Bergische Universität Wuppertal
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Matthias Wendt, Viktor Tabakov

Wintersemester 2019/20
11. Oktober 2019

Topologie I
Übungsblatt 1

Abgabe: 18. Oktober 2019 in der Vorlesung
Begründen Sie Ihre Antworten (vollständig).

1. Zeigen Sie, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass die Komposition von Homotopieäquivalenzen eine Homotopieäquivalenz ist. *(2+2 Punkte)*

2. Zeigen Sie, dass ein Retrakt eines zusammenziehbaren Raums auch zusammenziehbar ist. *(4 Punkte)*

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ zusammenziehbar ist. (Zur Klarstellung: $\mathbb{R}^\infty$ soll ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von *abzählbar* unendlicher Dimension sein. Wir schreiben $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$, und eine Menge $U \subset \mathbb{R}^\infty$ ist offen, wenn $U \cap \mathbb{R}^n$ für alle n offen ist.) *(6 Punkte)*

4. Der Abbildungskegel einer Abbildung $f\colon X \to Y$ ist definiert als
$$C_f = (X \times [0,1] \sqcup Y)/\{(x_1, 0) \sim (x_2, 0), (x, 1) \sim f(x)\}.$$
Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^2$ homöomorph zum Abbildungskegel der Abbildung
$$\mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1 \colon z \mapsto z^2$$
ist, wobei $\mathrm{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
Hinweis: Vielleicht hilft es, sich die Konstruktion des Abbildungskegels hier als Verkleben einer Kreisscheibe und eines Möbiusbandes vorzustellen. *(6 Punkte)*

Präsenzaufgaben für die Übung am 16. Oktober 2019

1. Beweisen Sie die Eulersche Polyederformel: für einen zusammenhängenden planaren Graphen mit E Knoten, K Kanten und F Flächen gilt $E - K + F = 2$. (Dabei sind die Flächen des Graphen G die Zusammenhangskomponenten des Komplements von G.)

   (a) Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen konvexen Polyedern und planaren Graphen, über Projektion in die Ebene. (Gute Beispiele sind Tetraeder, Würfel und Oktaeder.)

   (b) Hinweis: Der Beweis kann durch Induktion geführt werden; jeder Graph kann induktiv aus dem einpunktigen Graphen konstruiert werden, indem eine neue Kante (eventuell mit freiem Ende) eingefügt wird.

   (c) Für E, K, F mit $E - K + F = 2$, konstruieren Sie einen ebenen Graphen mit E Knoten, K Kanten und F Flächen.

2. Die Eulersche Polyederformel kann wie folgt interpretiert werden: wenn wir die Kugeloberfläche in Polygone aufteilen, ist die alternierende Summe $E - K + F$ immer 2. Experimentieren Sie, was im Fall des 2-dimensionalen Torus passiert.

3. (*) Finden Sie die kleinste Zahl n, so dass der 2-dimensionale Torus durch n offene Teilmengen überdeckt werden kann, die homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind.