

**Skript zur Vorlesung
Topologie I
Wintersemester 2019/20**

Matthias Wendt

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Zell-Komplexe	5
2.1. Grundbegriffe	5
2.2. CW-Komplexe	8
Kapitel 3. Eilenberg–Steenrod-Axiome und Beispielrechnungen	11
3.1. Axiomatik	11
3.2. Anwendung: Brouwerscher Fixpunktsatz	15
3.3. Abbildungsgrad	18
3.4. Zelluläre Homologie	22
3.5. Euler-Charakteristik	28
Kapitel 4. Singuläre Homologie	31
4.1. Simplicialkomplexe und simpliciale Mengen	31
4.2. Definition und erste Konsequenzen	35
4.3. Homotopie-Invarianz	38
4.4. Ausschneidung	39
4.5. Anwendung: Topologie des \mathbb{R}^n	43
4.6. Transfer und Satz von Borsuk–Ulam	45
Anhang A. Grundlagen: Kategorientheorie und homologische Algebra	49
A.1. Kategorien und Funktoren	49
A.2. Exakte Sequenzen	51
A.3. Homologische Algebra	53
Literatur	57

KAPITEL 1

Einleitung

Algebraische Topologie untersucht topologische Räume mit algebraischen Mitteln. Die Grundidee ist, topologischen Räumen algebraische Invarianten zuzuordnen. Dies können Zahlen (wie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten oder die Eulercharakteristik) oder algebraische Strukturen (Homologiegruppen, Kohomologieringe) sein. Wenn homöomorphe oder homotopieäquivalente Räume isomorphe algebraische Invarianten haben (oder allgemeiner die Zuordnung von topologischen Räumen zu algebraischen Invarianten funktoriell ist), können wir Räume mit Hilfe ihrer algebraischen Invarianten unterscheiden. Gute Invarianten zeichnen sich dadurch aus, dass sie hinreichend leicht berechenbar sind (und damit viel von den Komplikationen topologischer Räume und stetiger Abbildungen vergessen), aber immer noch ein wenig der für das konkrete Problem relevanten Information beinhalten.

Ein gutes Beispiel für diese Situation, vielleicht der Anfangspunkt der algebraischen Topologie ist die Eulersche Polyederformel. Für ein konvexes Polyeder mit V Eckpunkten, E Kanten und F Seitenflächen haben wir immer $V - E + F = 2$. Die Antwort ist immer unabhängig von der konkreten Geometrie des Polyeders, wir vergessen also viel Information (zum Beispiel über die Anzahl oder Lage der Eckpunkte etc.). Auf der anderen Seite behalten wir immer noch einen Teil der Information: die Oberfläche des Polyeders ist homöomorph zur 2-dimensionalen Sphäre S^2 und die 2 in der Polyederformel ist die Eulercharakteristik von S^2 . Dadurch können wir insbesondere auch Triangulierungen des 2-Torus von Triangulierungen der Sphäre anhand der Euler-Charakteristik unterscheiden.

ÜBUNGSAUFGABE 1.0.1. Beweisen Sie die Eulersche Polyederformel: für einen zusammenhängenden planaren Graphen mit E Knoten, K Kanten und F Flächen gilt $E - K + F = 2$. (Dabei sind die Flächen des Graphen G die Zusammenhangskomponenten des Komplements von G .)

- (1) *Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen konvexen Polyedern und planaren Graphen, über Projektion in die Ebene. (Gute Beispiele sind Tetraeder, Würfel und Oktaeder.)*
- (2) *Hinweis: Der Beweis kann durch Induktion geführt werden; jeder Graph kann induktiv aus dem einpunktigen Graphen konstruiert werden, indem eine neue Kante (eventuell mit freiem Ende) eingefügt wird.*

ÜBUNGSAUFGABE 1.0.2. Die Eulersche Polyederformel kann wie folgt interpretiert werden: Wenn wir die Kugeloberfläche in Polygone aufteilen, ist die alternierende Summe $E - K + F$ immer 2. Experimentieren Sie, was im Fall des 2-dimensionalen Torus passiert.

ÜBUNGSAUFGABE 1.0.3. Finden Sie die kleinste Zahl n , so dass der 2-dimensionale Torus durch n offene Teilmengen überdeckt werden kann, die homöomorph zu \mathbb{R}^2 sind.

Diese Übersetzung von Topologie in Algebra hat verschiedenste Anwendungen, die in der Vorlesung auch teilweise diskutiert werden. Klassischere Anwendungen sind zum Beispiel

- (1) der Brouwersche Fixpunktsatz, der über Nashs Arbeiten zur Spieltheorie und das Nash-Gleichgewicht auch Eingang in die Wirtschaftswissenschaften gefunden hat,
- (2) das Sperner-Lemma, eine kombinatorische Aussage zur Färbung von Triangulierungen, das konkret auf Fragen der fairen Teilung angewendet werden kann,
- (3) der Satz vom Igel über die Nichtexistenz nullstellenfreier Vektorfelder auf der 2-Sphäre,
- (4) der Jordansche Kurvensatz sowie die Folgerungen zur Invarianz der Dimension als wesentliche Aussagen über die Topologie des \mathbb{R}^n .

Interessante topologische Räume tauchen überall auf und führen auch zu moderneren Anwendungen. Konfigurationsräume fassen die möglichen Positionen und Bewegungen von ebenen Gelenke oder Roboterarme als Punkte eines topologischen Raums auf, und Fragen nach der Bewegungsplanung für den Roboterarm lassen sich dann in Fragen der algebraischen Topologie übersetzen (Lusternik–Schnirelman-Kategorie und topologische Komplexität in der topologischen Robotik). Qualitative Struktur in hoch-dimensionalen Datensätzen kann ebenfalls mit Methoden der algebraischen Topologie untersucht werden (persistente Homologie) und erschließt völlig neue Möglichkeiten in Datenanalyse und Mustererkennung (topologische Datenanalyse).

Konkreter sollen in der Vorlesung Homologie und Kohomologie für topologische Räume definiert und untersucht werden. Die Grundidee dabei ist, dass wir uns hauptsächlich auf Räume konzentrieren, die aus einfachen Bestandteilen zusammengeklebt werden: CW-Komplexe werden zusammengesetzt aus Zellen, die homöomorph zu abgeschlossenen Einheitsbällen D^n sind, simpliziale Komplexe werden zusammengesetzt aus Simplizes Δ^n . Die Komplexität der so zusammengesetzten topologischen Räume entsteht hauptsächlich durch nicht-triviales Zusammenkleben dieser einfachen Bestandteile. Homologie übersetzt dann diese Verklebe-Information in Algebra, konkret als Matrizen, deren Einträge die Grade von Anklebeabbildungen sind. Auf diese Art erhalten wir Invarianten, die uns konkrete Information über die Zusammensetzung der topologischen Räume liefern und Rückschlüsse über die Struktur der betrachteten Räume zulassen. Mit dieser Information können wir dann in geeigneten Situation zum Beispiel die Existenz bestimmter topologischer Objekte oder Eigenschaften erzwingen oder ausschließen – manchmal erzwingt topologische Struktur die Existenz von Fixpunkten, manchmal verbietet topologische Struktur die Existenz von Gruppenwirkungen.

Die Tatsache, dass Homologie misst, wie einfache Bestandteile zu komplizierten Räumen zusammengeklebt werden, bedeutet auch, dass Homologie gut benutzt werden kann, um die Kompatibilität von lokalen Konstruktionen und deren Verklebung zu globalen Objekten zu verstehen. Für offene Teilmengen im \mathbb{R}^n können wir lokal immer Stammfunktionen finden, aber die globale Topologie einer offenen Teilmenge im \mathbb{R}^n erlaubt nicht immer, diese Stammfunktion global zu definieren (Satz von Stokes). Zum Beispiel hängt die Existenz einer 1-Form auf S^1 , die nicht Differential einer Funktion ist, mit der nicht-trivialen Topologie von S^1 zusammen (siehe de Rham-Kohomologie in Analysis auf Mannigfaltigkeiten). Ein gutes Beispiel, wie Kohomologie diesen Unterschied zwischen lokal möglichen aber global unmöglichen Konstruktionen zu verstehen, ist das Penrose-Dreieck. Jede Ecke des Dreiecks kann separat als dreidimensionales Objekt realisiert werden, aber alle drei Ecken zusammengekommen ergeben eine unmögliche Figur. Die Erklärung benutzt auch hier

wieder Kohomologieklassen auf S^1 , die auf der Unbestimmtheit der Entfernung einer dreidimensionalen Realisierung vom Auge basieren. In einem wiederum völlig anderen Kontext tauchen Kohomologie-Kozykel auf S^1 im Condorcet-Paradox auf: im Allgemeinen gibt es keine Möglichkeit, lokal kompatible Präferenzen verschiedener Personen zu einer globalen Präferenzordnung zusammenzufassen. Hier ist der einfachste Fall von drei Wahlalternativen und drei Präferenzordnungen $A > B > C$, $B > C > A$ und $C > A > B$.

Dies ist der grobe Umriss dessen, was in der Vorlesung behandelt werden soll. Die Kapitel der Vorlesung folgen diesem Aufbau. Zuerst diskutieren wir in Kapitel 2 die relevanten Räume, die für die Vorlesung eine Rolle spielen werden, CW-Komplexe und Simplicialkomplexe. Außerdem umfasst dieses Kapitel eine kurze Wiederholung der topologischen Grundlagen, sowie eine Reihe relevanter Beispiele von Räumen, die in der Vorlesung immer wieder auftauchen werden, bzw. die für verschiedene Anwendungen relevant sind. Im Kapitel 3 werden die Eilenberg–Steenrod-Axiome für Homologietheorien formuliert und die ersten Konsequenzen gezogen. In der Praxis wird Kohomologietheorie meist axiomatisch (auch gern als black box) benutzt, in Form der Homotopieinvarianz und des Ausschneidungsaxioms, und die konkrete Definition bestimmter Homologietheorien (simplicialer oder singulärer Homologie) spielt nur selten eine essentielle Rolle. Aus diesem Grund erscheint die Betonung der axiomatischen Aspekte sinnvoll, und erlaubt außerdem relativ früh in der Vorlesung relevante Beispiele zu diskutieren.

Kapitel 4: simpliciale und singuläre Homologie, Beweis Eilenberg–Steenrod-Axiome, Anwendung Jordan und Borsuk–Ulam

Kapitel ??: Kohomologie, Cup-Produkt, Künneth-Formel, universelle Koeffizienten, Orientierung und Poincaré-Dualität.

Ein paar Grundlagen aus der Kategorientheorie, sowie für die Vorlesung relevante Teile der homologischen Algebra, sind im Anhang A zusammengefasst.

Disclaimer: Wie üblich bei Vorlesungsmitschriften beruht nichts im folgenden Skript auf eigenen wissenschaftlichen Leistungen, Einsichten oder Ergebnissen. Sowohl Definitionen als auch Formulierungen und Beweise für Sätze sind meist das Produkt von ursprünglich vage formulierten Ideen, die durch vielfache Umformulierungen und Kontextveränderungen über Jahrzehnte zu den heute verwendeten Konzepten herangewachsen sind. Insofern können konkrete Zuschreibungen von Fragestellungen, Begriffen, Sätzen oder Beweistechniken üblicherweise nicht vorgenommen werden. (Außerdem stellt sich überraschend oft heraus, dass die üblicherweise mit Sätzen oder Begriffen verknüpften Namen nicht unbedingt die zentralen Entwicklungen des Begriffs reflektieren.)

Das Material des Vorlesungsskripts beruht überwiegend auf gängigen Lehrbüchern zur algebraischen Topologie und homologischen Algebra. Hauptsächlich verwendet wurden die Bücher von Hatcher [Hat02], Weibel [Wei94] sowie Ghrist [Ghr14], weitere Orientierung boten Vorlesungsskripten von Clara Löh und Christian Bär. Die einzige Eigenleistung beschränkt sich daher auf Tipp-, Index-, Logik- und andere Fehler, fragwürdige Anordnung des Materials sowie falsche Schwerpunktsetzungen. (Vermutlich sind allerdings viele meiner Fehler auch von anderen Leuten bereits gemacht worden; damit kann ich leben.)

Vielen Dank an Sean Tilson für den Vorschlag, die Eilenberg–Steenrod-Axiome als zentrales Rechenwerkzeug an den Anfang der Vorlesung zu stellen sowie an Herrn Jochen Herzhoff für viele hilfreiche Korrekturhinweise.

KAPITEL 2

Zell-Komplexe

In der algebraischen Topologie geht es hauptsächlich um topologische Räume, die aus einfachen Bestandteilen zusammengebaut werden. Interessante Topologie kommt dadurch zustande, wie die einfachen Bestandteile zusammengesetzt werden. In späteren Abschnitten werden wir sehen, wie Homologie genau dieses nicht-triviale Zusammensetzen einfacher Bausteine quantifizieren kann.

In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Konzepte kennenlernen, was einfache Bausteine sein können, und wie Räume zusammengeklebt werden können. Die wichtigsten Räume in der algebraischen Topologie sind die *CW-Komplexe*, die aus Zellen zusammengeklebt werden, die homöomorph zu D^n sind. Eher kombinatorische Konzepte sind die simplizialen Komplexe, die sehr kombinatorisch als Teilmengensysteme aufgefasst oder geometrisch realisiert aus Simplizes zusammengebaut werden können. Der Vollständigkeit halber werden wir auch noch die Δ -Komplexe (semi-simpliziale Komplexe) definieren, die in Hatcher's Buch [Hat02] eine wichtige Rolle spielen.

Das Ziel des Kapitels ist die wichtigsten Definitionen und Konstruktionen kennenzulernen, und gleichzeitig ein paar interessante Beispiele von Räumen zu sehen, die für spätere Anwendungen eine Rolle spielen werden.

2.1. Grundbegriffe

DEFINITION 2.1.1. *Ein topologischer Raum ist ein Paar (X, \mathcal{O}) bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X , den sogenannten offenen Mengen, so dass*

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
- (2) für eine Menge $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. Vereinigungen von beliebig vielen offenen Mengen sind wieder offen,
- (3) für $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$, d.h. endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Die Mengen der Form $X \setminus U$ für $U \in \mathcal{O}$ heißen abgeschlossene Mengen. Für einen Punkt $x \in X$ heißen die offenen Mengen $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$ offene Umgebungen von x .

DEFINITION 2.1.2 (Unterraum). *Sei $(X, \mathcal{O}(X))$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X . Dann definiert $\mathcal{O}(Y) = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$ eine Topologie auf Y , und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ heißt Unterraum von X . Wenn $Y \in \mathcal{O}(X)$ ist, spricht man von offenem Unterraum, wenn $X \setminus Y \in \mathcal{O}(X)$ von abgeschlossenem Unterraum.*

DEFINITION 2.1.3 (stetige Abbildung). *Seien $(X, \mathcal{O}(X))$ und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ (von Mengen) heißt stetige Abbildung, wenn für alle offenen Mengen $U \in \mathcal{O}(Y)$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$.*

DEFINITION 2.1.4. *Für topologische Räume X, Y ist die Produkttopologie auf $X \times Y$ erzeugt durch die Menge*

$$\{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

der “offenen Rechtecken” gegeben ist, d.h. eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Vereinigung von offenen Rechtecken ist. Alternativ ist eine Menge $U \subseteq X \times Y$ genau dann offen, wenn jeder Punkt $x \in U$ in einem offenen Rechteck enthalten ist, das selbst ganz in U enthalten ist.

DEFINITION 2.1.5 (Quotiententopologie). Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen $[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$ wird mit X/\sim bezeichnet und heißt Quotientenraum; wir haben eine natürliche surjektive Abbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim: x \mapsto [x]$. Auf X/\sim wird eine Topologie, die Quotiententopologie, dadurch definiert, dass eine Menge $U \subset X/\sim$ offen ist genau dann, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen ist.

Ein relevanter Spezialfall: für einen Unterraum $Z \subseteq X$ können wir die Äquivalenzrelation betrachten, für die die Äquivalenzklassen durch Z und die einelementigen Mengen $\{x\}$ für $x \in X \setminus Z$ gegeben sind.

DEFINITION 2.1.6. Eine Homotopie $H: f \sim g$ zwischen zwei stetigen Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ ist eine stetige Abbildung $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, so dass $H|_{X \times \{0\}} = f$ und $H|_{X \times \{1\}} = g$.

Sei $i: Z \subset X$ ein Unterraum. Eine Homotopie relativ zu Z zwischen zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$ mit $f|_Z = g|_Z$ ist eine Homotopie $H: f \sim g$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H|_{Z \times [0, 1]}} & Y \\ & \searrow \text{pr}_1 & \nearrow f|_Z = g|_Z \\ & & Z \end{array}$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.7. Zeigen Sie, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass die Komposition von Homotopieäquivalenzen eine Homotopieäquivalenz ist.

BEISPIEL 2.1.8. Einfache Beispiele sind Wege $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ für den Fall $X = \{*\}$. In der Analysis-Vorlesung kommen Homotopien zwischen Wegen (meist in offenen Gebieten im \mathbb{R}^n) vor, wenn die Homotopieinvarianz der Wegintegrale diskutiert wird. \square

DEFINITION 2.1.9. Ein topologischer Raum X heißt wegzusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ existiert, für die $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gilt.

DEFINITION 2.1.10. Ein topologischer Raum X heißt zusammenziehbar, wenn es eine Homotopie $H: \text{id}_X \sim p$ gibt, wobei $p: X \rightarrow X$ für einen Punkt $p \in X$ die Abbildung $p(x) = p$ ist.

DEFINITION 2.1.11. Sei X ein topologischer Raum und $i: Z \subset X$ ein Unterraum.

- (1) Eine Retraktion ist eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow Z$, so dass $r \circ i = \text{id}_Z$ ist. In diesem Fall heißt Z Retrakt von X .
- (2) Eine Deformationsretraktion ist eine stetige Abbildung $r: X \times [0, 1] \rightarrow X$, so dass $r|_{X \times \{0\}} = \text{id}_X$, $r|_{Z \times [0, 1]} = i \circ \text{pr}_1$ und $r|_{X \times \{1\}}$ eine Retraktion ist.

BEMERKUNG 2.1.12. Anders gesagt, eine Deformationsretraktion ist eine Homotopie relativ zu Z zwischen der Identität und einer Retraktion H .

Die Definition ist in der Literatur nicht einheitlich: manchmal wird für Deformationsretrakt nur eine Homotopie zwischen der Identität und einer Retraktion gefordert, und die Zusatzeigenschaft der Homotopie rel Z als starker Deformationsretrakt bezeichnet. Wir folgen Hatcher.

Deformationsretrakte sind insbesondere zusammenziehbar. Die Umkehrung (zusammenziehbare Räume deformationsretrahieren auf einen Punkt) gilt für die schwache Variante, aber nicht für die starke. Beispiele gibt es in Übungsaufgaben in [Hat02, Kapitel 0].

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.13. Zeigen Sie, dass ein Retrakt eines zusammenziehbaren Raums auch zusammenziehbar ist.

BEISPIEL 2.1.14. Standardbeispiele für topologische Räume sind

- die n -dimensionale Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$
- die n -dimensionale Kreisscheibe $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$
- der n -dimensionale reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n = S^n / \{x \sim -x, x \in S^n\} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \{x \sim \lambda x, x \in S^n, \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$
- der n -Torus $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \cong (S^1)^{\times n}$

□

BEMERKUNG 2.1.15. Viele interessante Beispiele für topologische Räume kommen aus der Differentialgeometrie oder Differentialtopologie. Eine Mannigfaltigkeit ist ein hausdorffscher zweitabzählbarer topologischer Raum, der lokal homöomorph zu einem \mathbb{R}^n ist. Solche Räume werden in der Vorlesung "Analysis auf Mannigfaltigkeiten" diskutiert. Für den Stoff der Topologie-Vorlesung sind Mannigfaltigkeiten nicht zentral, sie werden aber immer mal wieder in Beispielen erwähnt werden.

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.16. (*) Finden Sie die kleinste Zahl n , so dass der 2-dimensionale Torus durch n offene Teilmengen überdeckt werden kann, die homöomorph zu \mathbb{R}^2 sind.

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.17. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$ zusammenziehbar ist. (Zur Klarstellung: \mathbb{R}^∞ soll ein \mathbb{R} -Vektorraum von abzählbar unendlicher Dimension sein. Wir schreiben $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$, und eine Menge $U \subset \mathbb{R}^\infty$ ist offen, wenn $U \cap \mathbb{R}^n$ für alle n offen ist.)

DEFINITION 2.1.18. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

- Der Abbildungszylinder von f ist der Quotient

$$M_f = (X \times [0, 1] \sqcup Y) / \{(x, 1) \sim f(x)\}.$$

- Der Abbildungskegel einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als

$$C_f = (X \times [0, 1] \sqcup Y) / \{(x_1, 0) \sim (x_2, 0), (x, 1) \sim f(x)\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.19. Sei $f: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^2$, wobei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

- (1) Zeigen Sie, dass der Abbildungszylinder von f homöomorph zum Möbiusband ist.
- (2) Zeigen Sie, dass der Abbildungskegel von f homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ ist.

BEISPIEL 2.1.20. Für einen topologischen Raum ist der Konfigurationsraum von n angeordneten Punkten in X gegeben durch

$$\text{Conf}_n(X) = X^n \setminus \{\exists i \neq j : x_i = x_j\}$$

Für \mathbb{R}^m ist dies das Komplement eines Arrangements von Hyperebenen. Der Konfigurationsraum von n ungeordneten Punkten ist dann $\text{Conf}_n(X) / \Sigma_n$, wobei die symmetrische Gruppe Σ_n auf $\text{Conf}_n(X)$ durch Permutation der n Punkte. □

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.21. Zeigen Sie, dass $\text{Conf}_2(\mathbb{R}^n)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^{n+1} \times S^{n-1}$ ist.

