Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
6. Dezember 2019

Topologie I
Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, den 13.12. in der Vorlesung.
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei X ein CW-Komplex mit k n-Zellen und $H_\bullet$ eine gewöhnliche Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten. Dann ist $H_n(X) \cong \mathbb{Z}^k$ genau dann, wenn die Randabbildungen d_n und d_{n+1} im zellulären Komplex beide die Nullabbildung sind. *4 Punkte*

2. Sei $H_\bullet$ eine gewöhnliche Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten. Sei (X, A) ein CW-Paar, so dass alle Zellen von $X \setminus A$ Dimension $\geq n$ haben. Zeigen Sie, dass die von der Inklusion $A \subseteq X$ induzierte Abbildung $H_n^{\mathrm{CW}}(A) \to H_n^{\mathrm{CW}}(X)$ injektiv ist, und das Bild ein direkter Summand von $H_n^{\mathrm{CW}}(X)$ ist. *4 Punkte*

3. Sei X eine simpliziale Menge, R ein Ring. Leiten Sie aus den simplizialen Identitäten ab, dass der Kettenkomplex $C_\bullet(X, R)$ mit $C_n(X, R) = R[X_n]$ und der Randabbildung $d([\sigma]) = \sum_i (-1)^i d_i(\sigma)$ (Definition 4.2.1) ein Komplex ist. Zeigen Sie, dass die induzierten Abbildungen aus Definition 4.2.1 Homomorphismen sind, und kompatibel mit Komposition. *6 Punkte*

4. Sei $f_\bullet \colon A_\bullet \to B_\bullet$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen. Zeigen Sie, dass $(\ker f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(\operatorname{coker} f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit den jeweils von $A_\bullet$ bzw. $B_\bullet$ induzierten Randabbildungen Kettenkomplexe sind. *6 Punkte*