Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
17. Dezember 2019

Topologie I
Übungsblatt 10

Abgabe: Freitag, den 10.1.2020 in der Vorlesung.
Achtung: Die Übungsgruppe am 8.1.2020 entfällt.

Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Sei (X, A, B) ein Tripel von topologischen Räumen, d.h., wir haben Inklusionen von Unterräumen $B \subseteq A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz von singulären Homologiegruppen gibt

$$\cdots \to \mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(A, B; R) \to \mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(X, B; R) \to \mathrm{H}_n^{\mathrm{sing}}(X, A; R) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_{n-1}^{\mathrm{sing}}(A, B; R) \to \cdots$$

4 Punkte

2. Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \cdots x_n \leq 1\}$ ein Simplex der Dimension n ist. Zeigen Sie, dass eine Triangulierung des Würfels $[0,1]^n$ durch einen Simplizialkomplexes existiert, der die Eckpunkte des Würfels als 0-Simplizes hat und dessen Zahl von n-Simplizes $n!$ ist. *4 Punkte*

3. Sei X ein topologischer Raum, und X_i, $i \in I$ eine Folge von Unterräumen von X, so dass $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ gilt und eine Menge $U \subset X$ genau dann offen in X ist, wenn für alle i der Durchschnitt $U \cap X_i$ offen in X_i ist. Dann haben wir für jeden Koeffizientenring R einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{H}_\bullet^{\mathrm{sing}}(X, R) \cong \operatorname*{colim}_i \mathrm{H}_\bullet^{\mathrm{sing}}(X_i, R),$$

d.h. Homologie vertauscht mit gerichteten Kolimiten. (Hinweis: Benutzen Sie die Kompaktheit der Standardsimplizes Δ^n.) *6 Punkte*

4. Sei G eine Gruppe. Wir betrachten den Kettenkomplex $(B_\bullet, \partial)$, der wie folgt gegeben ist:

   - B_n ist für $n \geq 0$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge $G^{\times(n+1)}$, die Erzeuger sind also geordnete $n+1$-Tupel von Elementen aus G.
   - Die Randabbildung $\partial \colon B_n \to B_{n-1}$ ist gegeben durch $\partial = \sum_i (-1)^i d_i$ mit $d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n)$; dabei bezeichnet $\widehat{g_i}$, dass das i-te Element g_i weggelassen wird.
   - Zusätzlich haben wir noch eine Kopie von $\mathbb{Z}$ im Grad -1, und die Augmentierungsabbildung $\partial_0 \colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \colon g \mapsto 1$.

   Zeigen Sie, dass der obige augmentierte Kettenkomplex für G azyklisch ist, d.h. $H_\bullet(B_\bullet, \partial) = 0$, indem Sie eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung konstruieren. *8 Punkte*