behauptung folgt aus den Eigenschaften der einzelnen Terme :

(i) $L_x(\psi_3^{(6)})$ ist positiv definit auf $T_x(\mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^6))$.

(ii) $L_x(\Phi_2^{(6)})$ ist positiv definit auf einem mindestens 5-dimensionalen Unterraum von $\ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$ für alle x mit $0 < a(\Lambda_2^{(6)})(x) < b'$ nach Wahl von b' .

(iii) Für $a' < a(\Lambda_2^{(6)})(x) \leq b'$ ist $(\rho'_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) > 0$ und $(c' \psi_3^{(6)}(x) - (\Phi_2^{(6)}(x) - \beta + 1)) < 0$,
für $0 < a(\Lambda_2^{(6)})(x) < b'$ ist $(\rho'_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)}))(x) = 0$
 $\Rightarrow (c' \psi_3^{(6)}(x) - (\Phi_2^{(6)}(x) - \beta + 1)) (\rho'_{a',b'} \circ a(\Lambda_2^{(6)})) \leq 0$.
Da $L_x(a(\Lambda_2^{(6)}))$ auf $\ker(\partial a(\Lambda_2^{(6)}))_x$ negativ definit ist (vergl.Kap.1.6), folgt die Behauptung.

□

Literaturverzeichnis

- [AG] Andreotti,A. / Grauert,H. :
Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.
Bull.Soc.math.France **90**, 193-259 (1962).
- [B] Bourbaki,N.:
Eléments de mathématique, Algèbre multilinéaire.
Paris (1958).
- [Ba1] Barth,W.:
Transplanting cohomology classes in complex projective space.
Am.J.Math. **92**, 951-967 (1970).
- [Ba2] Barth,W.:
Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-
projektiven Raum.
Math.Ann. **187**, 150-162 (1970).
- [BC] Bishop,R.L. / Crittenden,R.J.:
Geometry of Manifolds.
New York-London (1964).
- [BF] Buchner,M.A. / Fritzsche,K.:
The cohomological and analytic completeness of $\mathbb{P}(\Lambda^2\mathbb{C}^n) \setminus G_{2,n}$.
Math.Ann. **261**, 327-338 (1982).
- [BFS] Buchner,M.A. / Fritzsche,K. / Sakai,T.:
Geometry and cohomology of certain domains in the complex
projective space.
Journal f.d. reine und angewandte Math. **323** (1980).
- [Fr] Fritzsche,K.:
q-konvexe Restmengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten.
Math.Ann. **227**, 251-273 (1976).
- [G] Godbillon,C.:
Géométrie différentielle et mécanique analytique.
Hermann, Paris (1969).

- [GH] Griffiths,P. / Harris,J.:
Principles of algebraic geometry.
Wiley-Interscience, Canada (1978).
- [GW] Greene,R.E. / Wu,H.:
Embedding of open Riemannian Manifolds by harmonic functions.
Ann.Inst.Fourier, Grenoble **25**, 1, 215-235 (1975).
- [H] Hermann,R.:
Focal points of closed submanifolds of Riemannian spaces.
Indagationes Mathematicae **25** , 613-628 (1963).
- [HP] Hodge,W.V.D. / Pedoe,P.:
Methods of algebraic geometry II.
Cambridge (1952).
- [HR] Hopf,R. / Rinow,W.:
Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche.
Comment.Math.Helv. **3** , 209-225 (1931).
- [J] Jänich,K.:
Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten.
Lecture Notes in Math. **59**, Berlin-Heidelberg-New York (1968).
- [M] Marcus,M.:
Finite dimensional multilinear algebra, Part II.
Dekker, New York-Basel (1975).
- [N] Narasimhan,R.:
Analysis on real and complex Manifolds.
Paris-Amsterdam-New York (1973).