Skript zur Vorlesung
Analysis auf Mannigfaltigkeiten
Sommersemester 2019

Matthias Wendt

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Disclaimer: Wie üblich bei Vorlesungsmitschriften beruht nichts im folgenden Skript auf eigenen wissenschaftlichen Leistungen, Einsichten oder Ergebnissen. Sowohl Definitionen als auch Formulierungen und Beweise für Sätze sind meist das Produkt von ursprünglich vage formulierten Ideen, die durch vielfache Umformulierungen und Kontextveränderungen über Jahrzehnte zu den heute verwendeten Konzepten herangewachsen sind. Insofern können konkrete Zuschreibungen von Fragestellungen, Begriffen, Sätzen oder Beweistechniken üblicherweise nicht vorgenommen werden. (Außerdem stellt sich überraschend oft heraus, dass die üblicherweise mit Sätzen oder Begriffen verknüpften Namen nicht unbedingt die zentralen Entwicklungen des Begriffs reflektieren.)

Das Material des Vorlesungsskripts beruht überwiegend auf gängigen Lehrbüchern zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten bzw. zur Differentialtopologie. Hauptsächlich verwendet wurden die Bücher von Tu [Tu11], Conlon [Con01], Milnor [Mil97] und Hirsch [Hir94]. Die einzige Eigenleistung beschränkt sich daher auf Tipp-, Index-, Logik- und andere Fehler, fragwürdige Anordnung des Materials sowie falsche Schwerpunktsetzungen. (Vermutlich sind allerdings viele meiner Fehler auch von anderen Leuten bereits gemacht worden; damit kann ich leben.)

Vielen Dank an Herrn Jochen Herzhoff für viele hilfreiche Korrekturvorschläge.

KAPITEL 2

Topologische Mannigfaltigkeiten: Definitionen und Beispiele

2.1. Grundlagen Topologie

def:top-space

Definition 2.1.1 (topologischer Raum). *Ein* topologischer Raum *ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X, den sogenannten* offenen Mengen, *so dass*

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
(2) für eine Menge $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{O}$ ist $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$, d.h. Vereinigungen von beliebig vielen offenen Mengen sind wieder offen,
(3) für $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$, d.h. endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Die Mengen der Form $X \setminus U$ für $U \subset X$ heißen abgeschlossene Mengen. *Für einen Punkt $x \in X$ heißen die offenen Mengen $U \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$* offene Umgebungen von x.

Bemerkung 2.1.2. *(1) In der Notation wird üblicherweise $\mathcal{O}$ weggelassen.*
(2) Es gibt noch andere (aber äquivalente) Definitionen von topologischen Räumen, zum Beispiel durch Konvergenz (näher an der Analysis).

ex:top-space

Beispiel 2.1.3. *(1) Sei X eine Menge. Die* diskrete Topologie *auf X ist durch $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ definiert. Die* indiskrete Topologie *ist durch $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ definiert. Die* kofinite Topologie auf X *hat als offene Mengen genau die Komplemente der endlichen Teilmengen in X.*
(2) Für einen metrischen Raum (X, d) sind die offenen Mengen wie in der Analysis-Vorlesung definiert: eine Menge $U \subseteq X$ ist offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass die ϵ-Umgebung

$$\mathrm{B}(x;\epsilon) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$$

in U enthalten ist. Dies definiert die metrische Topologie, *ein Spezialfall ist insbesondere die "normale" euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n$.*
(3) Für eine total geordnete Menge $(X, \leq)$ ist die Ordnungstopologie *auf X gegeben durch die Basis aus den Mengen*

$$\begin{aligned} (a,\infty) &= \{b \in X \mid b > a\} \\ (-\infty,b) &= \{a \in X \mid a < b\} \\ (a,b) &= (a,\infty) \cap (-\infty,b) \end{aligned}$$

Für $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Anordnung stimmt die Ordnungstopologie mit der euklidischen Topologie überein.

□

Übungsaufgabe 2.1.4. *(1) Zeigen Sie, dass in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ Schnitte von endlich vielen offenen Mengen wieder offen sind. Geben Sie zwei Beispiele an, dass der Schnitt von unendlich vielen offenen Mengen nicht unbedingt offen sein muss.*

(2) Formulieren Sie eine Definition von topologischem Raum, die nur abgeschlossene Mengen benutzt und zeigen Sie, dass diese Definition äquivalent zu Definition def:top-space *2.1.1 ist.*

Definition 2.1.5 (Unterraum). *Sei $(X, \mathcal{O}(X))$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge von X. Dann definiert $\mathcal{O}(Y) = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$ eine Topologie auf Y, und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ heißt* Unterraum *von X. Wenn $Y \in \mathcal{O}(X)$ ist, spricht man von* offenem Unterraum, *wenn $X \setminus Y \in \mathcal{O}(X)$ von* abgeschlossenem Unterraum.

