

Topologie I Übungsblatt 3

Abgabe wegen des Feiertags (1.11.): am Montag, den 4. November 2019 bis 12:00 Uhr, Büro G.15.04 (Briefumschlag an der Tür).
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Finden Sie eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ der 2-Sphäre, so dass gilt

$$2 = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \cdot \# \left\{ J \subseteq I \mid \#J = i + 1 \text{ und } \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset \right\}.$$

Geben Sie den Čech-Komplex der Überdeckung an. Finden Sie eine endliche offene Überdeckung der 2-Sphäre, deren Čech-Komplex Δ^2 ist. 4 Punkte

2. Sei Δ die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen), mit den Randabbildungen $\delta^i: [n-1] \rightarrow [n]$ (Injektion, die i nicht trifft) und Ausartungsabbildungen $\sigma^i: [n-1] \rightarrow [n]$ (Surjektion, die i zweimal trifft). Zeigen Sie, dass jede Abbildung in Δ eine Komposition von Rand- und Ausartungsabbildungen ist. Beweisen Sie, dass diese Abbildungen die folgenden *kosimplizialen Identitäten* erfüllen:

$$\begin{aligned} \delta^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \delta^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \sigma^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^j &= \text{id} = \sigma^j \circ \delta^{j+1} \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^{i-1} \circ \sigma^j && \text{wenn } i > j + 1 \\ \sigma^j \circ \sigma^i &= \sigma^i \circ \sigma^{j+1} && \text{wenn } i \leq j \end{aligned}$$

6 Punkte

3. Welche abelschen Gruppen A passen in eine kurze exakte Sequenz der folgenden Form?

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

4 Punkte

4. Sei (X, A) ein CW-Paar, d.h. $A \subset X$ ist ein Unterkomplex. Dann ist $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$ ein Deformationsretrakt von $X \times [0, 1]$. (Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $(D^n, \partial D^n)$. Die Retraktionen für die n -Skelette werden dann wie im Beweis der lokalen Zusammenziehbarkeit von CW-Komplexen zusammengefasst.) 6 Punkte