2.2. CW-Komplexe

DEFINITION 2.2.1. Ein CW-Komplex ist ein topologischer Raum X , der induktiv aus n -dimensionalen Zellen wie folgt konstruiert werden kann:

- (1) Sei $X^{(0)}$ eine diskrete Menge von 0-Zellen.
- (2) Gegeben das $n-1$ -Skelett $X^{(n-1)}$, erhalten wir das n -Skelett $X^{(n)}$ durch Ankleben von n -Zellen. Das Ankleben einer n -Zelle D^n an $X^{(n-1)}$ entlang einer Abbildung $\phi: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{(n-1)}$ ist durch den folgenden Quotientenraum gegeben:

$$X^{(n-1)} \sqcup_{\phi} D^n / \{x \sim \phi(x), x \in \partial D^n\}$$

Für eine Familie D_{α}^n , $\alpha \in I$, von Zellen und gegebenen Anklebeabbildungen $\phi_{\alpha}: \partial D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n-1)}$ setzen wir also $X^{(n)} = X^{(n-1)} \sqcup_{\phi_{\alpha}} D_{\alpha}^n$.

- (3) $X = \bigcup_n X^{(n)}$ trägt die schwache Topologie, d.h. eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $U \cap X^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ offen ist.

BEMERKUNG 2.2.2. Ein CW-Komplex X mit endlich vielen Zellen heißt endlich. Wenn es ein n gibt, so dass $X = X^{(n)}$, dann heißt X endlich-dimensional.

Für eine n -Zelle heißt die Komposition $D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n-1)} \sqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n)} \hookrightarrow X$ charakteristische Abbildung.

BEISPIEL 2.2.3. Eine kompakte orientierte Fläche von Geschlecht g kann aus einem $4g$ -Eck durch Randidentifikationen konstruiert werden. Dafür werden die Kanten mit $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ durchmarkiert. Dann identifizieren wir die Kanten a_i und a_i^{-1} durch einen Homöomorphismus, der die Kante a_i im positiven Drehsinn und die Kante a_i^{-1} im negativen Drehsinn durchläuft; analog für b_i und b_i^{-1} . Das Ergebnis ist eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle, $2g$ 1-Zellen und einer 2-Zelle. \square

BEISPIEL 2.2.4. Die n -dimensionale Sphäre hat eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle und einer n -Zelle. \square

BEISPIEL 2.2.5. Der n -dimensionale reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ hat eine CW-Struktur mit jeweils einer i -Zelle für $i \in [0, n]$. Induktiv nehmen wir an, dass $\mathbb{R}P^{n-1}$ eine CW-Struktur der behaupteten Form besitzt. Nach Definition $\mathbb{R}P^n = S^n / \{x \sim -x\}$, so dass $\mathbb{R}P^n$ als Quotient einer Hemisphäre D^n geschrieben werden kann, bei der auf dem Äquator S^{n-1} die Antipodenpunkte $x, -x$ identifiziert werden. Da $S^{n-1} / \{x \sim -x\} = \mathbb{R}P^{n-1}$, erhalten wir die CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ durch Ankleben einer n -Zelle an $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Der n -dimensionale komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^{\times}$ hat eine CW-Struktur mit jeweils einer $2i$ -Zelle für $i \in [0, n]$. Analog zum reellen Fall kann die CW-Struktur von $\mathbb{C}P^n$ induktiv konstruiert werden, indem an $\mathbb{C}P^{n-1}$ eine $2n$ -Zelle angeklebt wird; die Anklebeabbildung ist dabei die Komposition $S^{2n-1} = \partial D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ der Einbettung $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ als Einheitssphäre (bzgl. des hermiteschen Skalarprodukts) und der kanonischen Projektion $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{C}^{\times}$. \square

BEISPIEL 2.2.6. Jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit hat die Struktur eines endlichen CW-Komplexes. Dies folgt aus Morse-Theorie (Gradientenfluss für Morse-Funktionen liefert die Zellzerlegung). Vielleicht werden wir die diskrete Variante für Simplicialkomplexe im Verlauf des Semesters in der Vorlesung sehen. \square

DEFINITION 2.2.7. Ein Unterkomplex eines CW-Komplexes X ist ein abgeschlossener Unterraum $A \subseteq X$, der eine Vereinigung von Zellen ist. Der Unterkomplex A trägt eine induzierte CW-Struktur von X . Ein Paar (X, A) bestehend aus einem CW-Komplex X und einem Unterkomplex $A \subseteq X$ heißt CW-Paar.

DEFINITION 2.2.8. Für CW-Komplexe X und Y hat das Produkt $X \times Y$ eine CW-Struktur, deren Zellen die Produkte der Zellen von X und Y sind. Wenn X oder Y endlich sind, oder beide höchstens abzählbar viele Zellen haben, stimmt die CW-Topologie mit der Produkttopologie überein.

DEFINITION 2.2.9. Für ein CW-Paar (X, A) trägt der Quotientenraum X/A eine natürliche CW-Struktur, deren Zellen die Zellen von $X \setminus A$ sind, zuzüglich einer neuen 0-Zelle, die A ersetzt. Die Anklebeabbildungen für X/A sind durch die Komposition $S^{n-1} = \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)}/A^{(n-1)}$ gegeben.

Ein Beispiel ist $D^n/\partial D^n = S^n$.

DEFINITION 2.2.10. Die (unreduzierte) Suspension/Einhängung ΣX von X erhalten wir aus $X \times [0, 1]$, indem $X \times \{0\}$ und $X \times \{1\}$ jeweils zu einem Punkt zusammengezogen werden. Alternativ ist der Kegel $C(X) = (X \times [0, 1])/(X \times \{1\})$ über X der Abbildungskegel für $X \rightarrow \{*\}$, und die Einhängung ergibt sich durch Zusammenkleben zweier Kegel über X entlang X .

Ein Beispiel ist $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$.

DEFINITION 2.2.11. Für topologische Räume X_i , $i \in I$ mit ausgezeichneten Basispunkten $x_i \in X_i$ ist die Wedge-Summe/Bouquet

$$\bigvee_{i \in I} X_i = \left(\bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / \{x_i \sim x_j \forall i, j \in I\}.$$

Für einen CW-Komplex ist $X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong \bigvee_\alpha S^n$.

PROPOSITION 2.2.12. Sei X ein CW-Komplex:

- (1) X ist normal, d.h. für je zwei abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es offene Umgebungen $U \supset A$ und $V \supset B$ mit $U \cap V = \emptyset$.
- (2) X ist lokal zusammenziehbar, d.h. für jeden Punkt x und jede offene Umgebung U von x gibt es eine offene Umgebung $x \in V \subseteq U$, die zusammenziehbar ist.

BEWEIS. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ und eine Abbildung ϵ von der Menge der Zellen nach $\mathbb{R}_{>0}$ können wir eine offene Umgebung $N_\epsilon(A)$ durch Rekursion über n -Skelette wie folgt konstruieren. Der Anfang ist $N_\epsilon^{(0)}(A) = A \cap X^{(0)}$. Für den Rekursionsschritt nehmen wir an, dass wir bereits eine offene Umgebung $N_\epsilon^{(n)}(A)$ von A in X^n konstruiert haben. Um $N_\epsilon^{(n+1)}(A)$ zu konstruieren reicht es, für jede charakteristische Abbildung $\Phi_\alpha: D_\alpha^{n+1} \rightarrow X$ die offene Menge $\Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n+1)}(A)) \subseteq D_\alpha^{n+1}$ anzugeben. Wir definieren $\Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n+1)}(A))$ als Vereinigung einer offenen ϵ -Umgebung von $\Phi_\alpha^{-1}(A) \setminus \partial D_\alpha^{n+1}$ in $D_\alpha^{n+1} \setminus \partial D_\alpha^{n+1}$ und dem Produkt $(1 - \epsilon, 1] \times \Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n)}(A))$ für sphärische Koordinaten $(r, \theta) \in D_\alpha^{n+1} \setminus \{0\} \cong (0, 1] \times \partial D_\alpha^{n+1}$. Die gewünschte offene Umgebung ist $N_\epsilon(A) = \bigcup_n N_\epsilon^{(n)}(A)$.

In dieser Konstruktion können für abgeschlossene Teilmengen $A, B \subseteq X$ die relevanten ϵ so gewählt werden, dass $N_\epsilon^{(n)}(A)$ und $N_\epsilon^{(n)}(B)$ disjunkt sind (wesentlicher Grund ist hier die Normalität bzw. Kompaktheit von D^n). Dies zeigt die Normalität.

Für einen Punkt $x \in X$ und eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x können wir für genügend kleine ϵ ein $N_\epsilon(x) \subseteq U$ finden. Es bleibt noch zu zeigen, dass $N_\epsilon(x)$ zusammenziehbar ist. Für $x \in X^{(m)} \setminus X^{(m-1)}$ und $n > m$ können wir $N_\epsilon^{(n)}(x)$ auf $N_\epsilon^{(n-1)}(x)$ radial auf den Rand der n -Zelle retrahieren. Diese Deformationsretraktionen können wir zusammenfassen: $N_\epsilon(x)$ wird auf $N_\epsilon^{(m)}(x)$ retrahiert, indem im Zeitintervall $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ die Retraktion von $N_\epsilon^{(n)}(x)$ auf $N_\epsilon^{(n-1)}(x)$ durchgeführt

wird. Nach Voraussetzung $x \in X^{(m)} \setminus X^{(m-1)}$ ist $N_\epsilon^{(m)}(x)$ einfach ein ϵ -Ball um x in einer m -Zelle und kann auf den Punkt x zusammengezogen werden. \square

ÜBUNGSAUFGABE 2.2.13. *Sei (X, A) ein CW-Paar, d.h. $A \subset X$ ist ein Unterkomplex. Dann ist $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$ ein Deformationsretrakt von $X \times [0, 1]$. (Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall $(D^n, \partial D^n)$. Die Retraktionen für die n -Skelette werden dann wie im Beweis der lokalen Zusammenziehbarkeit von CW-Komplexen zusammengefasst.)*

Eilenberg–Steenrod-Axiome und Beispielrechnungen

Im Kapitel zu Zellkomplexen haben wir Räume (CW-Komplexe, Simplicialkomplexe, etc.) betrachtet, die aus einfachen Bausteinen zusammengesetzt werden. Homologie übersetzt nun die Information in den Anklebeabbildungen der Zellen bzw. Simplizes in algebraische Beschreibungen. Die grundlegenden Eigenschaften einer Homologietheorie werden durch die Eilenberg–Steenrod-Axiome formuliert. Wir wollen Invarianten, die sich unter Homotopieäquivalenz nicht ändern, das führt zum *Axiom der Homotopieinvarianz*. Ausserdem wollen wir die Invarianten berechnen können; dafür ist es praktisch, wenn sich Zerlegungen eines topologischen Raums (z.B. in Form von Überdeckungen) auch in Beschreibungen der Homologie übersetzen lassen, ähnlich dem Inklusions-Exklusions-Prinzip aus der Kombinatorik. Dies führt zu *langen exakten Sequenzen* und dem *Ausschneidungsaxiom*. Wenn wir mit unendlichen Komplexen umgehen müssen, brauchen wir auch noch eine Form der Stetigkeit, die uns erlaubt, Aussagen z.B. auf endliche Komplexe zurückzuführen, dies führt zum *Wedge-* oder *Additivitäts-Axiom*.

Homotopieinvarianz und Ausschneidung sind ganz allgemein die definierenden Kennzeichen von Homologietheorien. Beispielsweise gibt es auch in der algebraischen Geometrie Homologietheorien für algebraische Varietäten. Auch wenn in diesen Theorien Homotopieinvarianz und Ausschneidung anders formuliert werden, bilden sie dort ebenfalls die charakteristischen Eigenschaften und zentralen Berechnungsmethoden.

Im folgenden Kapitel werden wir die Eilenberg–Steenrod-Axiome formulieren und bereits ein paar beispielhafte Anwendungen betrachten. Viele Berechnungen von Homologie können direkt aus den Axiomen abgeleitet werden, ohne konkretes Wissen über die Definition einer speziellen Homologietheorie. Tatsächlich sind alle gewöhnlichen Homologietheorien auf CW-Komplexen äquivalent, was wir auch aus den Axiomen ableiten werden.

3.1. Axiomatik

Für die Formulierung der Axiome für Homologietheorien gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl; wir können Basispunkte ignorieren (unreduziert) oder mit einbeziehen (reduziert), wir können topologische Räume (absolut) oder Raumpaare (relativ) betrachten, wir können allgemein topologische Räume betrachten oder uns auf CW-Komplexe einschränken. Entsprechend viele Varianten der Axiome gibt es.

Homologietheorien werden immer als Funktoren von einer Kategorie topologischer Räume in eine Kategorie algebraischer Strukturen definiert. Eine kurze Diskussion der relevanten Grundlagen aus der Kategorientheorie ist in Anhang A.1 zu finden.

DEFINITION 3.1.1. *Eine (unreduzierte) Homologietheorie ist*

- eine Sequenz von Funktoren $H_n: \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{Ab}$, $n \in \mathbb{Z}$, von der Kategorie der Raumpaare mit stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen,
- zusammen mit einer Sequenz natürlicher Transformationen, den Randabbildungen

$$\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset),$$

d.h. für eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A, \emptyset) \\ H_n(f) \downarrow & & \downarrow H_n(f) \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B, \emptyset) \end{array}$$

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Homotopieinvarianz: Wenn $f \sim g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$, dann $H_n(f) = H_n(g): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$. Hierbei ist eine Homotopie $H: f \sim g$ eine Abbildung $H: (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren, so dass $H|_{(X \times \{0\}, A \times \{0\})} = f$ und $H|_{(X \times \{1\}, A \times \{1\})} = g$.

lange exakte Sequenz: Für ein Raumpaar (X, A) haben wir die folgende lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow \cdots$$

Dabei sind $i: (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$ und $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ die entsprechenden Inklusionen von Raumpaaren.

Ausschneidung: Für jedes Raumpaar (X, A) und einen Unterraum $B \subset A$ mit $\bar{B} \subset \overset{\circ}{A}$ gibt es natürliche Isomorphismen

$$H_n(X \setminus B, A \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

Additivität: Für eine beliebige Indexmenge I und Raumpaare (X_α, \emptyset) , $\alpha \in I$ induzieren die Inklusionsabbildungen $X_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ Isomorphismen für alle n

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \emptyset) \xrightarrow{\cong} H_n\left(\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \emptyset\right).$$

BEMERKUNG 3.1.2. Für eine stetige Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ wird die induzierte Abbildung $H_n(f): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ fast immer als f_* bezeichnet. Für einen topologischen Raum erhalten wir absolute Homologiegruppen $H_n(X) := H_n(X, \emptyset)$. Die Homologie für Raumpaare wird auch relative Homologie genannt.

BEMERKUNG 3.1.3. Für den einpunktigen Raum $\{*\}$, auch mit pt bezeichnet, ist $H_\bullet(\text{pt})$ eine graduierte abelsche Gruppe. Diese Gruppe nennt man die Koeffizienten der Homologietheorie.

Wir können noch eine Zusatzforderung stellen. Das Dimensionsaxiom fordert, dass die Koeffizienten möglichst einfach sind, nämlich $H_0(\text{pt}) = A$ für eine abelsche Gruppe A und $H_i(\text{pt}) = 0$ sonst. Eine solche Homologietheorie heißt gewöhnliche Homologietheorie, andere Homologietheorien heißen außergewöhnlich. Wir werden in Korollar 3.4.9 (fast) sehen, dass alle gewöhnlichen Homologietheorien isomorph sind.

Außergewöhnliche Homologietheorien spielen auch eine wichtige Rolle in der algebraischen Topologie sowie ihrer Verbindung zu Geometrie und Differentialtopologie. Wichtige Beispiele sind topologische K -Theorie und Kobordismus.

LEMMA 3.1.4. (1) Für ein Raumpaar (X, A) , für das die Inklusion $i: A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist, gilt $H_k(X, A) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Für eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ so dass $f: X \rightarrow Y$ und $f|_A: A \rightarrow B$ Homotopieäquivalenzen sind, ist

$$f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$$

ein Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. (1) folgt aus der langen exakten Sequenz

$$H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X),$$

da unter der Annahme die Abbildungen $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$ Isomorphismen sind.

(2) folgt aus dem 5-Lemma, cf. A.2.6

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y, B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y) \end{array}$$

□

LEMMA 3.1.5. Sei (X, x) ein punktierter Raum. Die Inklusion $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, \{x\})$ induziert natürliche Isomorphismen

$$H_k(X) \cong H_k(\{x\}) \oplus H_k(X, \{x\})$$

BEWEIS. Die Abbildung $p: X \rightarrow \{x\}$ ist eine Retraktion zur Inklusion $i: \{x\} \rightarrow X$. Insbesondere spaltet $p_*: H_k(X) \rightarrow H_k(\{x\})$ die Abbildung $i_*: H_k(\{x\}) \rightarrow H_k(X)$. Dadurch zerfällt die lange exakte Sequenz

$$H_k(\{x\}) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, \{x\}) \rightarrow H_{k-1}(\{x\}) \rightarrow H_{k-1}(X)$$

in spaltende kurze exakte Sequenzen wie behauptet, cf. Lemma A.2.3. □

Für eine Homologietheorie H_n können wir die reduzierte Homologie definieren

$$\tilde{H}_n(X) := \ker(H_n(X) \rightarrow H_n(\text{pt})).$$

Für einen Basispunkt $x \in X$ ist die Komposition $\tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, \{x\})$ ein Isomorphismus. Die Eilenberg–Steenrod-Axiome für H_n übersetzen sich in Axiome für die reduzierte Homologie:

DEFINITION 3.1.6. Eine reduzierte Homologietheorie ist eine Sequenz von Funktoren $\tilde{H}_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $n \in \mathbb{Z}$, von der Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Homotopieinvarianz: Wenn $f \sim g: X \rightarrow Y$, dann $\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(g): \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$.

Ausschneidungssequenz: Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in X ist (z.B. ein CW-Paar (X, A)). Dann existieren Randabbildungen

$$\partial_n: \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A)$$

und eine lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\tilde{H}_n(i)} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\tilde{H}_n(q)} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Die Randabbildungen sind natürlich, d.h. für eine Abbildung $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Paaren mit induzierter Quotientenabbildung $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(A) \\ \tilde{H}_n(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \tilde{H}_n(f) \\ \tilde{H}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(B) \end{array}$$

Wedge-Axiom: Für eine Wedge-Summe $X = \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ mit Inklusionsabbildungen $i_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow X$ ist die Abbildung

$$\bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(i_{\alpha}): \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha}) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$$

ein Isomorphismus für alle n .

BEMERKUNG 3.1.7. Umgekehrt können wir von reduzierter Homologie zur unreduzierten Homologie übergehen. Dafür bezeichnen wir $X_+ = X \sqcup \{y\}$ und setzen $H_n(X) := \tilde{H}_n(X_+)$. Für $\emptyset \neq A \subseteq X$ haben wir $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.8. Sei (X, A) ein Raumpaard, wobei X ein topologischer Raum und A ein nichtleerer abgeschlossener Unterraum ist, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung U von A in X ist. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ für alle n Isomorphismen induziert:

$$q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A).$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.9. Sei X ein topologischer Raum, und $B \subset A \subset X$ Unterräume. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_k(A, B) \rightarrow H_k(X, B) \rightarrow H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A, B)$$

wobei die Randabbildung durch die Komposition

$$H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(A, B)$$

von Randabbildung in der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) sowie der Abbildung i_* für $i: (A, \emptyset) \rightarrow (A, B)$ gegeben ist.

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.10. Seien I eine endliche Indexmenge und (X_{α}, x_{α}) punktierte topologische Räume, so dass für jedes α der Punkt $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$ Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in X_{α} ist. Wir bezeichnen mit $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ die Wedge-Summe. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildungen $X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ Isomorphismen für alle n induzieren:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_{\alpha}, \{x_{\alpha}\}) \xrightarrow{\cong} H_n\left(\bigvee_{\alpha \in I} X_{\alpha}, \{x_{\alpha}\}\right)$$

Benutzen Sie dafür nur Homotopieinvarianz und Ausschneidung, kein Wedge-Axiom bzw. Additivität.

PROPOSITION 3.1.11 (Mayer–Vietoris-Sequenz). Sei X ein topologischer Raum und seien $U, V \subset X$ Unterräume, so dass $\dot{U} \cup \dot{V} = X$. Sei $A \subset X$ ein Unterraum mit $A \subset U \cap V$. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_k(U \cap V, A) \xrightarrow{((j_U)_*, -(j_V)_*)} H_k(U, A) \oplus H_k(V, A) \xrightarrow{(i_U)_* + (i_V)_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U \cap V, A) \rightarrow \cdots$$

BEWEIS. Wir haben eine Inklusion $(V, U \cap V, A) \hookrightarrow (X, U, A)$ von Tripeln topologischer Räume, die ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen induziert, cf. Übung 3.1.9:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(V, U \cap V) & \longrightarrow & H_n(U \cap V, A) & \longrightarrow & H_n(V, A) & \longrightarrow & H_n(V, U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, U) & \longrightarrow & H_n(U, A) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $\overline{X \setminus V} = X \setminus \overset{\circ}{V} \subseteq \overset{\circ}{U}$, was mit Ausschneidung zu den markierten Isomorphismen führt. Die Behauptung folgt aus Lemma A.2.8. \square

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.12. (*Einhängungsisomorphismus*) Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie mit der Mayer–Vietoris-Sequenz, dass es natürliche Isomorphismen für alle k gibt:

$$\tilde{H}_k(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(\Sigma X)$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.13. Berechnen Sie induktiv mit der Mayer–Vietoris-Sequenz für endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ die Homologie $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_m\})$.

3.2. Anwendung: Brouwerscher Fixpunktsatz

BEMERKUNG 3.2.1. Caveat: An dieser Stelle wollen wir schon einmal erste Anwendungen diskutieren. Dabei ist allerdings ein wesentlicher Punkt zu beachten. In den folgenden Abschnitten zum Brouwerschen Fixpunktsatz und der Theorie des Abbildungsgrades nehmen wir an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten gibt! Die Aussagen, die wir ableiten werden, sind an dieser Stelle der Vorlesung nur unter dieser Annahme gültig. Die Diskussion der Anwendungen an dieser Stelle soll 1) weiter illustrieren, wie die Axiome angewendet werden können, 2) zeigen, dass für viele Anwendungen Homologie auch einfach als “black box” benutzt werden kann und 3) auch begründen, dass das Studium von Homologietheorien sinnvoll ist und interessante Anwendungen hat. Im Kapitel 4 werden wir dann mit der singulären Homologie eine Homologietheorie konstruieren, die die Eilenberg–Steenrod-Axiome erfüllt und damit zeigen, dass die Existenzvoraussetzungen hier gerechtfertigt sind.