Definition 2.1.6 (stetige Abbildung). *Seien $(X, \mathcal{O}(X))$ und $(Y, \mathcal{O}(Y))$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ (von Mengen) heißt* stetige Abbildung, *wenn für alle offenen Mengen $U \in \mathcal{O}(Y)$ gilt $f^{-1}(\mathcal{O}(X))$.*

Beispiel 2.1.7. *(1) Für eine Menge X ist die Abbildung*

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{P}(X)) \to (X, \{\emptyset, X\})$$

stetig. Allgemeiner: für zwei Topologien $(X, \mathcal{O}_1)$ und $(X, \mathcal{O}_2)$ auf derselben Menge X heißt $\mathcal{O}_1$ feiner *als $\mathcal{O}_2$ (bzw. $\mathcal{O}_2$ ist* gröber *als $\mathcal{O}_1$), wenn die Identität $\mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ stetig ist.*

(2) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räumen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f stetig für die metrischen Topologien auf X bzw. Y aus Beispiel ex:top-space *2.1.3 (2) genau dann, wenn das aus der Analysis bekannte ϵ-δ-Kriterium erfüllt ist.*

□

Definition 2.1.8 (Homöomorphismus). *Seien X und Y topologische Räume. Eine Bijektion $f : X \to Y$ heißt* Homöomorphismus, *wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Die beiden Räume X und Y heißen* homöomorph, *wenn es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.*

Definition 2.1.9 (Hausdorff-Raum). *Ein topologischer Raum X heißt* Hausdorff-Raum, *wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ offene Umgebungen U_x von x und U_y von y existieren, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.*

Beispiel 2.1.10. *(1) Die kofinite Topologie auf einer Menge X ist genau dann hausdorffsch, wenn X endlich ist.*

(2) Metrische Räume mit der metrischen Topologie sind Hausdorff-Räume.

(3) Ein Unterraum eines Hausdorff-Raums ist wieder ein Hausdorff-Raum.

□

Definition 2.1.11 (Abzählbarkeitsaxiome). *Sei X ein topologischer Raum.*

(1) Erstes Abzählbarkeitsaxiom: für jeden Punkt $x \in X$ existiert eine Folge von offenen Umgebungen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass für jede offene Umgebung V von x ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, für das $U_n \subset V$ gilt.

(2) Zweites Abzählbarkeitsaxiom: es existiert eine abzählbare Basis der Topologie auf X, d.h. es gibt eine abzählbare Menge $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ von offenen Mengen in X, so dass jede offene Menge in X als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ geschrieben werden kann.

Bemerkung 2.1.12. *Eine erste axiomatische Definition des Begriffs* topologischer Raum *wurde von Felix Hausdorff in "Grundzüge der Mengenlehre" vorgenommen. Die Terminologie "Abzählbarkeitsaxiom" erinnert noch daran.*

Beispiel 2.1.13. *Metrische Räume, die eine abzählbare dichte Teilmenge haben, erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Lokal kompakte Hausdorff-Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen sind metrisierbar.* □

Definition 2.1.14. *Ein topologischer Raum X heißt* zusammenhängend, *wenn es keine diskunkte Zerlegung von X in nichtleere offene Teilmengen gibt.*

Definition 2.1.15 (Kompaktheit). *Ein topologischer Raum X heißt* kompakt, *wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung existiert.*

Beispiel 2.1.16. *Der Satz von Heine–Borel besagt, dass die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen im $\mathbb{R}^n$ genau die kompakten Teilmengen sind. Insbesondere ist die Einheitskreislinie $\mathrm{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ kompakt, aber $\mathbb{R}^n$ nicht.* □

Definition 2.1.17 (Parakompaktheit). *Sei X ein topologischer Raum. Eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ heißt* lokal endlich, *wenn es für jeden Punkt eine offene Umgebung $V \subseteq M$ gibt, so dass $V \cap U_i \neq \emptyset$ nur für endlich viele $i \in I$ gilt.*

Eine Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ heißt Verfeinerung einer Überdeckung $\{U_j\}_{j\in J}$, *wenn für jede Teilmenge V_i ein Index $j \in J$ existiert, so dass $V_i \subseteq U_j$.*

