Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
8. November 2019

Topologie I
Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, den 15.11. in der Vorlesung.
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. (algebraische Mayer–Vietoris-Sequenz) Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "c_{k+1}"] & A_k \arrow[r, "a_k"] \arrow[d, "f_{A,k}"'] & B_k \arrow[r, "b_k"] \arrow[d, "f_{B,k}"'] & C_k \arrow[r, "c_k"] \arrow[d, "f_{C,k}"] & A_{k-1} \arrow[r, "a_{k-1}"] \arrow[d, "f_{A,k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "c'_{k+1}"'] & A'_k \arrow[r, "a'_k"'] & B'_k \arrow[r, "b'_k"'] & C'_k \arrow[r, "c'_k"'] & A'_{k-1} \arrow[r, "a'_{k-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sei $f_{C,k}\colon C_k \to C'_k$ ein Isomorphismus für alle k. Wir definieren $\Delta_k\colon B'_k \to A_{k-1}$ als $\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k$. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k},-a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k+f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \to \cdots$$

7 Punkte

2. (Einhängungsisomorphismus) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie mit der Mayer–Vietoris-Sequenz, dass es natürliche Isomorphismen für alle k gibt:

$$\widetilde{H}_k(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{H}_{k+1}(\Sigma X)$$

7 Punkte

3. Berechnen Sie induktiv mit der Mayer–Vietoris-Sequenz für endlich viele Punkte $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}^n$ die Homologie $\widetilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \ldots, p_m\})$. *7 Punkte*