Nach der Beachtung des Warnhinweises nehmen wir nun also für den Rest des Abschnitts an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten, die mit H_\bullet bezeichnet wird.

PROPOSITION 3.2.2 (Fixpunktsatz von Brouwer). (1) Es gibt keine Retraktion $r: D^n \rightarrow \partial D^n$ für die Inklusion $i: \partial D^n \hookrightarrow D^n$.
(2) Jede stetige Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. (1) Wir nehmen an, dass es eine Retraktion $r: D^n \rightarrow \partial D^n$ für die Inklusion $i: \partial D^n \hookrightarrow D^n$ gibt. Dann ist die Komposition

$$\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$$

gleich der Identität auf $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}$. Aber wegen $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$ gilt $i_* = r_* = 0$, ein Widerspruch.

(2) Wir betrachten eine fixpunktfreie Abbildung $f: D^n \rightarrow D^n$, d.h. $f(x) \neq x$ für alle $x \in D^n$. Wir definieren eine Abbildung $r: D^n \rightarrow \partial D^n$: für einen Punkt $x \in D^n$ betrachten wir den Strahl, der ausgehend von $f(x)$ durch den Punkt x verläuft, und bilden x auf den Schnittpunkt $r(x)$ dieses Strahls mit ∂D^n ab. Stetigkeit von $r(x)$ folgt aus der Stetigkeit von $f(x)$. Nach Konstruktion ist $r(x) = x$ für $x \in \partial D^n$. Also ist r eine Retraktion, was nach (1) unmöglich ist. \square

BEISPIEL 3.2.3 (Nash-Gleichgewicht). *Eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Equilibria und Modellierung von Preisbildung in den Wirtschaftswissenschaften (Arrow-Debreu-Gleichgewichtsmodell, Econometrica 22, 1954). Es gibt N verschiedene Produkte, deren Preise im Intervall $[0, \infty)$ liegen. Für die topologische Anwendung ersetzen wir Preise durch Preisverhältnisse, d.h. wir nehmen an, dass nicht alle Preise 0 sind und teilen immer durch die Summe der Preise aller Produkte. Die Preise liegen dann im Standardsimplex $\Delta^{N-1} \subset [0, \infty)^N$.*

Für eine Menge von Kunden A haben wir jeweils preisabhängige Bedarfsfunktionen $D_\alpha: \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\alpha \in A$, ebenso für eine Menge von Anbietern B preisabhängige Angebotsfunktionen $S_\beta: \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$. Wir betrachten die Überschuss-Mangel-Funktion

$$Z(p) := \sum_{\alpha} D_{\alpha}(p) - \sum_{\beta} S_{\beta}(p),$$

die für ein gegebenes Preisverhältnis die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot beschreibt (positive Werte: Mangel, negative Werte: Überschuss). Wir nehmen an, dass Z stetig ist und dass das Walras-Gesetz gilt: $p \cdot Z(p) = 0$ (Balance zwischen Einnahmen/Ausgaben).

Dann existiert ein Gleichgewichtspunkt, in dem Angebot und Nachfrage für Waren mit positivem Preis übereinstimmen, d.h. $p \in \Delta^{N-1}$ mit $Z(p) \leq 0$ (wegen $p \cdot Z(p) = 0$ und $p \geq 0$). Wir betrachten die Funktion

$$f: \Delta \rightarrow \Delta: p \mapsto \frac{\max\{0, p + Z(p)\}}{C}$$

mit $C(p) = \sum_i \max\{0, p + Z(p)\}$ (die Summe der Komponenten von $\max\{0, p + Z(p)\}$). Diese Funktion beschreibt Preisänderungen: wenn (eine Komponente von) $Z(p)$ positiv ist, haben wir einen Mangel, also steigen die Preise; wenn $Z(p)$ negativ ist, fallen Preise. Die Funktion f ist wohldefiniert, da wir mit $p \cdot Z(p) = 0$ auch $p \cdot (p + Z(p)) = \|p\|^2 > 0$ haben. Da die Komponenten von p nicht-negativ sind, muss es positive Komponenten von $p + Z(p)$ geben, also ist $C(p) > 0$. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz, cf. Proposition 3.2.2, existiert ein Fixpunkt P von f , für den dann gilt

$$P = \frac{\max\{0, P + Z(P)\}}{C(P)}.$$

Wenn alle Preiskomponenten von P positiv sind, folgt aus $P = \frac{P+Z(P)}{C(P)}$ und dem Walras-Gesetz $P \cdot Z(P) = 0$ schon

$$P \cdot P = \frac{P \cdot P + P \cdot Z(P)}{C(P)} = \frac{P \cdot P}{C(P)},$$

also ist $C(P) = 1$ und damit $Z(P) = 0$. Für Waren mit Preis $P_i = 0$ im Fixpunkt folgt aus der Definition von f , dass $P_i + Z_i(P) \leq 0$, und damit haben wir $Z_i(P) \leq 0$. Dann können wir auf den Teilraum der positiven Preise projizieren und das obige Argument anwenden.

Es gibt verschiedene Varianten, Verallgemeinerungen etc. für Spiele mit gemischten Strategien... \square

Das Spiel Hex wurde unabhängig von Piet Hein und John Nash entwickelt, siehe z.B. [https://de.wikipedia.org/wiki/Hex_\(Spiel\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Hex_(Spiel)) Es wird auf einem rhombenförmigen Spielbrett aus $n \times n$ hexagonalen Feldern gespielt. Die Randseiten des Spielfelds sind schwarz und weiß eingefärbt, je zwei gegenüberliegende Seiten haben die gleiche Farbe. Die zwei Spieler setzen abwechselnd Steine ihrer Farbe auf das Spielbrett. Ziel ist es, die Ränder der eigenen Farbe durch eine durchgehende Kette von Spielsteinen der eigenen Farbe zu verbinden. Der folgende Beweis ist dem Buch von Ghrst entnommen, [Ghr14, Theorem 5.20].

PROPOSITION 3.2.4. *Im Spiel Hex gibt es genau einen Gewinner.*

BEWEIS. Hier arbeiten wir mit einer gewöhnlichen Homologietheorie mit Koeffizienten in einem Körper K .

Eine topologische Umformulierung des Spielbretts: Wir betrachten den Raum $D = [0, 1]^2$ mit einer endlichen polygonalen Zellzerlegung, so dass die folgenden Aussagen gelten:

- (1) es gibt ein Paar disjunkter schwarzer 2-Zellen B_0 , die die obere und untere Kante enthalten; ebenso ein Paar disjunkter weißer 2-Zellen, W_0 , die die rechte und linke Kante enthalten,
- (2) jede 0-Zelle der Zerlegung ist in genau drei 1-Zellen enthalten.

In jedem Spielzug wird eine 2-Zelle ausgewählt und schwarz bzw. weiß gefärbt, je nachdem, wer am Zug ist. Am Ende des Spiels haben alle Zellen eine Farbe.

Sei B eine ϵ -Umgebung vom Abschluss der Vereinigung aller schwarzer Zellen, die diesen Abschluss als Deformationsretrakt enthält; analog sei W eine ϵ -Umgebung vom Abschluss der Vereinigung aller weißer Zellen. Die Behauptung des Satzes ist, dass *entweder* ein Pfad in B existiert, der die beiden Komponenten von B_0 verbindet, *oder* ein Pfad in W existiert, der die beiden Komponenten von W_0 verbindet.

Wir haben eine offene Überdeckung $B \cup W = D$, und es gibt eine Deformationsretraktion der Randzellen $S = B_0 \cup W_0$ auf ∂D . Wir betrachten ein Diagramm relevanter exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2(D, S) & \longrightarrow & H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0) & \longrightarrow & H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0) & \longrightarrow & H_1(D, S) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H_2(D) & \longrightarrow & H_1(B \cap W) & \longrightarrow & H_1(B) \oplus H_1(W) & \longrightarrow & H_1(D) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & H_1(B_0 \cap W_0) = 0 & & H_1(B_0) \oplus H_1(W_0) = 0 & &
 \end{array}$$

Die Zeilen sind (relative) Mayer–Vietoris-Sequenzen für die offene Überdeckung, die Spalten lange exakte Sequenzen für relative Homologie. Die rechte Spalte und $H_2(D)$ sind 0. Die vertikalen Abbildungen sind wegen Exaktheit alle injektiv. In der rechten oberen Ecke haben wir $H_2(D, S) \cong H_2(D/S) = H_2(S^2) = K$.

Ein Pfad in B , der die Komponenten von B_0 verbindet, ist eine relative Homologieklass in $H_1(B, B_0) = H_1(B/B_0)$, analog für W . Wir wollen also zeigen, dass der Kokern von $H_1(B) \oplus H_1(W) \rightarrow H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0)$ eindimensional ist – dann existiert genau ein Gewinner.

Der Durchschnitt $B \cap W$ enthält als Deformationsretrakt den Durchschnitt vom Abschluss der schwarzen Zellen und vom Abschluss der weißen Zellen. Dies ist ein ein-dimensionaler Simplicialkomplex. Zusätzlich ist außer den 4 Randpunkten jeder 0-Simplex in genau zwei 1-Simplizes enthalten: jeder solche 0-Simplex in $B \cap W$ hat Grad 3 in der Zellzerlegung und zwei der angrenzenden 2-Zellen haben die selbe Farbe. Bis auf Homöomorphismus besteht $B \cap W$ also aus N Kopien von S^1 und zwei abgeschlossenen Intervallen. Aus der Berechnung der Homologie von S^1 und dem Wedge-Axiom folgt $H_1(B \cap W) = K^N$ und $H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0) = H_1(B \cap W) \oplus K^2$, da die abgeschlossenen Intervalle echte relative Homologieklassen induzieren.

Wegen $H_2(D) = 0$ und $H_3(D) = 0$ haben wir auch einen Isomorphismus $H_2(B \cap W) \cong H_2(B) \oplus H_2(W)$. Mit der langen exakten Sequenz für die Paare (B, B_0) und (W, W_0) haben wir

$$0 = H_2(B) \oplus H_2(W) \rightarrow H_2(B, B_0) \oplus H_2(W, W_0) \rightarrow H_1(B_0) \oplus H_1(W_0) = 0,$$

damit verschwindet der Term in der Mitte, so dass in der oberen relativen Mayer–Vietoris-Sequenz die Abbildung $H_2(D, S) \rightarrow H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0)$ injektiv ist. Die Exaktheit der Zeilen und Spalten im großen Diagramm liefert

$$\dim H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0) = N + 1.$$

Insbesondere ist $\dim(H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0)) = \dim(H_1(B) \oplus H_1(W)) + 1$, woraus die Behauptung folgt. \square

BEMERKUNG 3.2.5. *Die Aussage, dass Hex in beliebigen Dimensionen immer genau einen Gewinner hat, ist äquivalent zum Brouwerschen Fixpunktsatz [Gal79].*

3.3. Abbildungsgrad

Die Theorie des Abbildungsgrades entsteht aus der Beobachtung, dass eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ einen Gruppenhomomorphismus $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ induziert. Aus der Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 haben wir $H_{\bullet+n}(S^n) \cong H_{\bullet}(\text{pt})$. Im ganzen Abschnitt nehmen wir wieder an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie H_{\bullet} mit Koeffizienten $H_{\bullet}(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ gibt.

DEFINITION 3.3.1 (Abbildungsgrad). *Der induzierte Gruppenhomomorphismus*

$$f_*: \mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

ist notwendig von der Form $f_(m) = \deg(f) \cdot m$ für eine Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, den Abbildungsgrad von f .*

LEMMA 3.3.2 (grundlegende Eigenschaften). (1) $\deg(\text{id}) = 1$, $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.

(2) Wenn $f \sim g$, dann $\deg(f) = \deg(g)$.

(3) Insbesondere haben Homotopieäquivalenzen $f: S^n \rightarrow S^n$ Grad ± 1 .

(4) Wenn f nicht surjektiv ist, dann ist $\deg(f) = 0$.

BEWEIS. (1) ist die Funktorialität, (2) ist die Homotopieinvarianz. (3) folgt aus (1) und (2).

(4) Wenn f nicht surjektiv ist, faktorisiert f durch $S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n$ für einen Punkt $x \in S^n$. Da $S^n \setminus \{x\}$ zusammenziehbar ist, folgt $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$ und $f_* = 0$. \square

PROPOSITION 3.3.3 (geometrische Addition von Homologieklassen). *Wir betrachten die Abbildung (“pinch map”), die den Äquator in S^n zu einem Punkt zusammenzieht:*

$$p: S^n \rightarrow S^n \vee S^n: \alpha_x(t) \mapsto \begin{cases} i_1(\alpha_x(2t)) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ i_2(\alpha_x(2t-1)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dabei sind $i_1, i_2: S^n \hookrightarrow S^n \vee S^n$ die Inklusionen der Wedge-Summanden, und $\alpha_x: [0, 1] \rightarrow S^n$ für $x \in S^{n-1} \times \{0\} \setminus \{e_1\}$ parametrisiert den Kreis auf S^n , der in der Ebene durch x , e_1 und $e_1 + e_{n+1}$ liegt (in konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, beginnend bei e_1 in Richtung e_{n+1}).

Für jeden topologischen Raum X und alle Abbildungen $f, g: S^n \rightarrow X$ mit $f(e_1) = g(e_1)$ gilt

$$H_n((f \vee g) \circ p) = H_n(f) + H_n(g).$$

BEWEIS. Wir bezeichnen mit $\text{pr}_i: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$ die Abbildung, die den jeweils anderen Wedge-Summanden auf den Basispunkt schickt. Es gilt $\text{pr}_1 \circ p \sim \text{id}_{S^n} \sim$

$\text{pr}_2 \circ p$, und die Abbildungen $i_1 \circ \text{pr}_2$ und $i_2 \circ \text{pr}_1$ sind konstant. Dann gilt

$$\begin{aligned} H_n((f \vee g) \circ p) &= H_n(f \vee g) \circ H_n(i_1) \circ H_n(\text{pr}_1) \circ H_n(p) \\ &\quad + H_n(f \vee g) \circ H_n(i_2) \circ H_n(\text{pr}_2) \circ H_n(p) \\ &= H_n((f \vee g) \circ i_1) \circ H_n(\text{pr}_1 \circ p) \\ &\quad + H_n((f \vee g) \circ i_2) \circ H_n(\text{pr}_2 \circ p) \\ &= H_n(f) + H_n(g). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird das Wedge-Axiom angewendet, dann die Funktorialität und zum Schluss die Homotopieinvarianz. \square

KOROLLAR 3.3.4. *Sei*

$$r_j: S^n \rightarrow S^n: (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

die Spiegelung an der j -ten Koordinatenhyperebene in \mathbb{R}^{n+1} . Dann ist $\deg(r_j) = -1$. Insbesondere ist der Grad der Antipodenabbildung $\deg(-\text{id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$.

BEWEIS. Das Austauschen der zweiten und n -ten Koordinate ist ein Homöomorphismus. Nach Lemma 3.3.2 reicht es also zu zeigen, dass r_2 Grad -1 hat. Beweis durch Induktion über n . Auf S^1 ist die Komposition $(\text{id}_{S^1} \vee r_2) \circ p$ der Pinch-Abbildung p aus Proposition 3.3.3 und der Wedge-Summe aus Identität und Spiegelung null-homotop. Also haben wir, zusammen mit Proposition 3.3.3

$$H_1((\text{id}_{S^1} \vee r_2) \circ p) = H_1(\text{id}_{S^1}) + H_1(r_2) = 0.$$

Im Induktionsschritt nehmen wir jetzt an, dass die Behauptung für r_2 auf S^{n-1} gilt. Die Einhängung von r_2 auf S^{n-1} ist r_2 auf S^n . Die Behauptung, dass der Grad von r_2 auf S^n gilt, folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}, e_1) & \xrightarrow[\cong]{\Sigma} & H_n(S^n, e_1) & \xleftarrow[\cong]{} & H_n(S^n) \\ H_{n-1}(r_2) \downarrow & & H_{n-1}(r_2) \downarrow & & \downarrow H_n(r_2) & & \downarrow H_n(r_2) \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}, e_1) & \xrightarrow[\cong]{\Sigma} & H_n(S^n, e_1) & \xleftarrow[\cong]{} & H_n(S^n) \end{array}$$

Die Kommutativität dieses Diagramms folgt aus der Natürlichkeit der Einhängungs-isomorphismen bzw. des Vergleichs zwischen unreduzierter und reduzierter Kohomologie. \square

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.5. (1) *Wir realisieren S^1 als $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Zeigen Sie, dass der Grad der Abbildung $f_d: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^d$ gleich d ist.*

(2) *Wir bezeichnen mit $\Sigma^{n-1} f_d: S^n \rightarrow S^n$ die $n-1$ -te Einhängung von f_d . Zeigen Sie $\deg(\Sigma^{n-1} f_d) = d$.*

(3) *Folgern Sie, dass die Gradabbildung $\deg: [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist. Dabei bezeichnet $[S^n, S^n]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^n$.*

PROPOSITION 3.3.6 (Satz vom Igel). *Auf der n -dimensionalen Sphäre S^n gibt es genau dann ein nullstellenfreies stetiges Vektorfeld, wenn n ungerade ist.*

BEWEIS. Wir betrachten $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Ein Vektorfeld ist eine stetige Abbildung, die jedem Punkt $x \in S^n$ einen Tangentialvektor $v(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $v(x) \perp x$ zuordnet. Wenn das Vektorfeld nullstellenfrei ist, haben wir $v(x) \neq 0$ für alle $x \in S^n$ und wir können alle Vektoren durch $\frac{v(x)}{|v(x)|}$ auf Länge 1 normieren. Wegen $x \perp v(x)$ spannen die beiden Vektoren eine Ebene auf. In dieser Ebene ist $x \cdot \cos t + v(x) \cdot \sin t$ ein Einheitskreis, auf dem x und $v(x)$ liegen. Wir erhalten eine Homotopie $H_t(x) = x \cdot \cos(\pi t) + v(x) \cdot \sin(\pi t)$ zwischen der Identität und der Antipodenabbildung $-\text{id}$. Nach

Lemma 3.3.2 folgt $1 = \deg(\text{id}) = \deg(-\text{id})$. Nach Proposition 3.3.4 ist $\deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1}$. Also muss n ungerade sein.

Für $n = 2k - 1$ ungerade schreiben wir einfach ein Vektorfeld hin:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass $x \perp v(x)$ und $|v(x)| = 1$. \square

LEMMA 3.3.7. *Eine fixpunktfreie Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ hat Grad $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.*

BEWEIS. Wenn $f(x) \neq x$, dann geht die Strecke (im \mathbb{R}^{n+1}) zwischen $f(x)$ und $-x$, parametrisiert durch $(1-t)f(x) - tx$, $t \in [0, 1]$, nicht durch den Ursprung. Insbesondere definiert

$$H(x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$$

für eine fixpunktfreie Abbildung f eine Homotopie zwischen f und der Antipodenabbildung. Die Aussage folgt aus Korollary 3.3.4. \square

KOROLLAR 3.3.8. *Wenn G eine (nichttriviale) Gruppe ist, die frei auf S^{2n} wirkt, dann ist $G = C_2$.*

BEWEIS. Der Grad eines Homöomorphismus ist ± 1 , also induziert eine Gruppenwirkung allgemein einen Homomorphismus $\deg: G \rightarrow C_2$, cf. Lemma 3.3.2 (1). Eine fixpunktfreie Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ erfüllt $\deg(f) = (-1)^{n+1}$. Wenn n gerade ist, ist also der Gradhomomorphismus injektiv. \square

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.9. *Sei $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x \in S^{2n}$ gibt, so dass $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$ gilt (f und $-f$ können nicht gleichzeitig fixpunktfrei sein). Folgern Sie, dass jede Abbildung $f: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ einen Fixpunkt hat. Geben Sie ein Beispiel für eine fixpunktfreie Abbildung $\mathbb{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n-1}$ an (Hinweis: lineare Abbildungen ohne Eigenvektoren).*

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.10. *Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung mit darstellender Matrix M_f . Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung f_* auf $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ genau*

- $\text{id}_{\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ ist, wenn $\det M_f > 0$ ist, und
- $-\text{id}_{\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ ist, wenn $\det M_f < 0$ ist.

(Hinweis: Gauß-Algorithmus)

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.11. *Für ungerades n ist \mathbb{R}^n nicht homöomorph zu einem Produkt $X \times X$. (Argument nach R. Fokkink, in Hatcher's "More exercises in algebraic topology") Ergänzen Sie die fehlenden Argumente.*

Wir erweitern den Gradbegriff auf Homöomorphismen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und definieren $\deg f$ als Grad der Erweiterung von f auf $\bar{f}: S^n \rightarrow S^n$ mit $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Wenn $\mathbb{R}^n \cong X \times X$, dann erhalten wir durch

$$X^{\times 4} \rightarrow X^{\times 4}: (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_1)$$

einen Homöomorphismus auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Da f^2 die beiden Faktoren vertauscht, ist $\deg f = -1$, wenn n ungerade ist. Aber $\deg(f^2) = (\deg f)^2 = 1$.

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.12. *Zeigen Sie, dass \mathbb{R}^{2n+1} für $n > 0$ nicht die Struktur einer Divisionsalgebra haben kann. (Hinweis: Betrachten Sie für $a \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ die Abbildungsgrade für $x \mapsto ax$ und $x \mapsto -ax$, und benutzen Sie, dass $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend ist.)*

DEFINITION 3.3.13. Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung und $q \in f^{-1}(p)$ ein isolierter Punkt. Sei U eine Umgebung von q und V eine Umgebung von p , so dass $f(U) \subset V$. Die Abbildung f induziert einen Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong H_n(U, U \setminus \{q\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$$

von lokalen Homologiegruppen. Dieser Homomorphismus ist Multiplikation mit einer ganzen Zahl $\deg(f; q)$, diese heißt der lokale Grad von f am Punkt q .

