Bergische Universität Wuppertal Sommersemester 2019
Fakultät 4, Mathematik und Informatik
Dr. Matthias Wendt

Seminar Topologie: Charakteristische Klassen

Liste der Vorträge.

(1) **Einführung und Überblick** *Termin 5. April*;
Erinnerung Klassifikationssatz für relle und komplexe Vektorbündel, Überblick zur Konstruktion von Chern- und Stiefel–Whitney-Klassen. Anwendungen.

(2) **Axiome für Stiefel–Whitney-Klassen und erste Anwendungen** [MS74, Kapitel 4 bis Theorem 4.8] *Termin 26. April*
Diskussion der Axiome für Stiefel–Whitney-Klassen. Damit können bereits Stiefel–Whitney-Klassen berechnet werden. Anwendungen auf Divisionsalgebren und Immersionen. Lemma 4.3 wird später bewiesen (Spezialfall der Berechnung für Grassmann–Mannigfaltigkeiten)

(3) **Thom-Isomorphismus und Gysin-Sequenz** [MS74, Kapitel 10, insbesondere 10.2 und 10.4, und Theorem 12.2] *Termin 3. Mai*
Beweis Thom-Isomorphismus (detailliert für $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, Theorem 10.2, die Version mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in Theorem 10.4 muss nicht detailliert bewiesen werden), Beweis für Gysin-Sequenz Theorem 12.2 (die Beziehung zur Euler-Klasse muss hier noch nicht hergestellt werden).

(4) **Kohomologie der Grassmann-Mannigfaltigkeiten** *Termin 17. Mai*
Beschreibung von $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n),\mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Für den Beweis gibt es verschiedene Möglichkeiten. Für die komplexen Grassmannschen kann man die Zellzerlegung durch Schubert-Varietäten benutzen. Auch Milnor–Stashef [MS74, Kapitel 6-7] argumentieren über die Zellstruktur für $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$. Hatcher [Hat01, Theorem 4D.4] berechnet die Kohomologie mit dem Satz von Leray–Hirsch. In Brown [Bro82] findet sich ein elegantes Argument, das nur die Gysin-Sequenz benutzt.

(5) **Existenz und Eindeutigkeit der Stiefel–Whitney-Klassen** [MS74, Theorem 7.3, Kapitel 8] *Termin 24. Mai*

(6) **Orientierungen auf Vektorbündeln und Eulerklasse** [MS74, Kapitel 9] *Termin 7. Juni*
Definition von Orientierung für Vektorbündel (und Mannigfaltigkeiten). Definition der Eulerklasse, Identifikation der Abbildung in der Gysin-Sequenz als Multiplikation mit der Eulerklasse (evtl Theorem 12.5: Eulerklasse als Hindernis für die Existenz eines nirgends verschwindenden Schnittes)

(7) **Chern-Klassen für komplexe Vektorbündel** [MS74, Kapitel 14] Für die Konstruktion der Chern-Klassen gibt es zwei Varianten: Eulerklasse und Stabilisierung (wie in Milnor–Stasheff) oder Spaltungsprinzip (Grothendieck). Whitney-Summenformel und Formel für konjugierte Bündel. (alternative Beweise in [Bro82])

(8) **Rationale Kohomologie der reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten und Pontryagin-Klassen** [MS74, Kapitel 15]
Definition der Pontryagin-Klassen, Whitney-Summenformel (einfacher zu beschreiben, wenn auch ungerade Chern-Klassen korrekt berücksichtigt werden). Beschreibung $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n),\mathbb{Q})$ (2-Torsion kompliziert)

(9) **Anwendung Pontryagin-Klassen**
Nichtexistenz von fast komplexer Struktur auf S^{4k} (z.B. `arXiv:1707.03883`). Signatur-Satz von Hirzebruch. Milnors exotische Sphären.

Literatur

[Bro82] E.H. Brown, jr. The cohomology of $\mathrm{B\,SO}_n$ and $\mathrm{B\,O}_n$ with integer coefficients. Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 283–288.

[Hat01] A. Hatcher: *Algebraic Topology*, online unter `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/` oder bei Cambridge University Press, 2001.

[Hus74] D. Husemoller: *Fibre bundles*, Graduate Texts in Mathematics no. 20, Springer, 1974.

[MS74] J. Milnor and J. Stasheff: *Characteristic Classes*, Annals of Mathematical Studies No. 76, Princeton University Press 1974.

[Swi75] R. M. Switzer: *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, Springer, 1975.