Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
1. November 2019

Topologie I
Übungsblatt 4

Achtung: Wegen NRW-Topologietreffen am 8.11. wird die Vorlesung auf den Übungstermin (Mittwoch, 6.11., 12–14 Uhr, F.13.17) geschoben. Die Übungsgruppe findet dann am Freitag 10–12 Uhr in Hörsaal 6 statt.
Abgabe: Freitag, den 8.11. in der Übungsgruppe.
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei $0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$ eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen. Dann ist
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0.$$
4 Punkte

2. Seien I eine endliche Indexmenge und (X_α, x_α) punktierte topologische Räume so dass für jedes α der Punkt $x_\alpha \in X_\alpha$ Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in X_α ist. Wir bezeichnen mit $\bigvee_\alpha X_\alpha$ die Wedge-Summe. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildungen $X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ Isomorphismen für alle n induzieren:
$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \{x_\alpha\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha, \{x_\alpha\})$$
Benutzen Sie dafür nur Homotopieinvarianz und Ausschneidung, kein Wedge-Axiom bzw. Additivität. *5 Punkte*

3. Sei (X, A) ein Raumpaar wobei X ein topologischer Raum und A ein nichtleerer abgeschlossener Unterraum ist, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung U von A in X ist. Zeigen Sie (auch wieder mittels Homotopieinvarianz und Ausschneidung), dass die Quotientenabbildung $q\colon (X, A) \to (X/A, A/A)$ für alle n Isomorphismen induziert:
$$q_*\colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) \cong \widetilde{H}_n(X/A).$$
5 Punkte

4. Wir betrachten ein kommutatives Diagramm (von abelschen Gruppen) mit exakten Zeilen
$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r] & C & \end{tikzcd}$$
Dann existiert eine exakte Sequenz
$$\ker(f) \to \ker(g) \to \ker(h) \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}(f) \to \operatorname{coker}(g) \to \operatorname{coker}(h),$$
wobei $\partial(x) \in \ker h$ das eindeutige Urbild von $g(y)$ für ein gewähltes $y \in B'$ mit $p(y) = x$ ist. *6 Punkte*