PROPOSITION 3.3.14. Sei $f: S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung und sei $p \in S^n$ ein Punkt, so dass $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$ eine diskrete Menge endlicher isolierter Punkte ist. Dann gilt

$$\deg f = \sum_i \deg(f; q_i).$$

BEWEIS. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm langer exakter Sequenzen (für Raumpaare)

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S^n \setminus f^{-1}(p)) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^n \setminus f^{-1}(p)) \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(S^n \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{p\}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^n \setminus \{p\}) \end{array}$$

In der rechten Spalte haben wir $H_{n-1}(S^n \setminus \{p\}) = 0$, da $S^n \setminus \{p\}$ zusammenziehbar ist. In der linken Spalte verschwindet der untere Eintrag aus demselben Grund, und $H_n(S^n \setminus f^{-1}(p)) = 0$, da $S^n \setminus f^{-1}(p)$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus \{q_1, \dots, q_{m-1}\}$ ist und wir die Rechnungen aus Übungsaufgabe 3.1.13 anwenden können. Insbesondere ist dadurch j_* in der unteren Zeile ein Isomorphismus. Wir können $\deg f$ am zweiten vertikalen Morphismus ablesen, der nach Kommutativität mit der Komposition

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n \setminus \{p\})$$

übereinstimmt. Wir wählen eine offene zusammenziehbare Umgebung V von p , so dass $f^{-1}(V) = \sqcup_{i=1}^m U_i$. Mit Ausschneidung und Additivität identifizieren wir

$$H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) \cong \bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus \{q_i\}).$$

Der lokale Grad kann aus $H_n(U_i, U_i \setminus \{q_i\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\})$ abgelesen werden, und die Behauptung folgt aus Additivität. \square

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.15 (Fundamentalsatz der Algebra). Zeigen Sie in folgenden Schritten, dass jedes reelle Polynom $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ eine komplexe Nullstelle hat.

- (1) Wenn f keine komplexe Nullstelle hat, dann definiert f eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- (2) Sei $R > |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$. Zeigen Sie, dass $g_s: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}: \exp 2\pi i t \mapsto f(sR \exp 2\pi i t)$ eine Homotopie zwischen $f|_{\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}}$ und einer konstanten Abbildung definiert.
- (3) Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen $f|_{\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}}$ und $z \mapsto z^n$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}$.
- (4) Folgern Sie, dass $n = 0$ gelten muss.

BEMERKUNG 3.3.16. In der Knotentheorie werden Einbettungen $\iota: S^1 \hookrightarrow S^3$ untersucht. Wichtige Invarianten kann man z.B. aus der Fundamentalgruppe des Komplements $S^3 \setminus \iota(S^1)$ erhalten. Allerdings sehen wir aus dem verallgemeinerten Jordanschen Kurvensatz (s. Proposition 4.5.1), dass die Homologie des Komplements isomorph zur Homologie von S^1 ist, unabhängig vom Knoten. Mit Homologie

- Die Abbildung j ist einfacher: wir wählen einen Basispunkt $x \in U \cap V$. Die Inklusion $\{x\} \rightarrow U \cap V$ bzw. $\{x\} \rightarrow U$ induziert die Isomorphismen $\mathbb{Z} \cong H_0(U \cap V)$ und $\mathbb{Z} \cong H_0(U)$, cf. Lemma 3.1.5 und Übungsaufgabe 3.1.12. Mit diesen Identifikationen ist die Komposition $\mathbb{Z} \cong H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \cong \mathbb{Z}$ die Identität. Dasselbe gilt für V , so dass die Komposition

$$j: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

genau die durch $1 \mapsto (1, 1)$ gegebene Diagonaleinbettung ist.

- Um die Abbildung $i: \mathbb{Z} \cong H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ zu identifizieren, benötigen wir den Abbildungsgrad. Die Abbildung $f: S^1 \sim U \cap V \rightarrow V \sim S^1 \vee S^1$ können wir wie folgt beschreiben: wenn wir die beiden Schleifen von $S^1 \vee S^1$ mit a bzw. b bezeichnen, ist die Abbildung durch $aba^{-1}b^{-1}$ gegeben. Die Kompositionen $S^1 \xrightarrow{f} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\text{pr}_i} S^1$ mit den Projektionen aus Proposition 3.3.3 haben dann Grad 0, da die relevante Schleife (a für $i = 1$, b für $i = 2$) jeweils einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen wird. Also ist $i: H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$ die Nullabbildung.

Aus der Mayer–Vietoris-Sequenz erhalten wir dann die folgenden Aussagen. Die Abbildung j ist injektiv, also ist der Kokern \mathbb{Z} und die Abbildung $H_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{j} H_0(U \cap V)$ ist die Nullabbildung. Damit ist $H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$ surjektiv. Da $i: H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$ die Nullabbildung ist, sind die Abbildungen $H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$ und $\partial: H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_1(U \cap V)$ Isomorphismen. Wir erhalten also die Homologie des Torus:

$$H_i(\mathbb{T}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.2. Berechnen Sie für eine gewöhnliche Homologietheorie H_\bullet mit \mathbb{Z} -Koeffizienten die Homologie von $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, der Kleinschen Flasche und einer kompakten orientierten Fläche von Geschlecht g (Bsp. 2.2.3 der Vorlesung) mit der Mayer–Vietoris-Sequenz (analog zum Beispiel \mathbb{T}^2 aus der Vorlesung).

(Hinweis: Wir erhalten die Kleinsche Flasche durch Ankleben einer 2-Zelle an $S^1 \vee S^1$, im Gegensatz zum Torus benutzen wir aber statt der Schleife $aba^{-1}b^{-1}$ die Schleife $aba^{-1}b$ als Anklebeabbildung.)

Wir wollen die Methode aus Beispiel 3.4.1 auf CW-Komplexe verallgemeinern.

LEMMA 3.4.3. Sei X ein CW-Komplex.

(1)

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathbb{Z}\{n\text{-Zellen von } X\} & k = n \end{cases}$$

(2) Für $k > n$ gilt $H_k(X^{(n)}) = 0$.

(3) Für $k < n$ induziert die Inklusion $\iota: X^{(n)} \hookrightarrow X$ Isomorphismen $\iota_*: H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X)$.

BEWEIS. (1) Nach Proposition 2.2.12 können wir für ein CW-Paar (X, A) eine Umgebung von A in X konstruieren, die auf A retrahiert. Nach Bemerkung 3.1.7 ist $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \tilde{H}_k(X^{(n)}/X^{(n-1)})$. Wegen $X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong \bigvee_{n\text{-Zellen von } X} S^n$, folgt die Behauptung aus dem Wedge-Axiom und dem Einhängungsisomorphismus 3.1.12.

Wir betrachten die lange exakte Sequenz für das Paar $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$:

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)})$$

Für $k \notin \{n, n-1\}$ verschwinden die äußeren Gruppen und wir haben Isomorphismen $H_k(X^{(n-1)}) \cong H_k(X^{(n)})$. Daraus folgt (2), ebenso (3) wenn X endlich-dimensional ist.

Zu diskutieren bleibt der allgemeine Fall in (3). Nach der langen exakten Sequenz für das Paar $(X, X^{(n)})$ reicht es, $H_k(X, X^{(n)}) \cong H_k(X/X^{(n)}) = 0$ für $k \leq n$ zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass $\tilde{H}_k(X) = 0$ für $k \leq n$ und einen CW-Komplex, dessen n -Skelett ein Punkt ist.

Wir betrachten den Produktkomplex $X \times [0, \infty)$ mit der Produkt-CW-Struktur, wobei $[0, \infty)$ die CW-Struktur mit natürlichen Zahlen als 0-Zellen trägt. Wir betrachten den Unterkomplex $T = \bigcup_i X^{(i)} \times [i, \infty)$ und wollen zeigen, dass T ein Deformationsretrakt von $X \times [0, \infty)$ ist. Dafür setzen wir $Y_i = T \cup (X \times [i, \infty))$. Da $X \times [i, i+1]$ auf $X^{(i)} \times [i, i+1] \cup X \times \{i+1\}$ deformationsretrahiert werden kann, kann Y_i auf Y_{i+1} deformationsretrahiert werden, cf. Übungsaufgabe 2.2.13. Nun können wir diese Deformationsretraktionen zusammenfassen: die Retraktion von Y_i auf Y_{i+1} wird im Zeitintervall $[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}]$ durchgeführt. Dies liefert eine Deformationsretraktion von $X \times [0, \infty)$ auf T , die ab dem Zeitpunkt $1 - \frac{1}{2^{i+1}}$ konstant auf $X^{(i)} \times [0, \infty)$ ist. (Stetigkeit!) Damit sind X und T homotopieäquivalent, und wir müssen noch $\tilde{H}_k(T) = 0$ für $k \leq n$ zeigen.

Nach Annahme ist $X^{(0)}$ ein Punkt. Wir betrachten $R = X^{(0)} \times [0, \infty) \subset T$ und definieren

$$Z := R \cup \bigcup_i X^{(i)} \times \{i\}.$$

Dann ist $Z/R \cong \bigvee_i X^{(i)}$. Aus dem bereits diskutierten endlich-dimensionalen Fall und dem Wedge-Axiom folgt $\tilde{H}_k(Z/R) = 0$ für $k \leq n$. Da R zusammenziehbar ist, folgt aus der langen exakten Sequenz $\tilde{H}_k(Z) = 0$ für $k \leq n$. Der Quotient $T/Z \cong \bigvee_i (\Sigma X^{(i)}/X^{(0)} \times [i, i+1])$ ist eine Wedge-Summe endlich-dimensionaler Komplexe, deren $(n+1)$ -Skelett jeweils ein Punkt ist. Also folgt $\tilde{H}_k(T/Z) = 0$ für $k \leq n+1$, und aus der langen exakten Sequenz folgt die Behauptung $\tilde{H}_k(T) = 0$ für $k \leq n$. \square

DEFINITION 3.4.4 (zellulärer Komplex, zelluläre Homologie). *Sei X ein CW-Komplex. Aus Lemma 3.4.3 haben wir ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n+1)}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n)}) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & \dots \\
 & & & & & & \dots \longrightarrow H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \longrightarrow H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \longrightarrow \dots \\
 & & & & & & \longleftarrow \\
 & & & & & & \dots
 \end{array}$$

in dem die aufsteigende Sequenz ein Teil der langen exakten Sequenz für das Paar $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ ist und die absteigende Sequenz ein Teil der langen exakten Sequenz für das Paar $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$. Wir definieren allgemein Abbildungen

$$d_{n+1} := j_n \circ \partial_{n+1}: H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}).$$

Aus der langen exakten Sequenz für das Paar $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ folgt, dass die Komposition

$$H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)})$$

gleich Null ist, und damit haben wir

$$d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ \partial_n \circ j_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Wenn wir eine gewöhnliche Homologietheorie H_n mit Koeffizientenring $R = H_0(\text{pt})$ einsetzen, erhalten wir also einen Komplex von R -Moduln, den zellulären Komplex von X . Wir definieren die zelluläre Homologie von X , Notation $H_n^{\text{CW}}(X)$, als die Homologie dieses Komplexes (s. Anhang A.3)

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.5. Sei H_\bullet eine gewöhnliche Homologietheorie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten und X ein endlicher CW-Komplex. Zeigen Sie, dass $H_0(X)$ isomorph zur freien abelschen Gruppe auf der Menge der Zusammenhangskomponenten von X ist.

BEISPIEL 3.4.6. Wir betrachten nochmal das Beispiel $X = \mathbb{T}^2$. Der zelluläre Komplex hat die Form

$$\begin{array}{ccccc} H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) & \xrightarrow{d_2} & H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) & \xrightarrow{d_1} & H_0(X^{(0)}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \rightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)})$ ist direkt induziert von der Abbildung $S^1 \cong \partial D^2 \rightarrow X^{(1)} \sim S^1 \vee S^1$. Aus Beispiel 3.4.1 folgt dann $d_2 = 0$. Die Abbildung d_1 ist nichts anderes als die Randabbildung $\partial_1: H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$. In unserem Fall haben sowohl $X^{(0)}$ als auch $X^{(1)}$ als 0-Skelett einen einzelnen Punkt, aus Lemma 3.4.3 folgt $\tilde{H}_0(X^{(0)}) = \tilde{H}_0(X^{(1)}) = 0$, oder äquivalent $H_0(X^{(0)}) \cong H_0(X^{(1)}) \cong \mathbb{Z}$ (wobei der Isomorphismus durch die Inklusion $X^{(0)} \hookrightarrow X^{(1)}$ induziert wird). Nach der langen exakten Sequenz

$$H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial_1} H_0(X^{(0)}) \xrightarrow{\cong} H_0(X^{(1)})$$

ist also auch $d_1 = 0$. Wir sehen, dass $H_\bullet^{\text{CW}}(\mathbb{T}^2) \cong H_\bullet(\mathbb{T}^2)$ für eine beliebige gewöhnliche Homologietheorie. \square

SATZ 3.4.7. Es gibt Isomorphismen $H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{CW}}(X)$.

BEWEIS. Wir betrachten die lange exakte Sequenz für das Paar $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$:

$$H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^{(n)}) \rightarrow H_n(X^{(n+1)}) \rightarrow 0$$

Mit Lemma 3.4.3 folgt $H_n(X) \cong H_n(X^{(n+1)}) \cong H_n(X^{(n)})/\text{Im}(\partial_{n+1})$. Analog können wir die lange exakte Sequenz für das Paar $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ betrachten:

$$0 \rightarrow H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)})$$

Da j_n injektiv ist, haben wir induzierte Isomorphismen $j_n: \text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \text{Im}(j_n \circ \partial_{n+1}) = \text{Im}(d_{n+1})$ und $j_n: H_n(X^{(n)}) \rightarrow \text{Im}(j_n) = \ker(\partial_n)$. Zuletzt folgt aus der langen exakten Sequenz für das Paar $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ und Lemma 3.4.3, dass j_{n-1} injektiv ist und damit $\ker \partial_n = \ker d_n$. Wir bekommen zusammenfassend einen induzierten Isomorphismus

$$j_n: H_n(X) \cong H_n(X^{(n)})/\text{Im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\cong} \ker d_n/\text{Im} d_{n+1}. \quad \square$$

PROPOSITION 3.4.8. *Sei X ein CW-Komplex. Die Randabbildung d_n im zellulären Komplex für X ist wie folgt gegeben:*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} \deg(\Delta_{\alpha,\beta}) e_\beta^{n-1},$$

wobei

$$\Delta_{\alpha,\beta}: S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \xrightarrow{q_\beta} S_\beta^{n-1}$$

die Komposition der Anklebeabbildung $\phi_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$ sowie der Quotientenabbildungen $q: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)}$ sowie

$$q_\beta: X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \rightarrow X^{(n-1)}/(X^{(n-1)} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1}$$

ist.

BEWEIS. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{(\Delta_{\alpha,\beta})_*} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ (\Phi_\alpha)_* \downarrow & & \downarrow (\phi_\alpha)_* & & \uparrow (q_\beta)_* \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{q^*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \longrightarrow & \underline{H}_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}, X^{(n-2)}/X^{(n-2)}) \end{array}$$

Hier ist Φ_α die charakteristische Abbildung der Zelle D_α^n . Das linke obere Quadrat kommutiert wegen Natürlichkeit der langen exakten Sequenz für Paare, das Dreieck links unten nach Definition von d_n . Das rechte obere Quadrat kommutiert nach Definition von $\Delta_{\alpha,\beta}$, und das rechte untere Quadrat nach Natürlichkeit der Identifikationen $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$, cf. Bemerkung 3.1.7.

In $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ wählen wir die Basis von Zellen e_α^n als Bild (unter $(\Phi_\alpha)_*$) eines gewählten Erzeugers $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \cong \mathbb{Z}$. Die Kommutativität der linken Hälfte des Diagramms bedeutet

$$d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \circ (\phi_\alpha)_* \circ \partial[D_\alpha^n].$$

Nach Wahl der Basis in $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ ist die Abbildung $(q_\beta)_*$ einfach die Projektion auf den Summanden, der von e_β^{n-1} erzeugt wird. Die Kommutativität der rechten Hälfte des Diagramms impliziert die Behauptung. \square

KOROLLAR 3.4.9. *Sei $\psi: H_\bullet \rightarrow K_\bullet$ eine natürliche Transformation von un-reduzierten gewöhnlichen Homologietheorien (mit Koeffizienten in einem Ring R). Wenn $\psi: H_0(\text{pt}) \rightarrow K_0(\text{pt})$ ein Isomorphismus ist, dann ist $\psi: H_\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(X)$ ein Isomorphismus für alle CW-Komplexe X .*

BEWEIS. Nach Satz 3.4.7 haben wir für einen CW-Komplex X Isomorphismen $H_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} H_\bullet^{\text{CW}}(X)$ und $K_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} K_\bullet^{\text{CW}}(X)$. Es bleibt zu zeigen, dass die zellulären Komplexe für beide Theorien natürlich isomorph sind. Nach Definition 3.4.4 sind die Einträge der Komplexe direkte Summen von Kopien von R , deren Indexmenge die Zellen von X sind, insbesondere unabhängig von der Kohomologietheorie. Nach 3.1.12 induziert der Isomorphismus $\psi: H_0(\text{pt}) \cong K_0(\text{pt})$ einen Isomorphismus $\psi: H_n(S^n) \rightarrow K_n(S^n)$. Insbesondere induziert ψ für alle n Isomorphismen

$$\bigoplus_{n\text{-Zellen von } X} R \cong H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\cong} K_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \bigoplus_{n\text{-Zellen von } X} R.$$

Die Differentiale für die zellulären Komplexe können wir mit Proposition 3.4.8 durch Abbildungsgrade für Anklebeabbildungen bestimmen. Die Natürlichkeit von ψ impliziert die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ K_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & K_n(S^n) \end{array}$$

für jede Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$. Dies bedeutet, dass die Abbildungsgrade in beiden Theorien übereinstimmen, woraus die Behauptung folgt. \square

BEMERKUNG 3.4.10. *Eine deutlich stärker Aussage ist wahr: Bis auf natürliche Isomorphismen gibt es nur eine unreduzierte Homologietheorie mit $H_0(\text{pt}) \cong A$. Die natürliche Transformation wird nicht gebraucht. Für den Beweis der stärkeren Aussage werden allerdings zwei wichtige Zutaten benötigt, die im Moment noch nicht verfügbar sind:*

- Auf der einen Seite würden wir gern für beliebige Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ zwischen CW-Komplexen auch natürliche Homomorphismen auf den zellulären Komplexen definieren. Das geht allerdings nur für zelluläre Abbildungen, d.h. $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$. Nach dem Satz über zelluläre Approximation ist jede stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen homotop zu einer zellulären Abbildung, der Beweis dieses Satzes ist allerdings etwas umfangreicher.
- Auf der anderen Seite haben wir die Transformation benutzt, um den Abbildungsgrad in beiden Theorien zu identifizieren. Tatsächlich folgt aus dem Satz von Hurewicz $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, so dass die Homotopieklasse einer Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ schon durch den Grad eindeutig bestimmt ist. Die Identifikation der Abbildungsgrade in beiden Theorien folgt dann aus den Rechnungen in Abschnitt 3.3. Der Satz von Hurewicz benötigt aber auch wieder etwas mehr an Homotopietheorie.

BEISPIEL 3.4.11. *Wir berechnen die Homologie der projektiven Räume. Der Fall $X = \mathbb{C}P^n$ ist einfach: aus Beispiel 2.2.5 haben wir eine CW-Struktur mit je einer $2k$ -Zelle für $k \in \{0, \dots, n\}$. Damit ist $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = 0$ für k ungerade, also können die Randabbildungen nur 0 sein und wir haben*

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, \dots, 2n\} \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den reell-projektiven Raum $X = \mathbb{R}P^n$ müssen wir etwas mehr arbeiten. Hier haben wir je eine k -Zelle für $k \in \{0, \dots, n\}$, also ist in diesen Dimensionen $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = \mathbb{Z}$. Die Anklebeabbildung für die k -Zelle ist die Projektion $S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$. Wir berechnen den Grad der Komposition

$$S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \cong S^{k-1}.$$

Die Einschränkung auf die offene Nord- bzw. Südhalbkugel ist ein Homöomorphismus, und beide Homöomorphismen unterscheiden sich genau durch die Antipodenabbildung. Nach Korollar 3.3.4 ist der Grad der Antipodenabbildung $(-1)^k$, und damit ist der Grad der Komposition $1 + (-1)^k$. Damit ist der zelluläre Komplex für $\mathbb{R}P^n$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{?} \mathbb{Z} \rightarrow \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

wobei ? für ungerades n die Nullabbildung und für gerades n Multiplikation mit 2 ist. Wir erhalten

$$H_k(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ und } k = n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 < k < n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.12. Eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt gerade, wenn für alle $x \in S^n$ gilt $f(x) = f(-x)$. Zeigen Sie, dass eine gerade Abbildung geraden Grad hat. Wenn n gerade ist, ist der Grad 0. (Hinweis: Benutzen Sie die Berechnung der Homologie von $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.)

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.13. Berechnen Sie die Homologie des n -Torus $T^n \cong (S^1)^{\times n}$.

BEISPIEL 3.4.14. Linsenraum? □

BEMERKUNG 3.4.15. Beispiel inverse Kinematik aus [Ghr14, Abschnitt 4.11]. Wir betrachten einen idealisierten Roboterarm mit n Drehgelenken, die jeweils um eine feste Achse gedreht werden können. Für jedes der n Drehgelenke haben wir also einen Konfigurationsraum S^1 , gegeben durch die Winkelkoordinate. Der Konfigurationsraum des gesamten Roboterarms ist dann T^n . Zu jedem Punkt $x \in T^n$ des Konfigurationsraums, also zu jedem vorgegebenen Tupel von Drehwinkeln für die n Gelenke, haben wir eine zugeordnete Drehung des vom Roboterarm gehaltenen Bauteils. Dies liefert die kinematische Abbildung $\kappa: T^n \rightarrow \text{SO}(3)$, hierbei bezeichnet $\text{SO}(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe der orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen des \mathbb{R}^3 . Die Frage, ob eine vorgegebene Orientierung des Bauteils im Raum durch eine Sequenz von Drehungen der Gelenke realisierbar ist, ist die Frage nach der einem stetigen Schnitt der kinematischen Abbildung κ .