Ein topologischer Raum X heißt parakompakt, *wenn jede Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat.*

Beispiel 2.1.18. *Ein Beispiel für eine nicht lokal endliche Überdeckung von $\mathbb{R}$ ist $\{(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_{>0}\}$.* □

2.2. Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 2.2.1 (lokal euklidischer Raum). *Ein topologischer Raum X heißt* lokal euklidisch, *wenn für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U \subset X$ existiert, so dass es einen Homöomorphismus $\phi\colon U \xrightarrow{\cong} W$ auf eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{R}^n$ gibt.*

Übungsaufgabe 2.2.2.
1. *Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $\epsilon > 0$ ein Homöomorphismus $\mathrm{B}(x;\epsilon) \cong \mathbb{R}^n$ existiert.*
2. *Welche der folgenden Räume sind hausdorffsch/lokal euklidisch/erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom?*
   - (a) *offene Unterräume $U \subset \mathbb{R}^n$*
   - (b) *$X = \mathbb{R}^n \sqcup \{*\}$, so dass eine Teilmenge $U \subset X$ offen ist wenn i) $* \notin U$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen oder ii) $* \in U$ und $U \setminus \{*\} \subset \mathbb{R}^n$ offen.*
   - (c) *Alexandroff-Gerade (lange Gerade): zwei Kopien der Ordnungstopologie auf $\omega_1 \times [0,1)$ identifiziert an $(0,0)$.*
   - (d) *die Teilmenge $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$ mit der Unterraumtopologie.*

Satz 2.2.3 (Invarianz der Dimension). *Gegeben seien offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$. Wenn U und V homöomorph sind, dann ist schon $n = m$.*

Bemerkung 2.2.4. *Der Satz über die Invarianz der Dimension geht um einiges über die Methoden der Vorlesung hinaus. Beweisen kann man den Satz mit den Werkzeugen aus der Vorlesung "Topologie I", insbesondere der relativen Homologie. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $x \in U$ berechnet man*

$$\mathrm{H}_k(U, U\setminus\{x\}, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, n \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die relative Homologie $\mathrm{H}_k(U, U\setminus\{x\})$ *kennt also die Dimension der offenen Teilmenge* U *bzw. des umgebenden* $\mathbb{R}^n$*. Die Homöomorphie-Invarianz der Homologie impliziert dann die Invarianz der Dimension.*

Proposition 2.2.5. *Sei* X *ein lokal euklidischer Raum. Dann ist die lokale Dimension eine wohldefinierte und lokal konstante Funktion* $d\colon X \to \mathbb{N}$*. Wenn* X *zusammenhängend ist, dann ist die lokale Dimension konstant.*

Beweis. Für einen Punkt $x \in X$ definieren wir die lokale Dimension als $d(x) := n$, wenn ein Paar (U, ϕ) bestehend aus einer offenen Menge $U \subseteq X$ und einem Homöomorphismus $\phi\colon U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert. Nach Definition von lokal euklidischen Räumen existiert mindestens ein Paar (U, ϕ).

Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, seien $U, V \subseteq X$ offene Umgebungen von x, mit Homöomorphismen $\phi\colon U \to \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi\colon V \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^m$. Für den Schnitt $U\cap V$ sind dann auch $\phi(U\cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi(U\cap V)\subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Aus dem Satz über die Invarianz der Dimension, angewendet auf den Homöomorphismus

$$\phi\circ\psi^{-1}\colon \psi(U\cap V) \xrightarrow{\cong} \phi(U\cap V),$$

folgt $n = m$. Damit ist insbesondere die lokale Dimension wohldefiniert.

Nach Definition existiert für jeden Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x und ein Homöomorphismus $U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, so dass insbesondere die lokale Dimension auf U konstant n ist. Damit ist die lokale Dimension lokal konstant. Wenn X ein zusammenhängender Raum ist, muss die lokale Dimension bereits konstant sein. □

Definition 2.2.6 (Topologische Mannigfaltigkeit). *Ein topologischer Raum* X *heißt* topologische Mannigfaltigkeit *(der Dimension* n*), wenn* X *Hausdorff und lokal euklidisch (von Dimension* n*) ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.*

Eine Karte *für die topologische Mannigfaltigkeit* X *ist ein Paar* (U, ϕ) *bestehend aus einer offenen Teilmenge* $U \subseteq X$ *und einem Homöomorphismus* $\phi\colon U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$*. Ein* Atlas *für* X *ist eine Menge von Karten* $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$*, so dass* $\{U_i\}_{i\in I}$ *eine offene Überdeckung von* X *ist, d.h.* $\bigcup_{i\in I} U_i = M$*. Für zwei Karten* (U,ϕ) *und* (V,ψ) *heißt der dazugehörige eingeschränkte Homöomorphismus*

$$\phi\circ\psi^{-1}\colon \psi(U\cap V) \xrightarrow{\psi^{-1}} U\cap V \xrightarrow{\phi} \phi(U\cap V)$$

der Kartenwechsel.

