Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
15. November 2019

Topologie I
Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, den 22.11. in der Übungsgruppe.
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. (a) Wir realisieren S^1 als $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass der Grad der Abbildung $f_d \colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1 \colon z \mapsto z^d$ gleich d ist.

   (b) Wir bezeichnen mit $\Sigma^{n-1} f_d \colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$ die $n-1$-te Einhängung von f_d. Zeigen Sie $\deg\left(\Sigma^{n-1} f_d\right) = d$.

   (c) Folgern Sie, dass die Gradabbildung $\deg \colon [\mathrm{S}^n, \mathrm{S}^n] \to \mathbb{Z}$ surjektiv ist. Dabei bezeichnet $[\mathrm{S}^n, \mathrm{S}^n]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $f \colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n$.

   6 Punkte

2. Sei $f \colon \mathrm{S}^{2n} \to \mathrm{S}^{2n}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in \mathrm{S}^{2n}$ gibt, so dass $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$ gilt (f und $-f$ können nicht gleichzeitig fixpunktfrei sein). Folgern Sie, dass jede Abbildung $f \colon \mathbb{RP}^{2n} \to \mathbb{RP}^{2n}$ einen Fixpunkt hat. Geben Sie ein Beispiel für eine fixpunktfreie Abbildung $\mathbb{RP}^{2n-1} \to \mathbb{RP}^{2n-1}$ an (Hinweis: lineare Abbildungen ohne Eigenvektoren). *8 Punkte*

3. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung mit darstellender Matrix M_f. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung f_* auf $\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ genau

   - $\mathrm{id}_{\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ ist, wenn $\det M_f > 0$ ist, und
   - $-\mathrm{id}_{\widetilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ ist, wenn $\det M_f < 0$ ist.

   (Hinweis: Gauß-Algorithmus) *6 Punkte*