Wir können mit Homologie begründen, warum ein solcher stetiger Schnitt κ nicht existieren kann. Zuerst konstruieren wir einen Homöomorphismus $\mathbb{R}\mathbb{P}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$. Die Abbildung $\phi: D^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ bildet einen Punkt x auf die Rotation um den Winkel $|x|\pi$ um die durch x aufgespannte Rotationsachse ab. Diese Abbildung schickt den Ursprung auf die Identität und bildet Antipodenpunkte x und $-x$ in ∂D^3 auf die gleiche Rotation ab. Insbesondere induziert ϕ eine Abbildung $\bar{\phi}: \mathbb{R}\mathbb{P}^3 \rightarrow \text{SO}(3)$, cf. die Zellstruktur von $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ aus Beispiel 2.2.5. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\bar{\phi}$ ein Homöomorphismus ist. Damit kennen wir jetzt auch die Homologie von $\text{SO}(3)$.

Wir nehmen nun an, dass ein stetiger Schnitt $\sigma: \text{SO}(3) \rightarrow T^n$ existiert, d.h. $\kappa \circ \sigma = \text{id}_{\text{SO}(3)}$. Der Schnitt induziert dann insbesondere eine injektive Abbildung

$$\sigma_*: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(\text{SO}(3)) \rightarrow H_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n,$$

dabei folgen die Identifikationen der Homologie aus $\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^3$ und Beispiel 3.4.11 bzw. Beispiel 3.4.13. Eine solche injektive Abbildung kann es aber nicht geben.

3.5. Euler-Charakteristik

Wir nehmen auch hier wieder an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten gibt.

DEFINITION 3.5.1. Sei X ein endlicher CW-Komplex. Wir bezeichnen mit z_i die Anzahl der i -dimensionalen Zellen von X . Die geometrische Euler-Charakteristik ist definiert als

$$\chi_{\text{geom}}(X) = \sum_i (-1)^i z_i.$$

DEFINITION 3.5.2. Wir betrachten wieder eine Homologietheorie mit $H_\bullet(\text{pt}) = \mathbb{Z}$. Sei X ein topologischer Raum, so dass $H_\bullet(X)$ ein endlich erzeugter \mathbb{Z} -Modul ist. Die topologische Euler-Charakteristik von X ist definiert als

$$\chi_{\text{top}}(X) = \sum_i (-1)^i \text{rk } H_i(X).$$

BEMERKUNG 3.5.3. Mit dieser Definition ist die Euler-Charakteristik offensichtlich invariant unter Homotopieäquivalenzen.

PROPOSITION 3.5.4. Sei X ein endlicher CW-Komplex. Dann stimmen topologische und geometrische Euler-Charakteristik überein: $\chi_{\text{geom}}(X) = \chi_{\text{top}}(X)$.

BEWEIS. Sei $0 \rightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0$ ein Komplex von endlich erzeugten abelschen Gruppen. Wir bezeichnen $Z_n = \ker d_n$, $B_n = \text{Im } d_{n+1}$ und $H_n = Z_n/B_n$. Dann haben wir exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0.$$

Aus der Dimensionformel folgt

$$\begin{aligned} \text{rk } C_n &= \text{rk } Z_n + \text{rk } B_{n-1} \\ &= \text{rk } B_n + \text{rk } H_n + \text{rk } B_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\sum_n (-1)^n \text{rk } C_n = \sum_n (-1)^n (\text{rk } B_n + \text{rk } H_n + \text{rk } B_{n-1}) = \sum_n (-1)^n \text{rk } H_n.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir die Aussage auf den zellulären Komplex mit $C_n = H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ anwenden. \square

BEISPIEL 3.5.5. Aus unseren Berechnungen für S^n haben wir dann

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

\square

PROPOSITION 3.5.6 (Inklusion–Exklusion). Sei X ein endlicher CW-Komplex, und U und V zwei Unterkomplexe mit $U \cup V = X$. Dann gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

BEWEIS. Hier benutzen wir die topologische Euler-Charakteristik. Nach Voraussetzung haben wir eine Mayer–Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots,$$

in der nur endlich viele Einträge von Null verschieden sind. Aus der Exaktheit folgt, dass die alternierende Summe der Terme in der Mayer–Vietoris-Sequenz auch Null ist:

$$\sum_n (-1)^n \text{rk } H_n(U \cap V) + \sum_n (-1)^n \text{rk } H_n(X) = \sum_n (-1)^n (\text{rk } H_n(U) + \text{rk } H_n(V))$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.7. Sei U_1, \dots, U_m eine endliche Überdeckung von X durch Unterkomplexe, so dass für alle $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ entweder leer ist oder Euler-Charakteristik 1 hat. Dann ist

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \# \left\{ J \subseteq \{1, \dots, m\} \mid \#J = i + 1 \text{ und } \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset \right\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.8. *Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Polyederformel von Euler: Für eine Triangulierung einer kompakten orientierten Fläche von Geschlecht g mit F Seitenflächen, E Kanten und V Eckpunkten gilt*

$$F - E + V = 2 - 2g.$$

PROPOSITION 3.5.9. *Seien X und Y zwei endliche CW-Komplexe. Dann gilt*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

BEWEIS. Hier benutzen wir die geometrische Euler-Charakteristik. Das Produkt ist ein endlicher CW-Komplex, dessen Zellen genau die Produkte der Zellen von X und Y sind. Seien $z_{X,n}$ und $z_{Y,n}$ die Anzahl der n -Zellen von X bzw. Y . Dann ist $z_{X \times Y, n} = \sum_{i+j=n} z_{X,i} \cdot z_{Y,j}$ die Anzahl der n -Zellen von $X \times Y$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \chi(X) \cdot \chi(Y) &= \left(\sum_i (-1)^i z_{X,i} \right) \left(\sum_j (-1)^j z_{Y,j} \right) \\ &= \sum_n \left(\sum_{i+j=n} (-1)^i z_{X,i} \cdot (-1)^j z_{Y,j} \right) \\ &= \sum_n (-1)^n z_{X \times Y, n} = \chi(X \times Y). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 3.5.10. *Für den n -Torus $T^n = (S^1)^{\times n}$ haben wir dann $\chi(T^n) = \chi(S^1)^n = 0$. Induktiv können wir auch einfach sehen, dass die Anzahl der i -Zellen in der Produkt-CW-Struktur für T^n genau $\binom{n}{i}$ ist. Die Aussage über die Euler-Charakteristik ist dann die wohlbekannte Formel über alternierende Binomialkoeffizienten:*

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

□

BEMERKUNG 3.5.11. *Obwohl die Euler-Charakteristik nur eine einfache Zahl ist, enthält sie sehr viel Information über einen topologischen Raum und mögliche geometrische Strukturen. Ein Beispiel für diese Interaktion von globalen topologischen Invarianten und geometrischen Strukturen ist der Satz von Gauß-Bonnet: für eine kompakte orientierte glatte Fläche Σ (ohne Rand) im \mathbb{R}^3 gilt*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K dA = \chi(\Sigma)$$

Auf der linken Seite steht dabei das Integral der Gauß-Krümmung bezüglich der Flächenform (alles lokale Informationen über die Geometrie der Fläche), die rechte Seite ist einfach die Euler-Charakteristik (rein topologische Information).

Etwas allgemeiner kann die Euler-Charakteristik einer glatten orientierten Mannigfaltigkeit M mit dem Integral der Euler-Klasse des Tangentialbündels über M identifiziert werden. Kombinieren wir dies mit der Interpretation der Euler-Klasse als Hindernis für nullstellenfreie Schnitte führt dies (nach deutlich mehr Arbeit) zur Aussage, dass auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M (ohne Rand) genau dann ein nullstellenfreies Vektorfeld existiert, wenn $\chi(M) = 0$ – eine ziemlich weitreichende Verallgemeinerung des Satzes vom Igel 3.3.6. Mehr Information zu Euler-Charakteristik, Gauß-Bonnet und den Zusammenhang zum Krümmung und Messung von Oberfläche bzw. Inhalt, siehe [Ghr14, Kapitel 3] und [Sch86].

Singuläre Homologie

Bisher haben wir nur eine axiomatische Definition von Homologie betrachtet, in der Homologie im Wesentlichen durch Homotopieinvarianz und Ausschneidung charakterisiert ist. Aus den Axiomen folgt direkt die Berechnung der Homologie der Sphären (bzw. allgemeiner der Einhängungsisomorphismus) und mit etwas mehr Arbeit eine Beschreibung der von stetigen Abbildungen $f: S^n \rightarrow S^n$ induzierten Abbildungen auf der Homologie (Gradtheorie). Das reicht bereits aus, um Homologie für alle CW-Komplexe zu berechnen (zelluläre Homologie) und ein paar einfache Anwendungen abzuleiten.

Alle bisherigen Ergebnisse (z.B. Brouwer-Fixpunktsatz, Satz vom Igel) gelten bisher nur unter der Annahme, dass eine gewöhnliche Homologietheorie mit \mathbb{Z} -Koeffizienten existiert. Hauptziel des folgenden Kapitels ist es nun, eine solche Homologietheorie zu konstruieren und die Eilenberg–Steenrod-Axiome zu beweisen. Für die Definition der singulären Homologie eines topologischen Raums X benutzen wir die simpliziale Menge der Abbildungen von Standard-Simplizes nach X , und betrachten einen dazugehörigen algebraischen Kettenkomplex.

Außerdem werden wir einige weitere Anwendungen diskutieren: den Jordanschen Kurvensatz (zur Topologie des \mathbb{R}^n) und Borsuk–Ulam-Sätze. Da gewöhnliche Homologietheorien durch die Eilenberg–Steenrod-Axiome bis auf natürlichen Isomorphismus eindeutig bestimmt sind, folgen zwar *alle* Homologieberechnungen irgendwie aus den Axiomen. Allerdings ist es natürlich auch gut, singuläre Homologie in Aktion zu sehen, und die axiomatischen Beweise der beiden Anwendungen sind etwas aufwendiger. Zum Beispiel benötigen wir für den Jordanschen Kurvensatz die Tatsache, dass Homologie mit gerichteten Kolimits vertauscht, und für Borsuk–Ulam die Existenz von Transfers für endliche Überlagerungen; beides sind Eigenschaften, die für singuläre Homologie relativ direkt zu sehen sind.

4.1. Simplizialkomplexe und simpliziale Mengen

DEFINITION 4.1.1 (Simplizialkomplex). *Sei M eine Menge. Ein abstrakter Simplizialkomplex X ist eine Menge $X = \{U \mid U \subset M, U \text{ endlich}\}$ von endlichen Teilmengen, so dass für $U \in X$ und $V \subset U$ auch $V \in X$ gilt. Eine solche Teilmenge $U \in X$ mit $\#U = n + 1$ heißt n -Simplex.*

Die Mengen $U \in X$ heißen Facetten oder Seiten von X .

Wir bezeichnen mit $X_n = \{U \subset M \mid U \in X, \#U = n + 1\}$ die Menge der n -Simplizes von X .

DEFINITION 4.1.2. *Eine simpliziale Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei Simplizialkomplexen X und Y ist eine Abbildung der zugrundeliegenden Mengen, so dass für jedes Simplex $\sigma \in X$ das Bild $f(\sigma)$ auch wieder ein Simplex in Y ist.*

Sei $X = \{U \mid U \subset M\}$ ein Simplizialkomplex auf der Menge M . Ein Simplizialkomplex $Z \subseteq X$ heißt Unterkomplex.

DEFINITION 4.1.3. *Ein geometrisches n -Simplex ist die konvexe Hülle von $n+1$ Punkten in \mathbb{R}^n in allgemeiner Lage (d.h. jede Teilmenge von Punkten ist affin unabhängig).*

Als Standard- n -Simplex wird die konvexe Hülle der Einheitsvektoren in \mathbb{R}^{n+1} bezeichnet:

$$\Delta^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \right\}$$

BEMERKUNG 4.1.4. Die Punkte des von den Eckpunkten v_0, \dots, v_n aufgespannten n -Simplex sind nach Definition genau die konvexen Linearkombinationen $\sum_i t_i v_i$ mit $\sum_i t_i = 1$ und $t_i \geq 0$ für alle i . Die Koeffizienten t_i heißen auch normierte baryzentrische Koordinaten des Punktes $p = \sum_i t_i v_i$. Der Schwerpunkt (auch Baryzentrum) des Simplex ist der Punkt $b = \sum_i t_i v_i$, an dem alle baryzentrischen Koordinaten gleich sind, also $t_i = \frac{1}{n+1}$.

BEMERKUNG 4.1.5. Die Seitenflächen des Standardsimplex Δ^n sind genau die Schnittmengen von Δ^n mit Koordinatenebenen $x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = 0$ im \mathbb{R}^{n+1} . Diese sind wieder Standardsimplizes.

DEFINITION 4.1.6. Für einen abstrakten Simplicialkomplex X (mit zugrundeliegender Menge M) definieren wir die geometrische Realisierung $|X|$. Wir wählen eine totale Ordnung auf M ; dadurch wird für jede Teilmenge $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset M$ eine Bijektion auf die Eckpunkte $e_0 < e_1 < \dots < e_n$ des Standardsimplex Δ^n eindeutig festgelegt. Für jede Teilmenge $\tau \subset \sigma \subseteq M$ wird dadurch auch eine eindeutige affine Abbildung $\iota_{\tau \subset \sigma}: \Delta^{\#\tau-1} \rightarrow \Delta^{\#\sigma-1}$ festgelegt, die die Ordnung der Simplizes bewahrt.

Dann definieren wir

$$|X| = \left(\bigsqcup_n X_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation für jede Inklusion $\tau \subset \sigma$ von abstrakten Simplizes in X den Simplex $\{\tau\} \times \Delta^{\#\tau-1}$ als Seite des Simplex $\{\sigma\} \times \Delta^{\#\sigma-1}$ mittels $t \sim \iota_{\tau \subset \sigma}(t)$, $t \in \Delta^{\#\tau-1}$, identifiziert.

Eine Triangulierung eines topologischen Raumes X ist ein abstrakter Simplicialkomplex Y zusammen mit einem Homöomorphismus $|Y| \xrightarrow{\cong} X$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.7. Die geometrische Realisierung eines Simplicialkomplexes ist ein CW-Komplex.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.8. Finden Sie eine Triangulierung für den 2-Torus. (Anspruchsvoller Zusatz: Wie viele Eckpunkte muss der Simplicialkomplex einer solchen Triangulierung mindestens haben?)

BEISPIEL 4.1.9. Für die Menge $[n] = \{0, \dots, n\}$ ist $\Delta^n := \mathcal{P}([n])$ ein simplicialer Komplex, dessen Realisierung ein n -Simplex ist. Der Rand $\partial \Delta^n := \{U \in \Delta^n \mid \#U \leq n\}$ liefert eine Triangulierung $\partial \Delta^n \cong S^{n-1}$. \square

BEISPIEL 4.1.10. Ein anderer Begriff für abstrakte Simplicialkomplexe ist Unabhängigkeitssystem. Für einen Körper F , einen F -Vektorraum V und eine Menge $M \subseteq V$ von Vektoren haben wir ein Unabhängigkeitssystem

$$\Delta = \{U \subseteq M \mid U \text{ linear unabhängig}\}.$$

Allgemeiner sind Matroide Beispiele für abstrakte Simplicialkomplexe. Ein anderes Beispiel: für eine Menge M von Zufallsvariablen haben wir ein Unabhängigkeitssystem, das eine Teilmenge $U \subseteq M$ genau dann enthält, wenn die entsprechenden Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. In beiden Fällen kodiert die Topologie des Simplicialkomplexes Abhängigkeiten (zwischen Vektoren bzw. Zufallsvariablen). \square

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.11. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V und eine Menge $X \subseteq V$ von Vektoren ist der Unabhängigkeitskomplex für X ein Simplizialkomplex. Geben Sie einen Simplizialkomplex an, der nicht von dieser Form ist.

BEISPIEL 4.1.12 (Fahnenkomplex). Sei K ein Körper und V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Eine Fahne in V ist eine Kette von echt ineinander enthaltenen Untervektorräumen $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{l-1} \subset V_l = V$. Eine vollständige Fahne ist eine Fahne maximaler Länge $l = n$ mit $\dim V_i = i$.

Die Menge aller echten Untervektorräume von V hat die Struktur eines Simplizialkomplexes. Ein Tupel (V_1, \dots, V_l) von Vektorräumen spannt genau dann einen $(l-1)$ -Simplex auf, wenn die V_i eine Fahne $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l \subset V$ bilden. Dieser Komplex heißt Fahnenkomplex für V . \square

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.13. Bestimmen Sie den Fahnenkomplex für den Vektorraum \mathbb{F}_2^3 .

BEISPIEL 4.1.14. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Darunter verstehen wir hier einen eindimensionalen Simplizialkomplex, d.h. wir haben eine Menge V von Knoten und eine Menge E von 2-elementigen Teilmengen von V , den Kanten. Der Clique-Komplex für Γ ist definiert als der Simplizialkomplex

$$X(\Gamma) = \{\sigma \subseteq V \mid \forall x, y \in \sigma : \{x, y\} \in E\}.$$

Der Clique-Komplex enthält ein Simplex σ genau dann, wenn die Eckpunkte des Simplex eine Clique im Graphen Γ bilden.

Umgekehrt gibt es auch den Unabhängigkeitskomplex des Graphen, in dem Punkte v_0, \dots, v_n genau dann ein Simplex aufspannen, wenn keine zwei Punkte v_i und v_j durch eine Kante verbunden sind. Dies ist der Clique-Komplex des komplementären Graphen. \square

BEISPIEL 4.1.15. Sei X ein topologischer Raum, und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Der Čech-Komplex/Nerv für die Überdeckung ist ein Simplizialkomplex auf der Menge I , bei dem Indizes i_0, \dots, i_n ein n -Simplex aufspannen, wenn $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$. \square

BEISPIEL 4.1.16. Sei (X, \leq) eine partiell geordnete Menge. Der Ordnungskomplex zu X ist der Simplizialkomplex auf X , bei dem eine Teilmenge x_0, \dots, x_n genau dann einen n -Simplex aufspannt, wenn sie bezüglich \leq total geordnet ist (oBdA $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$). \square

BEISPIEL 4.1.17. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Menge von Punkten und sei $\epsilon > 0$. Der Vietoris–Rips-Komplex $\text{VR}_\epsilon(Q)$ ist ein Simplizialkomplex auf der Menge Q , bei dem Punkte q_0, \dots, q_n ein n -Simplex aufspannen, wenn $|q_i - q_j| < \epsilon$ für alle $i, j \in \{0, \dots, n\}$ ist. \square

Weitere Beispiele wie Strategiekomplexe und Konfigurationsräume von Roboterarmen sind in [Ghr14] zu finden.

DEFINITION 4.1.18. Sei X ein Simplizialkomplex und $\sigma \in X$ ein Simplex. Der Link von σ in X ist der Unterkomplex

$$\text{Lk}_X(\sigma) := \{\tau \in X \mid \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in X\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.19. Finden Sie eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ der 2-Sphäre, so dass gilt

$$2 = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \# \left\{ J \subseteq I \mid \#J = i + 1 \text{ und } \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset \right\}.$$

Können Sie eine allgemeine hinreichende Bedingung für Überdeckungen der 2-Sphäre formulieren, so dass die obige Formel gilt?

BEMERKUNG 4.1.20. Der Begriff des Δ -Komplexes (semi-simpliziale Menge) ist eine Verallgemeinerung der Simplizialkomplexe. Ein abstrakter Δ -Komplex ist eine Folge K_0, K_1, \dots von Mengen und Randabbildungen $d_i: K_n \rightarrow K_{n-1}$ für $n > 0$ und $0 \leq i \leq n$, so dass für $n \geq 2$ und $i < j$ gilt $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$. Im Unterschied zu Simplizialkomplexen merken wir uns hier, welche Simplizes als Facette eines anderen Simplex auftauchen.

Eine geometrische Realisierung kann wieder genau wie im Fall von Simplizialkomplexen konstruiert werden:

$$|X| = \left(\bigsqcup_n X_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

wobei die Relation durch $(\sigma, d^i t) \sim (d_i \sigma, t)$ für $\sigma \in X_n$ und $t \in \Delta^{n-1}$ gegeben ist. Dabei ist die Abbildung $d^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ die affine Einbettung, die das $(n-1)$ -Simplex Δ^{n-1} als i -te Seitenfläche des n -Simplex realisiert: die Einheitsvektoren e_j mit $j < i$ werden auf e_j abgebildet, die Einheitsvektoren e_j mit $j \geq i$ auf e_{j+1} , und die Abbildung ist die dadurch festgelegte affine Transformation.

Der Vorteil von Δ -Komplexen ist, dass allgemeinere Verklebungen erlaubt sind, als für Simplizialkomplexe. Dadurch kommen Δ -Komplex-Strukturen mit deutlich weniger Simplizes aus als Triangulierungen (Beispiel Torus).

BEMERKUNG 4.1.21. Ein noch allgemeinerer Begriff ist der der simplizialen Menge. Mit Δ bezeichnen wir die Kategorie der endlichen Ordinalzahlen: Objekte sind endliche linear geordnete Mengen $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ und Morphismen sind monotone Abbildungen. Diese Kategorie wird erzeugt von speziellen Abbildungen:

- Die Randabbildung $\delta^{n,i}: [n-1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ ist die Injektion, für die i nicht im Bild liegt.
- Die Ausartungsabbildung $\sigma^{n,i}: [n+1] \rightarrow [n]$, $0 \leq i \leq n$ ist die Surjektion, die i zweimal trifft.

Jede Abbildung in Δ ist eine Komposition solcher Abbildungen. Die Abbildungen erfüllen die kosimplizialen Identitäten (die alle geometrische Interpretationen im Standardsimplex haben).