2.3. Beispiele

ex:nsphere

Beispiel 2.3.1. *Die* n*-dimensionale Einheitssphäre*

$$\mathrm{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\}$$

ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Die Topologie ist die Unterraumtopologie, die von der Einbettung in $\mathbb{R}^{n+1}$ *induziert wird. Insbesondere ist* S^n *mit der Unterraumtopologie hausdorffsch und erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Einen Atlas erhält man mit der stereographischen Projektion: für das Komplement $\mathrm{S}^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}$ *des Nordpols gibt die stereographische Projektion auf die Koordinatenebene* $\{(x_1,\dots,x_n,0)\mid x_i\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}^n$ *eine Abbildung*

$$\mathrm{S}^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}\to\mathbb{R}^n\colon (x_1,\dots,x_{n+1})\mapsto\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right).$$

Eine Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n\to\mathrm{S}^n\setminus\{(0,\dots,0,1)\}\colon (x_1,\dots,x_n)\mapsto\left(\frac{2x_1}{\|x\|^2+1},\dots,\frac{2x_n}{\|x\|^2+1},\frac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right).$$

Aus den Formel ist dann direkt zu sehen, dass beide Abbildungen stetig sind; wir haben also einen Homöomorphismus $\mathrm{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$. *Analog erhält man eine Abbildung* $\mathrm{S}^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$ *vom Komplement des Südpols, indem die Nenner in der obigen Formel durch* $1 + x_{n+1}$ *ersetzt; für die Umkehrfunktion muss nur der letzte Term mit* -1 *multipliziert werden.*

Damit haben wir also einen Atlas, der zeigt, dass S^n *eine topologische Mannigfaltigkeit ist.* □

Bemerkung 2.3.2. *In der Kartographie gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Erdoberfläche auf Karten zu projizieren. Die bekannte Mercator-Projektion ist winkeltreu. Sie ist aber weder flächentreu (zu erkennen daran, dass Grönland auf der typischen Mercator-Projektion größer erscheint als Afrika, obwohl das tatsächliche Verhältnis der Flächen 2,2 Mkm*^{2} *zu 30 Mkm*^{2} *ist) noch richtungstreu (d.h. die kürzesten Verbindungen zwischen Punkten, die Großkreise, werden nicht auf Geraden projiziert). Es gibt andere Projektionen, die flächentreu sind.*

Genau dieses Problem tritt auch beim Begriff der Mannigfaltigkeit auf. Für topologische Mannigfaltigkeiten sind die Abbildungen nur Homöomorphismen. Man kann auf den Karten also nur topologische Information erkennen. Messungen (von Längen, Winkeln, Flächen etc.) sind nicht möglich. Nicht einmal eine sinnvolle Definition von Ableitung oder Integral sind möglich. Will man mehr Information über die Mannigfaltigkeit, müssen die Kartenwechsel auch kompatibel mit dieser Information sein.

Für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten werden wir später sehen, dass die Begriffe der Analysis auf Mannigfaltigkeiten definiert werden können, wenn die Kartenwechsel beliebig oft differenzierbar sind (differenzierbare Mannigfaltigkeiten). Wenn man Winkel messen möchte, müssen die Kartenwechsel winkeltreu sein; das führt auf den Begriff der konformen Mannigfaltigkeit.

ex:products

Übungsaufgabe 2.3.3. *Zeigen Sie, dass das Produkt* $X \times Y$ *von topologischen Mannigfaltigkeiten* X *und* Y *wieder eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Dabei trägt* $X \times Y$ *die Produkttopologie, für die eine Basis durch die Menge*

$$\{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

der "offenen Rechtecken" gegeben ist.