Eine simpliziale Menge ist ein kontravarianter Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Konkret ist eine simpliziale Menge X_\bullet eine Folge von Mengen X_n und Randabbildungen $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$ und Ausartungsabbildungen $s_j: X_{n-1} \rightarrow X_n$, die die folgenden simplizialen Identitäten erfüllen:

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i && \text{wenn } i < j \\ d_i \circ s_j &= s_{j-1} \circ d_i && \text{wenn } i < j \\ d_j \circ s_j &= \text{id} = d_{j+1} \circ s_j \\ d_i \circ s_j &= s_j \circ d_{i-1} && \text{wenn } i > j + 1 \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i && \text{wenn } i \leq j \end{aligned}$$

Es gibt ebenfalls wieder eine geometrische Realisierung wie für semisimpliziale Komplexe.

ÜBUNGSAUFGABE 4.1.22. Sei Δ die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen), mit den Randabbildungen $\delta^i: [n-1] \rightarrow [n]$ (Injektion, die i nicht trifft) und Ausartungsabbildungen $\sigma^i: [n+1] \rightarrow [n]$ (Surjektion, die i zweimal trifft). Zeigen Sie, dass jede Abbildung in Δ eine Komposition von Rand- und Ausartungsabbildungen ist. Beweisen Sie, dass diese Abbildungen

die folgenden kosimplizialen Identitäten erfüllen:

$$\begin{aligned} \delta^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \delta^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \sigma^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^j &= \text{id} = \sigma^j \circ \delta^{j+1} \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^{i-1} \circ \sigma^j && \text{wenn } i > j + 1 \\ \sigma^j \circ \sigma^i &= \sigma^i \circ \sigma^{j+1} && \text{wenn } i \leq j \end{aligned}$$

4.2. Definition und erste Konsequenzen

DEFINITION 4.2.1. Sei $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ eine simpliziale Menge und sei R ein Ring. Wir definieren einen Kettenkomplex $(C_\bullet(X), d)$ von R -Moduln wie folgt: für $n \in \mathbb{N}$ ist $C_n(X) = R[X_n]$ der freie R -Modul auf der Menge der n -Simplizes von X , und die Randabbildung wird definiert durch

$$d: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X): [\sigma] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [d_i(\sigma)].$$

Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von simplizialen Mengen erhalten wir induzierte Abbildungen

$$f: (C_\bullet(X), d) \rightarrow (C_\bullet(Y), d): [\sigma] \mapsto [f(\sigma)].$$

Insgesamt erhalten wir einen Funktor $C_\bullet: \Delta^{\text{op}}\text{-Set} \rightarrow \mathbf{Ch}(R\text{-mod})$ von simplizialen Mengen in Komplexe von R -Moduln.

ÜBUNGSAUFGABE 4.2.2. Zeigen Sie:

- $(C_\bullet(X), d)$ aus Definition 4.2.1 ist tatsächlich ein Komplex.
- Die induzierten Abbildungen in Definition 4.2.1 sind Homomorphismen von Komplexen, und kompatibel mit Komposition.

BEMERKUNG 4.2.3. Dold-Kan-Korrespondenz zwischen simplizialen R -Moduln und Kettenkomplexen von R -Moduln. normalisierter Kettenkomplex/Moore-Komplex vs. Kettenkomplex modulo ausgeartete Simplizes

DEFINITION 4.2.4. Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren eine simpliziale Menge $\text{Sing}_\bullet(X)$ wie folgt:

- Die Menge der n -Simplizes $\text{Sing}_n(X) := \mathbf{Top}(\Delta^n, X)$ ist die Menge der stetigen Abbildungen $\Delta^n \rightarrow X$ vom Standard- n -Simplex in X .
- Die Rand- und Ausartungsabbildungen für $\text{Sing}_n(X)$ sind durch Komposition mit den geometrischen Rand- und Ausartungsabbildungen $\delta^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ bzw. $\sigma^i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ gegeben.

Für eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ erhalten wir eine induzierte Abbildung $f: \text{Sing}_\bullet(X) \rightarrow \text{Sing}_\bullet(Y)$ von simplizialen Mengen.

Insgesamt erhalten wir dadurch einen Funktor $\text{Sing}_\bullet: \mathbf{Top} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{-Set}$ von topologischen Räumen in simpliziale Mengen.

DEFINITION 4.2.5. Sei X ein topologischer Raum, und sei R ein Ring. Der singuläre Kettenkomplex ist definiert als $C_\bullet^{\text{sing}}(X) := C_\bullet(\text{Sing}_\bullet(X))$. Die singuläre Homologie von X ist definiert durch

$$H_n^{\text{sing}}(X, R) := H_n(C_\bullet^{\text{sing}}(X)).$$

LEMMA 4.2.6. Singuläre Homologie ist ein Funktor

$$H_n^{\text{sing}}(-, R): \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-mod}.$$

BEWEIS. Folgt direkt aus den Funktorialitätsaussagen in Definitionen 4.2.1 und 4.2.4 sowie Übungsaufgabe A.3.3. \square

BEMERKUNG 4.2.7. Wir sehen direkt aus der Definition, dass $H_n^{\text{sing}}(X, R) = 0$ für $n < 0$ gilt. Für den Spezialfall $X = \emptyset$ können wir auch direkt sehen, dass $H_n^{\text{sing}}(\emptyset) = 0$ ist. Wir werden aber im folgenden immer implizit annehmen, dass die Räume, die wir betrachten nicht-leer sind.

BEMERKUNG 4.2.8. Eine für verschiedene Anwendungen interessante Modifikation ist die Homologie mit lokalen Koeffizienten. Sei (X, x) ein zusammenhängender punktierter topologischer Raum (lokal weg-zusammenhängend, semi-lokal einfach zusammenhängend) mit Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ wirkt auf der universellen Überlagerung \tilde{X} durch Decktransformationen. Diese Wirkung induziert eine $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ -Modulstruktur auf $C_\bullet^{\text{sing}}(\tilde{X})$. Für einen $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ -Modul M können wir dann Homologie mit lokalen Koeffizienten in M definieren:

$$H_n^{\text{sing}}(X, M) := H_n(C_\bullet^{\text{sing}}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]} M).$$

Ein wesentliches Anwendungsbeispiel ist in der Knotentheorie der Alexander-Modul. Dabei betrachtet man für einen Knoten $\iota: S^1 \hookrightarrow S^3$ die Homologie des Knotenkomplements $X = S^3 \setminus \iota(S^1)$ mit Koeffizienten in dem Modul $\mathbb{Z}[\pi_1(X)] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$, der durch die Abelianisierung der Knotengruppe $\pi_1(X)$ gegeben ist.

PROPOSITION 4.2.9. Seien X_i , $i \in I$ topologische Räume, I eine beliebige Indexmenge. Dann gilt

$$H_n^{\text{sing}}(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n^{\text{sing}}(X_i, R).$$

Dies gilt insbesondere für die Zerlegung eines Raums X in Wegzusammenhangskomponenten.

BEWEIS. Die Standard- n -Simplizes Δ^n sind zusammenhängend, also ist das Bild einer Abbildung $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ immer zusammenhängend. Insbesondere gibt es für jedes singuläre Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ ein $i \in I$, so dass das Bild von σ in X_i enthalten ist. Wir erhalten eine Zerlegung

$$C_\bullet^{\text{sing}}(\bigsqcup_{i \in I} X_i) \cong \bigoplus_{i \in I} C_\bullet^{\text{sing}}(X_i)$$

von Kettenkomplexen. Dies induziert die behauptete Zerlegung der Homologie. \square

PROPOSITION 4.2.10. Sei X ein wegzusammenhängender Raum und R ein Ring. Dann gilt $H_0^{\text{sing}}(X, R) \cong R$. Für einen beliebigen Raum X ist $H_0^{\text{sing}}(X, R)$ isomorph zum freien R -Modul auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X .

BEWEIS. Nach Definition ist

$$H_0^{\text{sing}}(X, R) = \text{coker} \left(d_1: C_1^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_0^{\text{sing}}(X) \right).$$

Dabei ist $C_0^{\text{sing}}(X)$ der freie R -Modul auf der Menge der Punkte $x \in X$, und $C_1^{\text{sing}}(X)$ der freie R -Modul auf der Menge der Abbildungen $\gamma: [0, 1] \cong \Delta^1 \rightarrow X$. Die Randabbildung d_1 bildet einen Weg γ auf die formale Differenz $\gamma(1) - \gamma(0)$ ab.

Wir definieren eine Abbildung

$$\epsilon: C_0^{\text{sing}}(X) \rightarrow R: \sum_i n_i [x_i] \mapsto \sum_i n_i.$$

Mit dieser Definition ist $\text{Im } d_1 \subset \ker \epsilon$, da $\epsilon([\gamma(1)] - [\gamma(0)]) = 1 - 1 = 0$ ist. Um zu zeigen, dass $\ker \epsilon \subseteq \text{Im } d_1$ ist, sei $\sum_i n_i [x_i]$ so dass $\sum_i n_i = 0$. Wir wählen einen

Punkt $y \in X$ und Wege $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma_i(0) = y$ und $\gamma_i(1) = x_i$. Für diese Wege gilt $d_1(\gamma_i) = [x_i] - [y]$. Dann haben wir

$$d_1\left(\sum_i n_i[\gamma_i]\right) = \sum_i n_i[x_i] - \sum_i n_i[y] = \sum_i n_i[x_i],$$

also liegt $\sum_i n_i[x_i]$ im Bild von d_1 .

Die zweite Behauptung folgt mit Proposition 4.2.9. \square

PROPOSITION 4.2.11. *Es gilt $H_n^{\text{sing}}(\text{pt}, R) = 0$ für $n > 0$.*

BEWEIS. In $\text{Sing}_\bullet(\text{pt})$ gibt es in jedem simplizialen Grad $n \geq 0$ immer genau ein (ausgeartetes) Simplex, und alle simplizialen Randabbildungen sind die Identität. Der singuläre Komplex $C_\bullet(\text{Sing}(\text{pt}))$ hat dann die Form

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

da $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{id}$. Daraus folgt direkt die Behauptung. \square

DEFINITION 4.2.12. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Unterraum. Dann ist $C_n(\text{Sing}_\bullet(A))$ ein Untermodul in $C_n(\text{Sing}_\bullet(X))$, bestehend genau aus den Linearkombinationen von n -Simplizes, deren Bild in A liegt. Wir definieren den relativen Kettenkomplex für das Paar (X, A)*

$$C_n^{\text{sing}}(X, A) := C_n^{\text{sing}}(X) / C_n^{\text{sing}}(A).$$

Die relative singuläre Homologie für das Paar (X, A) ist definiert durch

$$H_n^{\text{sing}}(X, A; R) := H_n(C_n^{\text{sing}}(X, A))$$

BEMERKUNG 4.2.13. *Insbesondere können wir damit auch (wie nach Lemma 3.1.5) reduzierte Homologie definieren:*

$$\tilde{H}_\bullet^{\text{sing}}(X, R) := \ker(H_\bullet^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow H_\bullet(\text{pt}))$$

definieren und mit relativer Homologie $H_\bullet^{\text{sing}}(X, \{x\})$ identifizieren.

PROPOSITION 4.2.14. *Sei (X, A) ein Raumpaard. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow \cdots$$

Für einen Morphismus $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ gibt es ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}^{\text{sing}}(X, A; R) & \xrightarrow{\partial} & H_n^{\text{sing}}(A; R) & \xrightarrow{i_*} & H_n^{\text{sing}}(X; R) & \xrightarrow{j_*} & H_n^{\text{sing}}(X, A; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}^{\text{sing}}(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial} & H_n^{\text{sing}}(B; R) & \xrightarrow{i_*} & H_n^{\text{sing}}(Y; R) & \xrightarrow{j_*} & H_n^{\text{sing}}(Y, B; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

BEWEIS. Die lange exakte Sequenz folgt direkt aus Definition 4.2.12 und Proposition A.3.7.

Für die Natürlichkeit sehen wir erst, dass f eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_\bullet^{\text{sing}}(A) & \xrightarrow{i_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(X) & \xrightarrow{j_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \rightarrow & C_\bullet^{\text{sing}}(B) & \xrightarrow{i_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(Y) & \xrightarrow{j_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Konstruktion der Randabbildung in Proposition A.3.7 ist natürlich. \square

ÜBUNGSAUFGABE 4.2.15. Sei (X, A, B) ein Tripel von topologischen Räumen, d.h., wir haben Inklusionen von Unterräumen $B \subseteq A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz von singulären Homologiegruppen gibt

$$\cdots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(A, B; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, B; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}^{\text{sing}}(A, B; R) \rightarrow \cdots$$

ÜBUNGSAUFGABE 4.2.16. Zeigen Sie, dass Homologie mit gerichteten Kolimiten vertauscht. Sei X ein topologischer Raum, und $X_i, i \in I$ eine Folge von Unterräumen von X , so dass $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ gilt und eine Menge $U \subset X$ genau dann offen in X ist, wenn für alle i der Durchschnitt $U \cap X_i$ offen in X_i ist. Dann haben wir für jeden Koeffizientenring R einen natürlichen Isomorphismus

$$H_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \cong \text{colim}_i H_{\bullet}^{\text{sing}}(X_i, R).$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Kompaktheit der Standardsimplizes Δ^n .)

4.3. Homotopie-Invarianz

Der Beweis der Homotopieinvarianz ist eine Kombination eines geometrischen Arguments (Zerlegung von $\Delta^n \times [0, 1]$ in Simplizes) und eines algebraischen Arguments (Zerlegung induziert Kettenhomotopie auf singulärem Kettenkomplex).

DEFINITION 4.3.1. Wir zerlegen das Produkt $\Delta^n \times [0, 1]$ eines n -Simplex mit einem Intervall in $(n+1)$ -Simplizes. Die Eckpunkte des Produkts sind in den beiden Seiten $\Delta^n \times \{0\}$ und $\Delta^n \times \{1\}$ enthalten. Wir bezeichnen die Eckpunkte von $\Delta^n \times \{0\}$ mit $[v_0, \dots, v_n]$, und die Eckpunkte von $\Delta^n \times \{1\}$ mit $[w_0, \dots, w_n]$. Dabei sind die Indizes so gewählt, dass v_i und w_i das gleiche Bild unter der Projektion $\Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$ haben.

Das n -Simplex $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$ ist gegeben als Graph der linearen Abbildung

$$\phi_i: \Delta^n \rightarrow [0, 1]: (t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{j=i+1}^n t_j.$$

Es gilt $\phi_i \leq \phi_{i-1}$, und der Bereich zwischen zwei n -Simplizes für aufeinanderfolgende Indizes ist das $n+1$ -Simplex $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$. Wegen $0 = \phi_n \leq \phi_{n-1} \leq \dots \leq \phi_0 \leq \phi_{-1} = 1$ erhalten wir eine Zerlegung von $\Delta^n \times [0, 1]$ in die $(n+1)$ -Simplizes $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$.

DEFINITION 4.3.2. Sei $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Für ein Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ erhalten wir eine Abbildung $F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}): \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1] \rightarrow Y$. Wir definieren die Prismen-Operatoren

$$P: C_n^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(Y, R): \sigma \mapsto \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

PROPOSITION 4.3.3. Sei $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Die Prismen-Operatoren $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{\bullet+1}^{\text{sing}}(Y, R)$ bilden eine Kettenhomotopie zwischen den von f und g induzierten Abbildungen.

BEWEIS. Zu zeigen ist $g_n - f_n = d \circ P_n + P_{n-1} \circ d$. Dabei stehen die Terme g_n und f_n für $\Delta^n \times \{0\}$ und $\Delta^n \times \{1\}$, und die beiden anderen Terme für den Rand des Prisms bzw. $\partial \Delta^n \times [0, 1]$. Es gilt

$$\begin{aligned} d \circ P_n(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\begin{aligned} P_{n-1} \circ d(\sigma) &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Durch die Vorzeichen bleiben von den Termen mit $i = j$ nur

$$\begin{aligned} F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]} &= g_n(\sigma) \\ F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]} &= -f_n(\sigma) \end{aligned}$$

übrig. \square

SATZ 4.3.4 (Homotopieinvarianz). *Sei $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen $f, g: X \rightarrow Y$. Dann gilt für die induzierten Abbildungen $f_* = g_*: H_\bullet^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow H_\bullet^{\text{sing}}(Y, R)$.*

BEWEIS. Folgt direkt aus Proposition 4.3.3 und Proposition A.3.10. \square

ÜBUNGSAUFGABE 4.3.5. *Seien $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zwei Abbildungen, so dass eine Homotopie durch Abbildungen von Raumpaaren zwischen f und g existiert. Dann sind die beiden induzierten Abbildungen gleich:*

$$f_* = g_*: H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y, B; R).$$

4.4. Ausschneidung

SATZ 4.4.1 (Ausschneidung). *Für einen topologischen Raum X gelten die beiden folgenden äquivalenten Aussagen.*

- Für Unterräume $Z \subseteq A \subseteq X$ mit $\bar{Z} \subseteq \mathring{A}$ induziert die Inklusion $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$ von Raumpaaren für alle n Isomorphismen

$$H_n^{\text{sing}}(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X, A).$$

- Für Unterräume $A, B \subseteq X$ mit $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$ induziert die Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ von Raumpaaren für alle n Isomorphismen

$$H_n^{\text{sing}}(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X, A)$$

Für den Beweis werden Simplizes in "kleinere" Simplizes (bezüglich einer offenen Überdeckung von X) zerlegt, um die Teilmenge Z ausschneiden zu können.

DEFINITION 4.4.2. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine Menge von Unterräumen mit $\bigcup_{i \in I} \mathring{U}_i = X$. Wir bezeichnen mit $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_n^{\text{sing}}(X)$ die Untergruppe der Ketten $\sum_i n_i \sigma_i$, so dass für jedes Simplex $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ das Bild in einem der U_i enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, dass die Randabbildung*

$$d: C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n-1}^{\text{sing}}(X)$$

wieder in $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$ landet und wir damit einen Unterkomplex $C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_\bullet^{\text{sing}}(X)$ erhalten. Die Homologiegruppen dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit $H_n^{\mathfrak{U}}(X)$.

BEWEIS VON THEOREM 4.4.1: Die beiden Varianten sind äquivalent, mit $B = X \setminus Z$ bzw. $Z = X \setminus B$. Wir beweisen die zweite Variante. Für $\mathfrak{U} = \{A, B\}$ betrachten wir $C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$, dieser Kettenkomplex wird mit $C_\bullet(A + B)$ bezeichnet (da Elemente Summen von Ketten in A und Ketten in B sind). Die von der Inklusion $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung $C_\bullet^{\text{sing}}(B)/C_\bullet^{\text{sing}}(A \cap B) \rightarrow C_\bullet(A + B)/C_\bullet^{\text{sing}}(A)$ ist offensichtlich ein Isomorphismus, da die entsprechenden Kettengruppen frei von den Simplizes in B , die nicht vollständig in $A \cap B$ liegen, erzeugt werden. Es bleibt also

zu zeigen, dass die Inklusion $C_n(A+B)/C_n^{\text{sing}}(A) \hookrightarrow C_n^{\text{sing}}(X)/C_n^{\text{sing}}(A)$ einen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Dies wird in Proposition 4.4.7 bewiesen. ■

DEFINITION 4.4.3 (baryzentrische Unterteilung). Die baryzentrische Unterteilung von n -Simplizes wird induktiv definiert: Für das von den Eckpunkten v_0, \dots, v_n aufgespannte n -Simplex (im \mathbb{R}^{n+1}) besteht die baryzentrische Unterteilung aus den n -Simplizes $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$, wobei $b = \frac{1}{n+1} \sum_i v_i$ das Baryzentrum des Simplex $[v_0, \dots, v_n]$ ist, und $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ ein $n-1$ -Simplex in der baryzentrischen Unterteilung einer Seitenfläche $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.4. Zeigen Sie, dass die zweifache baryzentrische Unterteilung eines Δ -Komplexes ein Simplicialkomplex ist.

Die baryzentrische Unterteilung kann alternativ mit simplizialen Mengen definiert werden: für das n -Simplex $\Delta^n = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$ betrachten wir die Menge aller nicht-ausgearteten Simplizes von Δ^n . Diese Menge ist vermittle der Inklusion von Simplizes eine partiell geordnete Menge. Wir bezeichnen den Ordnungskomplex dieser partielle geordneten Menge, s. Beispiel 4.1.16, mit $\text{sd } \Delta^n$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.5. Zeigen Sie, dass die affine Abbildung

$$h: |\text{sd } \Delta^n| \xrightarrow{\cong} |\Delta^n|,$$

die einen Eckpunkt $\{w_0, \dots, w_k\}$ von $\text{sd } \Delta^n$ auf das Baryzentrum $\frac{1}{k+1} \sum_i w_i$ des von w_0, \dots, w_k aufgespannten Simplex abbildet, ein Homöomorphismus ist.

Insbesondere ist die geometrische Realisierung von $\text{sd } \Delta^n$ genau die oben beschriebene baryzentrische Unterteilung.

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.6. Für ein Simplex $[v_0, \dots, v_n]$ im \mathbb{R}^{n+1} definieren wir den Durchmesser als

$$\max \{ \|x - y\| \mid x, y \in [v_0, \dots, v_n] \}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass der Durchmesser gleich dem maximalen Abstand zweier Eckpunkte ist. (Dreiecksungleichung!)
- (2) Sei D der Durchmesser des gegebenen Simplex $[v_0, \dots, v_n]$. Zeigen Sie (durch Induktion über n), dass der Durchmesser eines Simplex in der baryzentrischen Unterteilung von $[v_0, \dots, v_n]$ maximal $\frac{n}{n+1} \cdot D$ ist.

Wir diskutieren zuerst die *Baryzentrische Unterteilung linearer Ketten*: Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ eine konvexe Teilmenge. Wir definieren $LC_n^{\text{sing}}(Y) \subseteq C_n^{\text{sing}}(Y)$ als die Untergruppe, die von linearen Simplizes $\sigma: \Delta^n \rightarrow Y$ erzeugt wird. Lineare Simplizes sind durch die Bilder $[w_0, \dots, w_n]$ der Eckpunkte eindeutig bestimmt. Die $LC_n^{\text{sing}}(Y)$ bilden einen Unterkomplex von $C_{\bullet}^{\text{sing}}(Y)$, dessen Randabbildung wir mit ∂ bezeichnen. Wir augmentieren diesen Komplex durch

$$\partial: LC_0^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{-1}(Y) = R: [w_0] \mapsto 1,$$

wobei R der gegebene Koeffizientenring ist. Auf diesem Komplex von linearen Simplizes wollen wir einen Unterteilungsoperator $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$ definieren, der durch baryzentrische Unterteilung gegeben ist, und außerdem zeigen, dass dieser Unterteilungsoperator kettenhomotop zur Identität ist.

Zuerst definieren wir für einen gegebenen Punkt $p \in Y$ einen Kegel-Operator

$$p: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{n+1}^{\text{sing}}(Y): [w_0, \dots, w_n] \mapsto [p, w_0, \dots, w_n],$$

der ein n -Simplex auf den Kegel über diesem Simplex mit Spitze p abbildet. Der Rand dieses Kegels ist

$$\partial p([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - p(\partial[w_0, \dots, w_n]),$$

bestehend aus der Basis und den Kegeln über den Seitenflächen von $[w_0, \dots, w_n]$. Daraus folgt $\partial \circ p + p \circ \partial = \text{id}$, d.h. b ist eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung auf $LC_{\bullet}^{\text{sing}}(Y)$.

Der Unterteilungsoperator $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$ wird nun durch Rekursion über n definiert. Der Rekursionsanfang ist $S = \text{id}$ auf $LC_{-1}^{\text{sing}}(Y)$ und $LC_0^{\text{sing}}(Y)$. Für $n \geq 1$ und ein lineares n -Simplex $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$ sei b_λ das Bild des Baryzentrums von Δ^n unter der Abbildung λ .¹ Wir definieren $S(\lambda) := b_\lambda(S(\partial\lambda))$, wobei hier $b_\lambda: LC_{n-1}^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$ der eben definierte Kegel-Operator für den Punkt b_λ ist. Geometrisch ist $S(\lambda)$ eine Linearkombination der Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von λ . Durch Induktion über n sehen wir, dass der so definierte Unterteilungsoperator $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$ mit den Randabbildungen kompatibel ist. Der Induktionsanfang auf $LC_0^{\text{sing}}(Y)$ ist direkt zu sehen, und für den Induktionsschritt haben wir für ein lineares n -Simplex $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$

$$\partial S\lambda = \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) = S\partial\lambda - b_\lambda(\partial S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda.$$

Die erste Gleichung ist dabei die Definition von S , die zweite folgt aus $\partial \circ b_\lambda + b_\lambda \circ \partial = \text{id}$, in der dritten benutzen wir die Induktionsvoraussetzung, und die vierte folgt aus $\partial^2 = 0$.

Zum Schluss müssen wir noch rekursiv eine Kettenhomotopie $T: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{n+1}^{\text{sing}}(Y)$ zwischen dem Unterteilungsoperator S und der Identität konstruieren. Auf $LC_{-1}(Y)$ setzen wir $T = 0$, und für $n \geq 0$ definieren wir $T(\lambda) = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$. Geometrisch betrachten wir hier eine Unterteilung von $\Delta^n \times [0, 1]$ durch Kegel über Simplizes in $\Delta^n \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times [0, 1]$, deren Spitze das Baryzentrum von $\Delta^n \times \{1\}$ ist. Die Kettenhomotopie $T(\lambda)$ für ein lineares n -Simplex $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$ ist das Bild dieser Unterteilung unter der Projektion $\Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$. Wir zeigen $\partial \circ T + T \circ \partial = \text{id} - S$ durch Induktion über n . Der Basisfall $n = -1$ ist klar, da $T = 0$ und $S = \text{id}$. Für den Induktionsschritt haben wir

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda + T\partial\partial\lambda) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda. \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.4.7. *In der Situation von Definition 4.4.2 ist die Inklusion $\iota: C_{\bullet}^{\text{sl}}(X) \hookrightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, d.h. es gibt eine Abbildung $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sl}}(X)$, so dass $\iota \circ \rho$ und $\rho \circ \iota$ kettenhomotop zur jeweiligen Identitätsabbildung sind. Insbesondere induziert ι Isomorphismen $H_n^{\text{sl}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X)$.*

BEWEIS. Um die Abbildung ρ mit den gewünschten Eigenschaften zu definieren, benutzen wir die zuvor diskutierte baryzentrische Unterteilung linearer Simplizes.

Zuerst definieren wir den allgemeinen Unterteilungsoperator für singuläre Ketten:

$$S: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X): (\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \mapsto \sigma_*(S\Delta^n)$$

als Bild des Unterteilungsoperators in Δ^n unter $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, im Prinzip eine baryzentrische Unterteilung des Bildes von σ . Der Unterteilungsoperator ist kompatibel

¹Alternativ können wir auch den Fall $n = 0$ so behandeln, wenn wir vereinbaren, dass der Kegel mit Spitze p und leerer Grundfläche genau aus der Spitze besteht.

mit den Randabbildungen in $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$:

$$\begin{aligned}\partial S\sigma &= \partial\sigma_*(S\Delta^n) = \sigma_*\partial S\Delta^n = \sigma_*S\partial\Delta^n = \sigma_*S\left(\sum_i(-1)^i\Delta_i^n\right) \\ &= \sum_i(-1)^i\sigma_*(S\Delta_i^n) = \sum_i(-1)^iS(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S\left(\sum_i(-1)^i\sigma|_{\Delta_i^n}\right) = S(\partial\sigma).\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird insbesondere benutzt, dass die Unterteilung für lineare Simplizes im Komplex der linearen Ketten mit der Randabbildung kompatibel ist.

Wir definieren die Abbildung

$$T: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(X): \sigma \mapsto \sigma_*(T\Delta^n)$$

und zeigen, dass diese eine Kettenhomotopie zwischen dem Unterteilungsoperator und der Identität ist:

$$\begin{aligned}\partial T\sigma &= \partial\sigma_*(T\Delta^n) = \sigma_*\partial T\Delta^n = \sigma_*(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_*T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma).\end{aligned}$$

Auch hier ist der entscheidende Schritt wieder die Kettenhomotopie für lineare Simplizes.

Wir können nun den Unterteilungsoperator mehrfach anwenden, und $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$ liefert eine Kettenhomotopie zwischen S^m und der Identität:

$$\begin{aligned}\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (\text{id} - S)S^i \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{id} - S^m.\end{aligned}$$

Nun wenden wir das Lemma von Lebesgue (s. 4.4.8) an: das Standard n -Simplex Δ^n ist mit der von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum, und für ein singuläres Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ erhalten wir eine offene Überdeckung $\sigma^{-1}(U_i)$ aus der gegebenen Überdeckung \mathfrak{U} von X . Nach dem Lemma von Lebesgue 4.4.8 und Übungsaufgabe 4.4.6 existiert dann für das gegebene Simplex σ ein $m(\sigma)$, sodass $S^{m(\sigma)}(\sigma)$ in $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ liegt (der Durchmesser der Simplizes der iterierten baryzentrischen Unterteilung muss unter der Lebesgue-Zahl der Überdeckung von Δ^n liegen).

Wir definieren nun

$$D: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(X): (\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \mapsto D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Das Ziel ist, D als Kettenhomotopie zwischen der Identität auf $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$ und einer Abbildung $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ (zusammengesetzt mit der Inklusion $\iota: C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$) zu verstehen. Wir benutzen dazu die Kettenhomotopie-Gleichung

$$\partial D + D\partial = \text{id} - \rho$$

als Definition für $\rho := \text{id} - \partial D - D\partial$. Das so definierte ρ ist kompatibel mit Randabbildungen

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \rho(\partial\sigma).$$

Wegen $\partial D_{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)}\partial = \text{id} - S^m$ folgt

$$\rho\sigma = \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D(\partial\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma).$$

Der erste Term $S^{m(\sigma)}\sigma$ liegt in $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ nach Definition von $m(\sigma)$. Der zweite Term $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$ ist eine Linearkombination von Termen der Form $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$, wobei σ_j die entsprechende Seite von σ ist. Damit ist $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$ und sind die Terme $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$ Linearkombinationen von $TS^i(\sigma_j)$ mit $i \geq m(\sigma_j)$, und diese liegen in $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$, da T die Gruppe $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$ nach $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ abbildet. Damit haben wir gezeigt, dass D eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Komposition $\iota\rho$ für eine Kettenabbildung $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ ist. Außerdem gilt $\rho\iota = \text{id}$, da für alle Simplizes in $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ gilt $m(\sigma) = 0$, was bedeutet, dass D auf $C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$ gleich null ist. Insbesondere ist ρ ein Kettenhomotopie-Inverses für ι . \square

LEMMA 4.4.8 (Lebesgue). *Sei X ein kompakter metrischer Raum mit Metrik d und sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann existiert eine Zahl $\delta > 0$, so dass jede Menge $A \subseteq X$ mit Durchmesser*

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \delta$$

in einer Teilmenge U_i der Überdeckung enthalten ist.

4.5. Anwendung: Topologie des \mathbb{R}^n

PROPOSITION 4.5.1. (1) *Für eine Einbettung $\iota: D^k \hookrightarrow S^n$ gilt $\tilde{H}_i(S^n \setminus D^k) = 0$ für alle i .*

(2) *Für eine Einbettung $S^k \hookrightarrow S^n$ mit $0 \leq k < n$ gilt*

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n - k - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEIS. (a) Beweis durch Induktion über k . Für $k = 0$ haben wir einen Homöomorphismus $S^n \setminus \iota(D^0) \cong \mathbb{R}^n$. Für den Induktionsschritt benutzen wir, dass D^k und $[0, 1]^k$ homöomorph sind. Wir überdecken $S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$ durch $A = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$ und $B = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$, und haben $A \cap B = S^n \setminus \iota([0, 1]^k)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$ für alle i , und die Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 liefert Isomorphismen

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^k)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$$

für alle i . Eine nicht-triviale Homologiekategorie $\alpha \in \tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^k))$ liefert dann eine nicht-triviale Homologieklasse in A oder B . Wiederholung dieses Arguments liefert eine Sequenz von Intervallen $[0, 1] = I_0 \supset I_1 \supset \dots$ (wobei das Intervall I_j die Länge 2^{-j} hat), so dass die nicht-triviale Homologiekategorie α für alle m in $S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times I_m)$ nicht-trivial ist. Auf der anderen Seite haben wir

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times I_m) = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{t\}),$$

wobei $t \in [0, 1]$ der Konvergenzpunkt der Intervallschachtelung I_m ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{t\})) = 0$. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Homologie mit gefilterten Kolimits vertauscht, cf. Übungsaufgabe 4.2.16.

(2) Induktion über k . Für den Fall $k = 0$ haben wir einen Homöomorphismus $S^n \setminus \iota(S^0) \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$. Für den Induktionsschritt überdecken wir S^k durch zwei Hemisphären D_+^k und D_-^k , die sich im Äquator S^{k-1} schneiden. Wir wenden wieder die Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 auf die Überdeckung von $S^n \setminus \iota(S^k)$ durch $S^n \setminus \iota(D_+^k)$ und $S^n \setminus \iota(D_-^k)$ an. Nach (1) ist $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota(D_{\pm}^k)) = 0$, und wir erhalten Isomorphismen $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota(S^k)) \cong \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus \iota(S^{k-1}))$. \square

BEMERKUNG 4.5.2. Der Spezialfall $n = 1$, $k = 2$ in (b) ist der Jordansche Kurvensatz. Eine einfache Kurve ist eine injektive stetige Abbildung $\gamma: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass das Komplement einer einfachen stetigen Kurve genau zwei (Weg-)Zusammenhangskomponenten hat, eine beschränkte (das Innere) und eine unbeschränkte (das Äußere).

BEMERKUNG 4.5.3. Im Beweis von Proposition 4.5.1 wird (im Kompaktheitsargument) eine Aussage speziell über singuläre Homologie genutzt. Tatsächlich folgt die entsprechende Stetigkeitsaussage aus der Homologietheorie mit gefilterten Kolimits von CW-Komplexen vertauschen schon aus dem Wedge-Axiom (allerdings brauchen wir wirklich das Wedge-Axiom für beliebige Indezsmengen). Eine verwandte Aussage für abzählbare gefilterte Kolimits von CW-Komplexen findet sich in [Hat02, Übungsaufgabe 4.F.1], s. auch MathOverflow Frage 229612 "A homology theory which satisfies Milnor's additivity axiom but not the direct limit axiom". Die Argumente dafür gehen aber über den Stoff der Vorlesung hinaus.

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.4. Berechnen Sie $H^{\text{sing}}(S^n \setminus X)$ für einen Unterraum $X \subset S^n$, der homöomorph zu $S^k \vee S^l$ ist.

PROPOSITION 4.5.5 (Invarianz der Dimension). (1) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen. Wenn U und V homöomorph sind, gilt $n = m$.
 (2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung. Dann ist $f(U)$ offen und f ist ein Homöomorphismus auf $f(U)$.

BEWEIS. (1) Für einen Punkt $x \in U$ haben wir mit dem Ausschneidungsaxiom $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$. Die lange exakte Sequenz (zusammen mit der Homotopieinvarianz für $H_i(\mathbb{R}^m)$) liefert Isomorphismen

$$H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}).$$

Die Sphäre S^{m-1} ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$, also ist

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entsprechend ist $H_n(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$ die einzige nicht-triviale relative Homologiegruppe von $(V, V \setminus \{y\})$. Ein Homöomorphismus $h: U \rightarrow V$ induziert für alle i Isomorphismen

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_i(V, V \setminus \{h(x)\}),$$

also muss $m = n$ gelten.

(2) Wir identifizieren $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{p\}$ und zeigen, dass $f(U) \subseteq S^n \setminus \{p\}$ offen ist. Für jeden Punkt $x \in U$ existiert eine Kreisscheibe $x \in D^n \subset U$, und es reicht zu zeigen, dass $f(D^n \setminus \partial D^n) \subset S^n$ offen ist. Die Abbildung f induziert eine Einbettung $f: \partial D^n \hookrightarrow S^n$ (Homöomorphismus auf das Bild). Nach Proposition 4.5.1 hat $S^n \setminus f(\partial D^n)$ zwei Wegzusammenhangskomponenten $f(D^n \setminus \partial D^n)$ und $S^n \setminus f(D^n)$ (Wegzusammenhang von $S^n \setminus f(D^n)$ folgt auch aus Proposition 4.5.1). Da $S^n \setminus f(\partial D^n)$ offen ist, sind die Wegzusammenhangskomponenten die Zusammenhangskomponenten. Für einen Raum mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten sind die einzelnen Komponenten offen, also ist $f(D^n \setminus \partial D^n)$ offen in $S^n \setminus f(\partial D^n)$ und damit offen in S^n . \square

BEMERKUNG 4.5.6. Allgemein können wir für einen topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$ die lokalen Homologiegruppen definieren:

$$H_{i, \{x\}}(X) := H_i(X, X \setminus \{x\})$$

Mit dem Ausschneidungsaxiom hängen diese lokalen Homologiegruppen nur von der Topologie in einer Umgebung von x ab, daher der Name. Für Mannigfaltigkeiten

sind die lokalen Homologiegruppen in einem Grad konzentriert, und dieser Grad ist genau die Dimension der Mannigfaltigkeit. Mit lokalen Homologiegruppen können Singularitäten studiert werden (Stichwort Milnor-Faser). Mit der lokalen Homologie können wir ausserdem einen topologischen Begriff von Orientierung definieren: für einen Punkt $x \in X$ einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension n ist eine topologische Orientierung die Wahl eines Erzeugers der lokalen Homologiegruppe $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.7. Sei X ein Simplicialkomplex und σ ein Simplex. Dann gibt es Isomorphismen

$$H_i(|X|, |X| \setminus |\sigma|) \cong \tilde{H}_{i-1}(|\text{Lk}_X(\sigma)|).$$

4.6. Transfer und Satz von Borsuk-Ulam

Definition Überlagerung.

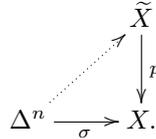
PROPOSITION 4.6.1. Sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine zweifache Überlagerung. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots$$

BEWEIS. Die behauptete lange exakte Sequenz gehört zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen von \mathbb{F}_2 -Vektorräumen:

$$0 \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau} C_{\bullet}^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p} C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Da Δ^n einfach zusammenhängend ist, ist für jede stetige Abbildung $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ die zweifache Überlagerung $p': \Delta^n \times_X \tilde{X} \rightarrow \Delta^n$ trivial. Damit gibt es für alle singulären Simplexe $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ immer genau zwei Anhebungen



Das bedeutet zum Einen, dass die Abbildung $p: C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2)$ surjektiv ist. Andererseits, da jedes singuläre Simplex $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ genau zwei Anhebungen $\tilde{\sigma}_1$ und $\tilde{\sigma}_2$ hat und wir \mathbb{F}_2 -Koeffizienten benutzen, wird der Kern der Abbildung $p: C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2)$ erzeugt von den Summen $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$ der Anhebungen von Simplex σ . Wir definieren

$$\tau: C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2): \sigma \mapsto \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$$

und erhalten damit die behauptete kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. \square

mehr zu Transfer-Homomorphismen?

Eine Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

PROPOSITION 4.6.2 (Satz von Borsuk-Ulam). Eine ungerade Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ hat ungeraden Abbildungsgrad.

BEWEIS. Wir benutzen die Transfer-Sequenz aus Proposition 4.6.1 für die Überlagerung $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Da die Homologie von S^n nur in zwei Graden nichttrivial ist, zerlegt sich die Transfer-Sequenz in viele kurze exakte Sequenzen:

Für $1 < i < n$ haben wir

$$0 = H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{i-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{i-1}^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) = 0$$

Für $i = n$ haben wir

$$0 \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p_* = 0} H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

Hierbei ist τ_* ein Isomorphismus, da sowohl $H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$ als auch $H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$ beide \mathbb{F}_2 -Dimension 1 haben (s. Berechnungen in Übungsaufgabe 3.1.12 und Beispiel 3.4.11) und τ_* injektiv ist. Analog folgt, dass die Randabbildung

$$\partial: H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$$

ein Isomorphismus ist.

Ebenfalls analog erhalten wir für $i = 1$

$$0 \rightarrow H_1^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_0^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau_* = 0} H_0^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_0^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

Eine ungerade Abbildung $f: S^n \rightarrow S^n$ induziert eine Quotientenabbildung $\bar{f}: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Die Abbildungen f und \bar{f} induzieren ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{p} & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \bar{f} \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{p} & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Das rechte Quadrat kommutiert wegen Funktorialität der singulären Kettenkomplexe. Da f Antipodenpunkte auf Antipodenpunkte abbildet, sind die Lifts von $\bar{f}(\sigma)$ die Bilder unter f der Lifts für σ , also kommutiert auch das linke Quadrat. Aus dem kommutativen Diagramm von Kettenkomplexen erhalten wir eine kommutative Leiter von langen exakten Transfer-Sequenzen. Mit dieser Leiter und einer Induktion über i sehen wir, dass alle Abbildungen $f_*: H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$ und $\bar{f}_*: H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$ Isomorphismen sind. Insbesondere ist die Abbildung $f_*: H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$ ein Isomorphismus. Aus der Theorie vom Abbildungsgrad folgt, dass der Abbildungsgrad von f ungerade ist. \square

ÜBUNGSAUFGABE 4.6.3. Berechnen Sie $H_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ mit der Transfersequenz für die Überlagerung $S^\infty \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$.

KOROLLAR 4.6.4. Für jede Abbildung $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit $g(x) = g(-x)$.

BEWEIS. Die Abbildung $f(x) := g(x) - g(-x)$ ist nach Definition ungerade, und wir wollen zeigen, dass ein $x \in S^n$ mit $f(x) = 0$ existiert. Falls keine Nullstelle existiert, können wir die Funktion

$$h: S^n \rightarrow S^{n-1}: x \mapsto h(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

betrachten. Diese Funktion (und ihre Einschränkung auf den Äquator S^{n-1}) ist ungerade, hat also nach einem ungeraden Abbildungsgrad. Da h aber auf ganz S^n , insbesondere auf eine ganzen Hemisphäre definiert ist, muss h nullhomotop sein, ein Widerspruch. Die ursprüngliche Funktion f muss also eine Nullstelle haben. \square

PROPOSITION 4.6.5 (Stone–Tukey, Banach–Steinhaus, ham sandwich theorem). Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ messbare beschränkte Teilmengen. Dann existiert eine Hyperebene in \mathbb{R}^n , die alle A_i gleichzeitig halbiert (d.h. so dass je die Hälfte des Volumens auf jeder Seite der Hyperebene liegt).

BEWEIS. Wir betrachten die Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Für jeden Punkt $p \in S^{n-1}$ haben wir die affinen Hyperebenen, die senkrecht auf dem Ortsvektor von p stehen. Diese Hyperebenen haben eine Orientierung, indem wir festlegen, dass der Ortsvektor zur +-Seite zeigt. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jeden solchen Ortsvektor eine dazu senkrechte Hyperebene, die A_n halbiert. Wenn es mehrere solche Hyperebenen gibt, die A_n halbieren, bilden die Schnittpunkte mit

der Nullpunktsgerechten zum Ortsvektor p aus Monotoniegründen ein Intervall, und wir wählen als Schnittebene diejenige, die zum Mittelpunkt des Intervalls gehört. Auf diese Art erhalten wir für jeden Punkt $p \in S^{n-1}$ genau eine Hyperebene $E(p)$, die senkrecht auf p steht und A_n halbiert.

Wir definieren nun $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, indem die i -te Komponente von $f(p)$ genau durch das Volumen von A_i auf der $+$ -Seite von $E(p)$ gegeben ist. Diese Abbildung ist stetig (im Wesentlichen liegt das daran, dass der Schnitt einer messbaren Menge mit der Hyperebene Volumen 0 hat).