Beispiel 2.3.4. *Der* n*-dimensionale Torus ist definiert durch* $\mathrm{T}^n := (\mathrm{S}^1)^{\times n}$. *Nach Übung* ex:products 2.3.3 *und Beispiel* ex:nsphere 2.3.1 *erhält der* n*-Torus die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit. Insbesondere für den 2-Torus kann man auch eine Mannigfaltigkeitenstruktur durch die Parametrisierung*

$$\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{T}^2 \colon (u, v) \mapsto ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

erhalten. Beide Strukturen sind homöomorph. □

Definition 2.3.5 (Quotiententopologie). *Sei* X *ein topologischer Raum und* $\sim \subseteq X \times X$ *eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen* $[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$ *wird mit* $X/_\sim$ *bezeichnet und heißt* Quotientenraum*; wir haben eine natürliche surjektive Abbildung* $\pi \colon X \to X/_\sim \colon x \mapsto [x]$. *Auf* $X/_\sim$ *wird eine Topologie, die* Quotiententopologie, *dadurch definiert, dass eine Menge* $U \subset X/_\sim$ *offen ist genau dann, wenn ihr Urbild* $\pi^{-1}(U) \subset X$ *offen ist.*

Bemerkung 2.3.6. *Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie auf* $X/_\sim$, *für die die Projektion* $\pi \colon X \to X/_\sim$ *stetig ist.*

Übungsaufgabe 2.3.7. *Sei* X *ein topologischer Raum und* $\sim \subset X \times X$ *eine Äquivalenzrelation auf* X. *Sei* $f \colon X \to Y$ *eine Abbildung, die auf den Äquivalenzklassen konstant ist. Dann ist die induzierte Abbildung* $\overline{f} \colon X/_\sim \to Y$ *genau dann stetig, wenn* f *stetig ist.*

Im Allgemeinen ist ein Quotient eines Hausdorff-Raums nach einer Äquivalenzrelation nicht wieder ein Hausdorff-Raum.

Definition 2.3.8. *Wir bezeichnen eine Äquivalenzrelation als* offen, *wenn für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ die Vereinigung $\cup_{x\in U}[x] = \pi^{-1}(\pi(U))$ der Äquivalenzklassen von Punkten in U wieder offen ist.*

rop:quotient-hausdorff

Proposition 2.3.9. *Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine offene Äquivalenzrelation. Dann ist der Quotient $X/_\sim$ genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $\sim \subseteq X \times X$ eine abgeschlossene Menge ist. Insbesondere ist ein topologischer Raum X hausdorffsch genau dann wenn die Diagonale $X \subset X \times X$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Teilmenge $\sim$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $X \times X \setminus \sim$ offen ist. Nach Definition der Produkttopologie ist das genau dann der Fall, wenn für je zwei Punkte x, y mit $[x] \neq [y]$ offene Umgebungen U und V existieren, so dass $U \times V \cap \sim = \emptyset$.

Da $\sim$ offen ist, sind die Projektionen $\pi(U)$ und $\pi(V)$ offene Umgebungen von $[x]$ bzw. $[y]$, und aus $U \times V \cap \sim = \emptyset$ folgt, dass $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkt sind. Damit haben wir die Richtung $'' \Leftarrow''$ gezeigt.

Wenn nun $X/_\sim$ ein Hausdorff-Raum ist, haben wir für je zwei Äquivalenzklassen $[x] \neq [y]$ disjunkte offene Umgebungen U und V in $X/_\sim$. Mit der Projektionsabbildung können wir $U = \pi(\pi^{-1}(U))$ und $V = \pi(\pi^{-1}(V))$ schreiben, und $\pi^{-1}(U)$ und $\pi^{-1}(V)$ sind also disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y. $\square$

ex:2ndcountable

Übungsaufgabe 2.3.10. *Sei X ein topologischer Raum und $\sim \subseteq X \times X$ eine offene Äquivalenzrelation. Sei $\{B_i\}_{i\in I}$ eine Basis von X. Zeigen Sie, dass $\{\pi(B_i)\}_{i\in I}$ eine Basis der Quotiententopologie auf $X/_\sim$ ist. Insbesondere ist für eine offene Äquivalenzrelation $\sim$ auf einem Raum X, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, dieses Abzählbarkeitsaxiom auch wieder für den Quotienten $X/_\sim$ erfüllt.*

ex:rpn

Beispiel 2.3.11. *Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ hat als Punkte genau die 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Skalarmultiplikation*

$$\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

induziert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse von $(x_0, \ldots, x_n)$ mit

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] = \{(\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \mid \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$$

Die Abbildung

$$\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\mathbb{R}^\times \to \mathbb{RP}^n : [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \mathbb{R} \cdot (x_0, \ldots, x_n)$$

von der Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen auf den $\mathbb{RP}^n$ ist eine Bijektion, das Tupel $[x_0 : \cdots : x_n]$ nennt man auch die homogenen Koordinaten des Punktes $\mathbb{R} \cdot (x_0, \ldots, x_n)$.