Nach dem Satz von Borsuk-Ulam bzw. Korollar 4.6.4 gibt es einen Punkt p mit $f(p) = f(-p)$. Die Hyperebenen zu p und $-p$ sind gleich, sie unterscheiden sich nur in der Orientierung. Die Aussage $f(p) = f(-p)$ bedeutet dann, dass für jede der Teilmengen A_i das Volumen auf beiden Seiten der relevanten Hyperebene zu p gleich ist, wir haben also eine geeignete Schnitthyperebene gefunden. \square

Radon, Lusternik-Schnirelmann als Korollare bzw. Fairteilung

Grundlagen: Kategorientheorie und homologische Algebra

A.1. Kategorien und Funktoren

DEFINITION A.1.1. Eine Kategorie $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{Hom}_{\mathbf{C}}, \circ)$ ist ein Tupel, wobei

- $\text{Obj}(\mathbf{C})$ eine Ansammlung von Objekten ist,
- $(A, B) \in \text{Obj}(\mathbf{C}) \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ je zwei Objekten die Morphismen von A nach B zuordnet, und
- $\circ: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C): (f, g) \mapsto g \circ f$ eine Kompositionsvorschrift ist, die einem Paar von Morphismen ihre Zusammensetzung zuordnet,

so dass gilt:

- (1) Es gibt einen Identitätsmorphismus $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ für jedes Objekt $A \in \mathbf{C}$, so dass für alle $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ und alle $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ gilt

$$f \circ \text{id}_A = f, \quad \text{id}_A \circ g = g.$$

- (2) Die Komposition \circ ist assoziativ.

BEMERKUNG A.1.2. Die Objekte $\text{Obj}(\mathbf{C})$ bilden nicht notwendigerweise eine Menge. Man kann also auch von der Kategorie der Mengen sprechen.

In der Notation wird oft $\text{Obj}(\mathbf{C})$ mit \mathbf{C} verwechselt. Für $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ kann auch $\mathbf{C}(A, B)$ geschrieben werden.

BEISPIEL A.1.3. • **Set**, die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen

- **Grp**, die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen
- **Vect_K**, die Kategorie der K -Vektorräume mit K -linearen Abbildungen
- **Top**, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

Modifikationen:

- **Top_•**, die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit punktierten Abbildungen
- **Top²**, die Kategorie der Raumpaare (X, A) mit $A \subset X$.
- **Man**, die Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen.
- Für eine Kategorie \mathbf{C} haben wir die Kategorie \mathbf{C}^{op} , bei der einfach die Richtungen der Pfeile vertauscht werden: $\mathbf{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$.
- **Δ** , die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen)
- **Ch(Mod- R)**, die Kategorie der Kettenkomplexe von Rechts- R -Moduln.

□

DEFINITION A.1.4. Sei \mathbf{C} eine Kategorie. Ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt

- Monomorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g_1, g_2: Z \rightarrow X$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ schon $g_1 = g_2$ folgt,

- Epimorphismus, wenn für je zwei Morphismen $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ schon $g_1 = g_2$ folgt,
- Isomorphismus, wenn es eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, so dass $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ gilt.

DEFINITION A.1.5. Ein Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ besteht aus einer Zuordnung

$$F: \text{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$$

und Abbildungen

$$F: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$$

für alle $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, so dass gilt

- (1) $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, und
- (2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ und $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$.

BEMERKUNG A.1.6. Solche Funktoren heißen kovariant. Funktoren $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ heißen kontravariante Funktoren (da die Richtungen der Pfeile umgedreht werden).

BEISPIEL A.1.7. • für Vektorräume: Dualraum, symmetrische Potenz, äußere Potenz von Vektorräumen sind Endofunktoren von \mathbf{Vect}_K . Tensorprodukt ist ein Funktor $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$.

- Derivationen $\text{Der}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$ von \mathbb{R} -Algebren sind ein kontravarianter Funktor $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.
- für Mannigfaltigkeiten: Tangentialraum an einem gewählten Punkt ist ein Funktor $\mathbf{Man}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ von der Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Vektorräume. Tangentialbündel ist ein Endofunktor der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. glatte Abbildungen kontravarianter Funktor von Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R} -Algebren:

$$\mathbf{Man}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}: M \mapsto C^{\infty}(M).$$

- Eine simpliziale Menge ist ein Funktor $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Allgemeiner kann man simpliziale Objekte in anderen Kategorien betrachten.
- Homologie ist ein Funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ von topologischen Räumen in \mathbb{Z} -graduierte abelsche Gruppen.

□

DEFINITION A.1.8 (natürliche Transformationen). Seien \mathbf{C} und \mathbf{D} zwei Kategorien. Eine natürliche Transformation $\alpha: F \Rightarrow G$ zwischen zwei Funktoren $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ordnet jedem Objekt $X \in \mathbf{C}$ einen Morphismus $\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X)$ in \mathbf{D} zu, so dass für alle Morphismen $f: X \rightarrow Y$ in \mathbf{C} das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

BEMERKUNG A.1.9. Für zwei Kategorien \mathbf{C} und \mathbf{D} haben wir eine Funktorkategorie $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$, deren Objekte Funktoren und deren Morphismen natürliche Transformationen sind. Ein natürlicher Isomorphismus zwischen Funktoren ist ein Isomorphismus in der Funktorkategorie.

BEISPIEL A.1.10. • Die Identifikation von $T_p M$ und $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^{\infty}(M), \mathbb{R})$ ist ein Beispiel für eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren $\mathbf{Man}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

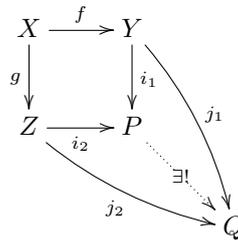
□

adjungierte Funktoren und universelle Eigenschaften: Beispiele Produkte, Quotienten, Kern

DEFINITION A.1.11. Sei \mathbf{C} eine Kategorie. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z.$$

Ein Kolimit für dieses Diagramm (auch Pushout genannt) ist ein Objekt P mit zwei Morphismen $i_1: Y \rightarrow P$ und $i_2: Z \rightarrow P$, so dass für jedes andere Objekt Q und Morphismen $j_1: Y \rightarrow Q$ und $j_2: Z \rightarrow Q$ mit $j_1 \circ f = j_2 \circ g$ ein eindeutiger Morphismus $P \rightarrow Q$ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



BEISPIEL A.1.12. • Die einfachsten Beispiele von Pushouts topologischer Räume sind die disjunkte Vereinigung ($X = \emptyset$) und die Wedge-Summe ($X = \text{pt}$). Allgemein ist der Pushout von topologischen Räumen in der obigen Situation durch

$$(Y \sqcup Z) / \{f(x) \sim g(x) \mid x \in X\}$$

gegeben. Das Ankleben einer n -Zelle an X ist ein Pushout für ein Diagramm der Form

$$D^n \hookrightarrow \partial D^n = S^{n-1} \xrightarrow{\phi} X.$$

- In der Kategorie der Gruppen heißen Pushouts Amalgame/amalgamierte Summen.
- Tensorprodukte sind die Pushouts in der Kategorie der kommutativen Ringe.

□

A.2. Exakte Sequenzen

Im folgenden diskutieren wir grundlegende Eigenschaften exakter Sequenzen. Alle Aussagen gelten für (Links- oder Rechts-)Moduln über einem Ring R mit 1. Für die Vorlesung brauchen wir aber eigentlich nur die Fälle, in denen R ein Körper oder (ein Quotient von) \mathbb{Z} ist.

DEFINITION A.2.1 (exakte Sequenz). (1) Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ heißt exakt an der Stelle B , wenn $\ker(g) = \text{Im}(f)$.
 (2) Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

die an allen Stellen exakt ist. Dies bedeutet insbesondere, dass f injektiv und g surjektiv ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.2.2. Welche abelschen Gruppen A passen in eine kurze exakte Sequenz der folgenden Form?

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

LEMMA A.2.3 (spaltende exakte Sequenzen). *Für eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

von R -Moduln sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) *Es existiert ein R -Modulhomomorphismus $r: C \rightarrow B$ mit $p \circ r = \text{id}_C$.*
- (2) *Es existiert ein R -Modulhomomorphismus $s: B \rightarrow A$ mit $s \circ i = \text{id}_A$.*

BEWEIS. Für die Implikation (2) \Rightarrow (1) sei $s: B \rightarrow A$ ein R -Modulhomomorphismus mit $s \circ i = \text{id}_A$. Wir definieren

$$\tilde{r}: B \rightarrow B: b \mapsto b - i \circ s(b).$$

Dann gilt $\ker p \subset \ker \tilde{r}$: Für ein $b \in \ker p$ existiert $a \in A$ mit $i(a) = b$, also $\tilde{r}(b) = i(a) - i(s(i(a))) = i(a) - i(a) = 0$. Nach dem Homomorphiesatz induziert \tilde{r} einen Homomorphismus $r: C \cong B/\ker p \rightarrow B$, der nach Konstruktion $p \circ r = \text{id}_C$ erfüllt.

Die andere Implikation folgt analog. \square

BEMERKUNG A.2.4. *In diesem Fall sind $A \oplus C \rightarrow B: (a, c) \mapsto i(a) + r(c)$ und $B \rightarrow A \oplus C: b \mapsto (s(b), p(c))$ Isomorphismen, und die Sequenz heißt spaltend.*

ÜBUNGSAUFGABE A.2.5. *Jede kurze exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen über einem Körper spaltet.*

LEMMA A.2.6 (5-Lemma). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ f_A \downarrow & & f_B \downarrow & & f_C \downarrow & & f_D \downarrow & & f_E \downarrow \\ A' & \xrightarrow{a'} & B' & \xrightarrow{b'} & C' & \xrightarrow{c'} & D' & \xrightarrow{d'} & E' \end{array}$$

- (1) *Wenn f_B und f_D injektiv sind und f_A surjektiv, dann ist f_C injektiv.*
- (2) *Wenn f_B und f_D surjektiv sind und f_E injektiv, dann ist f_C surjektiv.*

BEWEIS. (2) Diagrammjagd: Wir wollen zeigen, dass f_C surjektiv ist. Sei $x \in C'$. Da f_D surjektiv ist, existiert $y \in D$ mit $f_D(y) = c'(x)$. Wegen der Kommutativität des letzten Quadrats ist $f_E(d(y)) = d'(c'(x))$. Wegen der Exaktheit der unteren Zeile ist $d'(c'(x)) = 0$. Wegen Injektivität von f_E ist $d(y) = 0$. Es existiert also ein $z \in C$ mit $c(z) = y$. Wegen der Kommutativität des dritten Quadrats ist $c'(f_C(z)) = f_D(c(z)) = f_D(y) = c'(x)$. Insbesondere ist $x - f_C(z) \in \ker c'$, und es reicht zu zeigen, dass $x - f_C(z)$ im Bild von f_C liegt.

Da $x - f_C(z) \in \ker c'$ ist, existiert ein $u \in B'$ mit $b'(u) = x - f_C(z)$. Wegen Surjektivität von f_B existiert $v \in B$ mit $f_B(v) = u$. Dann gilt $f_C(b(v)) = b'(f_B(v)) = b'(u) = x - f_C(z)$, und das gewünschte Urbild von $x - f_C(z)$ ist $b(v)$. \square

ÜBUNGSAUFGABE A.2.7 (Schlangenlemma). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) \xrightarrow{\partial} \text{coker}(f) \rightarrow \text{coker}(g) \rightarrow \text{coker}(h),$$

wobei $\partial(x) \in \ker h$ das eindeutige Urbild von $g(y)$ für ein gewähltes $y \in B'$ mit $p(y) = x$ ist. Wenn $A' \rightarrow B'$ injektiv ist, dann auch $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$. Wenn $B \rightarrow C$ surjektiv ist, dann auch $\operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h)$.

ÜBUNGSAUFGABE A.2.8 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz). Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{c_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{a_k} & B_k & \xrightarrow{b_k} & C_k & \xrightarrow{c_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{a_{k-1}} & \cdots \\ & & \downarrow f_{A,k} & & \downarrow f_{B,k} & & \downarrow f_{C,k} & & \downarrow f_{A,k-1} & & \\ \cdots & \xrightarrow{c'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{a'_k} & B'_k & \xrightarrow{b'_k} & C'_k & \xrightarrow{c'_k} & A'_{k-1} & \xrightarrow{a'_{k-1}} & \cdots \end{array}$$

Sei $f_{C,k}: C_k \rightarrow C'_k$ ein Isomorphismus. Wir definieren $\Delta_k: B'_k \rightarrow A_{k-1}$ als $\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k$. Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k}, -a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k + f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \rightarrow \cdots$$

A.3. Homologische Algebra

DEFINITION A.3.1. Sei R ein Ring. Ein algebraischer Kettenkomplex

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

von R -Moduln besteht aus einer Sequenz C_n , $n \in \mathbb{Z}$, von R -Moduln und R -Modulhomomorphismen $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$, den Randabbildungen, so dass $d_n \circ d_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

Ein Homomorphismus $f_\bullet: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$ von Kettenkomplexen von R -Moduln besteht aus einer Sequenz $f_n: C_n \rightarrow C'_n$ von R -Modulhomomorphismen, so dass für alle n das entsprechende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ d_n \downarrow & & \downarrow d'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

Für einen Ring R bilden die Kettenkomplexe von R -Moduln mit Homomorphismen von Komplexen eine Kategorie, die mit $\mathbf{Ch}(R\text{-mod})$ bezeichnet wird.

DEFINITION A.3.2. Für einen Kettenkomplex (C_\bullet, d) definieren wir die Homologie

$$H_n(C_\bullet, d) := \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}.$$

Für einen Homomorphismus $f_\bullet: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$ von Kettenkomplexen erhalten wir induzierte Abbildungen

$$f_*: H_n(C_\bullet, d) \rightarrow H_n(C'_\bullet, d').$$

ÜBUNGSAUFGABE A.3.3. Zeigen Sie, dass Definition A.3.2 einen Funktor $H_n: \mathbf{Ch}(R\text{-mod}) \rightarrow R\text{-mod}$ definiert.

BEMERKUNG A.3.4. homologische vs. kohomologische Graduierung

DEFINITION A.3.5. Sei $0 \rightarrow (A_\bullet, d_A) \rightarrow (B_\bullet, d_B) \rightarrow (C_\bullet, d_C) \rightarrow 0$ eine Sequenz von Homomorphismen von Kettenkomplexen von R -Moduln. Die Sequenz heißt exakt, wenn für jedes n die entsprechende Sequenz $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.6. Kern und Bild für Kettenkomplexe und übliche Formeln

PROPOSITION A.3.7. Sei $0 \rightarrow (A_\bullet, d_A) \xrightarrow{f} (B_\bullet, d_B) \xrightarrow{g} (C_\bullet, d_C) \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann gibt es eine lange exakte Homologie-Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet, d_A) \xrightarrow{f_*} H_n(B_\bullet, d_B) \xrightarrow{g_*} H_n(C_\bullet, d_C) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

Die Randabbildung ist natürllich für Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen.

BEWEIS. Die Abbildungen f_* und g_* sind die von f bzw. g induzierten Abbildungen auf der Homologie.

Für die Beschreibung der Randabbildung $\partial_{n+1}: H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \rightarrow H_n(A_\bullet, d_A)$ betrachten wir die Abbildung $\partial: \ker d_C \rightarrow \operatorname{coker} d_A$ aus Lemma A.2.7 für das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_A & & \downarrow d_B & & \downarrow d_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Für $c \in \ker d_{C,n}$ ist $\partial c \in \ker d_{A,n-1}$, da die Abbildung $f_{n-2}: A_{n-2} \rightarrow B_{n-2}$ injektiv ist und die Komposition $B_n \xrightarrow{d_B} B_{n-1} \xrightarrow{d_B} B_{n-2}$ die Nullabbildung ist. Für $c \in \operatorname{Im} d_{C,n+1}$ können wir ein Urbild $b \in B_{n+1}$ wählen, dann ist $d_B(b)$ ein Lift für $c \in C_n$. Dann ist $d_B^2(b) = 0$, also $\partial(c) = 0$. Insbesondere induziert die Randabbildung $\partial: \ker d_C \rightarrow \operatorname{coker} d_A$ eine wohldefinierte Abbildung $\partial_{n+1}: H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \rightarrow H_n(A_\bullet, d_A)$.

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle $H_n(A_\bullet, d_A)$. Zuerst sehen wir, dass $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \ker f_*$: um $f_* \circ \partial(c)$ zu berechnen, wählen wir $b \in B_{n+1}$ mit $g(b) = c$. Dann ist $f_* \circ \partial(c) = d_B(b)$, dies liegt im Bild von d_B , hat also triviale Homologiekategorie. Für die umgekehrte Inklusion $\ker f_* \subseteq \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$ betrachten wir $a \in \ker d_A \subseteq A_n$ mit $f(a) = d_B(b)$ für ein $b \in B_{n+1}$. Dann ist $d_C(g(b)) = g(d_B(b)) = g(f(a)) = 0$, und nach Definition der Randabbildung ist $\partial_{n+1}(g(b)) = a$.

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle $H_n(B_\bullet, d_B)$. Wir sehen direkt, dass $g_* \circ f_* = 0$, da wir eine exakte Sequenz von Komplexen haben. Für die andere Richtung sei $b \in B_n$ ein Repräsentant einer Homologiekategorie in $\ker g_*$, d.h., es existiert ein $c \in C_{n+1}$ mit $d_C(c) = g(b)$. Da $g_{n+1}: B_{n+1} \rightarrow C_{n+1}$ surjektiv ist, existiert ein Lift $\tilde{b} \in B_{n+1}$ von c . Es gilt $g_n(b - d_B(\tilde{b})) = g_n(b) - g_n(d_B(\tilde{b})) = g_n(b) - d_C(g_n(\tilde{b})) = g_n(b) - d_C(c) = 0$. Damit ist $b - d_B(\tilde{b}) = f(a)$ für ein $a \in A_n$. Es gilt $f(d_A(a)) = d_B(f(a)) = d_B(b - d_B(\tilde{b})) = d_B(b) = 0$, also ist $d_A(a) = 0$. Die Homologiekategorie von a ist das gesuchte Urbild der Homologiekategorie von b .

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle $H_n(C_\bullet, d_C)$. Wir sehen zuerst, dass $\operatorname{Im} g_* \subseteq \ker \partial_n$: für $b \in \ker d_B$ ist $\partial_n(g(b)) = 0$ nach Definition. Um die Inklusion $\ker \partial_n \subseteq \operatorname{Im} g_*$ zu zeigen, sei $c \in C_n$ eine Repräsentant einer Homologiekategorie in $\ker \partial_n$, d.h. $\partial(c) = d_A(a)$ für ein $a \in A_n$. Für einen Lift $b \in B_n$ von c ist $d_B(b - f(a)) = d_B(b) - d_B(f(a)) = d_B(b) - f(d_A(a)) = 0$ (der letzte Schritt nach Definition der Abbildung aus Lemma A.2.7). Ausserdem ist $g(b - f(a)) = g(b) - g(f(a)) = g(b) = c$, damit ist die Homologiekategorie von $b - f(a)$ das gesuchte Urbild der Homologiekategorie von c . \square

DEFINITION A.3.8. Seien $f, g: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$ zwei Homomorphismen von Kettenkomplexen. Eine Kettenhomotopie zwischen f und g ist eine Sequenz von Abbildungen $h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$ so dass für alle n gilt

$$f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ h_n$$

Die Abbildungen f und g heißen homotop, wenn es eine Kettenhomotopie zwischen f und g gibt. Abbildungen, die homotop zur Nullabbildung sind, heißen nullhomotop.

Eine Abbildung $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$ von Kettenkomplexen heißt Kettenhomotopieäquivalenz, wenn es eine Abbildung $g: C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$ gibt, so dass die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ kettenhomotop zur jeweiligen Identitätsabbildung sind.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.9. Zeigen Sie, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation zwischen Homomorphismen von Kettenkomplexen induziert.

PROPOSITION A.3.10. Seien $f, g: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$ zwei homotope Homomorphismen von Kettenkomplexen. Dann sind die induzierten Abbildungen gleich:

$$f_* = g_*: H_n(C_\bullet, d) \rightarrow H_n(C'_\bullet, d')$$

BEWEIS. Sei $h_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_{\bullet+1}$ eine Kettenhomotopie, und sei $z \in C_n$ ein Repräsentant von $\bar{z} \in H_n(C_\bullet, d)$. Mit $d_n(z) = 0$ haben wir

$$f(z) - g(z) = h_{n-1}(d_n(z)) + d'_{n+1}(h_n(z)) = d'_{n+1}(h_n(z))$$

Die rechte Seite ist aber nach Definition 0 in $H_n(C'_\bullet, d')$, also folgt $f_*(z) = g_*(z)$. \square

ÜBUNGSAUFGABE A.3.11. Sei G eine Gruppe. Wir betrachten den Kettenkomplex (B_\bullet, ∂) , wobei

- B_n ist für $n \geq 0$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge $G^{\times(n+1)}$, die Erzeuger sind also geordnete $n+1$ -Tupel von Elementen aus G .
- Die Randabbildung $\partial: B_n \rightarrow B_{n-1}$ ist gegeben durch $\partial = \sum_i (-1)^i d_i$ mit $d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$; dabei bezeichnet \hat{g}_i , dass das i -te Element g_i weggelassen wird.
- Zusätzlich haben wir noch eine Kopie von \mathbb{Z} im Grad -1 , und die Augmentierungsabbildung $\partial_0: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}: g \mapsto 1$.

Zeigen Sie, dass der obige augmentierte Kettenkomplex für G azyklisch ist, d.h. $H_\bullet(B_\bullet, \partial) = 0$, indem Sie eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung konstruieren.

Abbildungskegel und Zylinder

(ein bisschen was zu Auflösungen, so viel, dass wir Tor und Ext für abelsche Gruppen haben)

Literatur

- [Gal79] D. Gale. “The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem”. In: *American Mathematical Monthly* 86 (10 1979), S. 818–827.
- [Ghr14] Robert Ghrist. *Elementary applied topology*. 2014, S. vi+269. ISBN: 978-1-5028-8085-7.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, S. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- [Sch86] S.H. Schanuel. “What is the length of a potato? An introduction to geometric measure theory”. In: *Categories in Continuum Physics*. Bd. 1174. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1986, S. 118–126.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Bd. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, S. xiv+450. ISBN: 0-521-43500-5; 0-521-55987-1. DOI: 10.1017/CB09781139644136. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09781139644136>.