Wir statten $\mathbb{RP}^n$ mit der Quotiententopologie aus. Es existiert ein Atlas mit $n+1$ Karten, der den $\mathbb{RP}^n$ zu einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit macht: für eine Koordinate x_i haben wir auf der offenen Menge $\{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ eine Bijektion

$$\{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n : \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

wobei die Notation $\hat{x_i}$ bedeutet, dass der Eintrag x_i aus dem $n+1$-Tupel entfernt wird. Die Topologie auf dem $\mathbb{RP}^n$ ist eindeutig dadurch bestimmt, dass diese Abbildungen Homöomorphismen sein sollen; das heißt, dass der $\mathbb{RP}^n$ auch durch Zusammenkleben der offenen Mengen $\{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$ konstruiert werden kann.

Analog kann man den komplex-projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$ *mit der Struktur einer* $2n$*-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit ausstatten.* □

Beispiel 2.3.12. *(1) Auf* $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *ist eine Äquivalenzrelation gegeben durch* $x \sim y$ *genau dann, wenn* $x = \pm y$*. Der Quotientenraum* $\mathrm{S}^n /_{\sim}$ *kann mit* $\mathbb{RP}^n$ *identifiziert werden. Wir erhalten die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit auf* $\mathbb{RP}^n$*, indem wir* S^n *mit solchen offenen Teilmengen* U *überdecken, für die die Projektion* $\pi\colon \mathrm{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ *eine Bijektion* $U \to \pi(U)$ *induziert. Für jede solche Teilmenge* $\pi(U) \subset \mathbb{RP}^n$ *benutzen wir die Zusammensetzung von* π^{-1} *und einer entsprechenden Karte für* S^n *als Karte für* $\mathbb{RP}^n$*. Die entstehende Topologie auf* $\mathbb{RP}^n$ *ist homöomorph zu der in Beispiel* ex:rpn *2.3.11 diskutierten.*

(2) Auf $\mathbb{R}^n$ *ist eine Gruppenwirkung des Standardgitters* $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ *durch Addition gegeben:*

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \colon (a, x) \mapsto a + x$$

Die Menge der Nebenklassen der Untergruppe $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ *wird mit* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *bezeichnet. Die Projektion* $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *induziert eine Topologie auf* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$*; tatsächlich sogar die Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit. Die Abbildung* $\mathbb{R} \to \mathrm{S}^1\colon x \mapsto \exp(2\pi \mathrm{i} x)$ *induziert einen Homöomorphismus* $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathrm{T}^n$*.*

□

Hier gibt es eine allgemeinere Aussage.

def:propdiscont

Definition 2.3.13. *Für eine topologische Mannigfaltigkeit* M *und eine Gruppe* G *(mit der diskreten Topologie) nennen wir eine stetige Gruppenwirkung* $\rho\colon G \times M \to M$ eigentlich diskontinuierlich*, wenn*

(1) für jeden Punkt $x \in M$ *eine offene Umgebung* U_x *existiert für die* $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ *schon impliziert, dass* g *das neutrale Element von* G *ist, und*

(2) die Abbildung $(\mathrm{pr}_2, \rho)\colon G \times X \to X \times X \colon (g, x) \mapsto (x, \rho(g, x))$ *eigentlich ist, d.h. für eine kompakte Menge* $K \subset X \times X$ *ist das Urbild* $(\mathrm{pr}_2, \rho)^{-1}(K)$ *wieder kompakt in* $G \times X$*.*

Übungsaufgabe 2.3.14. *Eine eigentliche stetige Abbildung* $f\colon X \to Y$ *in einen lokal kompakten Hausdorff-Raum* Y *ist abgeschlossen, d.h. Bilder von abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

Proposition 2.3.15. *Sei* M *eine Mannigfaltigkeit,* G *eine diskrete Gruppe und* $\rho\colon G \times M \to M$ *eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung. Für die Äquivalenzrelation* $\sim_G \subset M \times M$ *auf* M*, die durch*

$$x \sim_G y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G : gx = y$$

gegeben ist, ist der Quotientenraum $M/G := M/_{\sim}$ *eine topologische Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Die Äquivalenzrelation ist offen: die Stetigkeit der Wirkungsabbildung $\rho\colon G \times M \to M \colon (g, x) \mapsto g \cdot x$ bedeutet, dass für eine offene Menge $U \subseteq M$ und ein Element $g \in G$ die Menge $g \cdot U = \{g \cdot x \mid x \in U\}$ wieder offen ist. Insbesondere ist für eine offene Menge $U \subseteq M$ die Menge $G \cdot U = \bigcup_{x \in U} G \cdot x$ wieder offen.

Das zweite Abzählbarkeitsaxiom ist für M/G erfüllt, nach Übungsaufgabe ex:2ndcountable 2.3.10.

Wir wollen als Nächstes zeigen, dass der Quotient hausdorffsch ist, dass also für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $y \notin G \cdot x$ offene Umgebungen U und V von x und y existieren, so dass für alle $g \in G$ gilt $g(U) \cap V = \emptyset$. Aus der Eigentlichkeit der Abbildung $(\mathrm{pr}_2, \rho)\colon G \times M \to M \times M$ folgt, dass das Bild $(\mathrm{pr}_2, \rho)(G \times M) \subseteq$

$M \times M$ abgeschlossen ist. Diese Menge $(\mathrm{pr}_2, \rho)(G \times M) \subseteq M \times M$ ist aber genau die Äquivalenzrelation $\sim_G$. Die Behauptung folgt aus Proposition prop:quotient-hausdorff 2.3.9.

Es fehlen noch die lokalen Karten in einen geeigneten $\mathbb{R}^n$. Für $x \in M$ existiert eine offene Umgebung U, so dass für alle $g \in G \setminus \{\mathrm{e}\}$ gilt $g(U) \cap U = \emptyset$. Nach Definition der Quotiententopologie ist $\pi\colon U \to \pi(U)$ ein Homöomorphismus auf eine offene Umgebung $\pi(U)$ von $\pi(x) \in M/G$. Da M eine topologische Mannigfaltigkeit ist, existiert auch eine offene Umgebung V von x und ein Homöomorphismus $\phi\colon V \to \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Zusammensetzung

$$\pi(U \cap V) \xrightarrow{\pi^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\phi} \phi(U \cap V) \subseteq \phi(V) = \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge eines euklidischen Raumes. Damit haben wir auch gezeigt, dass M/G lokal euklidisch ist. □

Übungsaufgabe 2.3.16. *Zeigen Sie, dass der 2-Torus T^2 einen Atlas aus 2 Karten hat. Begründen Sie anhand eines Bildes, dass es auch einen Atlas aus 3 Karten gibt, deren Kartenbereiche homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ sind.*

2.4. Topologische Mannigfaltigkeiten mit Rand

Es gibt noch wesentliche Beispiele von Teilmengen in $\mathbb{R}^n$, die keine topologischen Mannigfaltigkeiten sind: die abgeschlossenen ϵ-Bälle $\overline{\mathrm{B}}(x;\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| \leq \epsilon\}$. Die Punkte im Rand $\partial\overline{\mathrm{B}}(x;\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x-y\| = \epsilon\}$ haben keine offenen Umgebungen, die homöomorph zu offenen Teilmengen eines euklidischen Raumes wären.

def:hn Definition 2.4.1. *Der euklidische Halbraum von Dimension n ist die Menge*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Der Rand

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

kann kanonisch mit $\mathbb{R}^{n-1}$ identifiziert werden, indem die letzte Koordinate weggelassen wird. Das Innere von $\mathbb{H}^n$ ist

$$\mathring{\mathbb{H}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}.$$

Definition 2.4.2 (topologische Mannigfaltigkeit mit Rand). *Ein topologischer Raum X heißt* topologische Mannigfaltigkeit mit Rand, *wenn X hausdorffsch ist, das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U von x und ein Homöomorphismus $\phi\colon U \to \tilde{U}$ auf eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{H}^n$ existiert.*

Ein Punkt $x \in X$ heißt Randpunkt, *wenn es eine Karte (U, ϕ) mit $x \in U$ gibt, für die gilt $\phi(x) \in \partial\mathbb{H}^n$. Die Menge aller Randpunkte heißt der* Rand von X *und wird mit ∂X bezeichnet. Ein Punkt $x \in X$ heißt innerer Punkt, wenn es eine Karte (U, ϕ) mit $x \in U$ gibt, für die gilt $\phi(x) \in \mathring{\mathbb{H}}^n$. Die Menge aller inneren Punkte heißt* Inneres von X *und wird mit $\mathring{X}$ bezeichnet.*

Bemerkung 2.4.3. *Eine Umformulierung der Invarianz der Dimension ist die folgende Aussage: Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine injektive stetige Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ist $f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Aus dieser Aussage folgt, dass kein Punkt x in einer Mannigfaltigkeit M mit Rand gleichzeitig Randpunkt und innerer Punkt sein kann. Ausserdem folgt daraus auch, dass ∂M eine* $\dim M - 1$*-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist, und $\mathring{M}$ eine* $\dim M$*-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist.*

BEISPIEL 2.4.4. *Der abgeschlossene n-dimensionale Einheitsball* $\overline{\mathrm{B}}(0;1) \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Zuerst bemerken wir, dass für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ eine Rotation ϕ in der orthogonalen Gruppe* $\mathrm{O}(n)$ *existiert, die v auf den Einheitsvektor* e_1 *schickt. Insbesondere reicht es zu zeigen, dass der Einheitsvektor* e_1 *eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{H}^n$ ist. Eine solche Umgebung ist durch $x_n > 0$ gegeben, und der entsprechende Homöomorphismus durch*

$$\phi\colon U \to \mathbb{H}^n\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2})$$

Die Abbildung schickt Einheitsvektoren auf $\partial\mathbb{H}^n$ und alle anderen Punkte in im Einheitsball auf $\mathring{\mathbb{H}}^n$; eine inverse Abbildung ist durch $(y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - \sqrt{1 - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2})$ gegeben. Aus diesen Aussagen folgt, dass S^{n-1} *der Rand von des Einheitsballs ist, und das Innere des abgeschlossenen Einheitsballs ist der offene Einheitsball.* □

BEISPIEL 2.4.5. *cut-and-paste: 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten, zusammenhängende Summe. kurze Erklärung des topologischen Zusammenklebens (Identifikation von offener Umgebung des zu klebenden Randes)*

Zusammenkleben am Rand (evtl auch mit Kragen) □

KAPITEL 3

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen

3.1. Partielle Ableitungen und C^∞-Abbildungen

Wir schreiben die Koordinaten(-funktionen) des $\mathbb{R}^n$ als $x^1, \ldots, x^n$: ein Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ hat dann die Koordinaten $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$. Dies entspricht den Konventionen der Differentialgeometrie, in denen Vektorfelder mit unteren Indizes und Differentialformen mit oberen Indizes bezeichnet werden, s. auch Bemerkung rem:einstein 6.2.16.

Definition 3.1.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in U$ ein Punkt.*

- *Für eine natürliche Zahl k heißt die Funktion C^k* am Punkt *p, wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_j}}$ für alle $j \leq k$ am Punkt p existieren und stetig sind.*
- *Die Funktion heißt C^k* auf *U, wenn sie C^k für alle Punkte $p \in U$ ist.*
- *Die Funktion heißt C^∞* am Punkt *p, wenn sie C^k für alle k ist.*
- *Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt C^k* am Punkt *p, wenn alle Komponentenfunktionen $(f^1, \ldots, f^n)$ C^k am Punkt p sind.*

Bemerkung 3.1.2. *Die C^0-Funktionen sind die stetigen Funktionen, C^∞-Funktionen heißen auch* differenzierbar *bzw.* glatt. *Die Menge der C^∞-Funktionen auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wird mit $C^\infty(U)$ bezeichnet.*

3.2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

def:cinfty-compat Definition 3.2.1. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.*

*(1) Zwei Karten $(U, \phi\colon U \to \mathbb{R}^n)$ und $(V, \psi\colon V \to \mathbb{R}^n)$ sind C^∞-*kompatibel, *wenn die beiden Kartenwechselabbildungen*

$$\phi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V) \quad \text{und} \quad \psi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap V) \to \psi(V \cap V)$$

C^∞-Abbildungen sind.

(2) Ein C^∞-Atlas für M ist eine Menge $\{(U_i, \phi_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n)\}_{i \in I}$ von paarweise C^∞-kompatiblen Abbildungen mit $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

(3) Eine Karte (V, ψ) ist kompatibel mit einem C^∞-Atlas *$\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, wenn sie kompatibel mit allen Karten im Atlas ist.*

(4) Ein C^∞-Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ heißt maximal, *wenn jede Karte, die mit dem Atlas kompatibel ist, bereits im Atlas enthalten ist.*

(5) Eine glatte *bzw.* C^∞-Mannigfaltigkeit *ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem maximalen C^∞-Atlas.*

Bemerkung 3.2.2. *Analoge Begriffe gibt es auch für C^r-Abbildungen.*

lem:chartcompatible Lemma 3.2.3. *Sei $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein Atlas für einen lokal euklidischen Raum. Wenn zwei Karten (V_1, ψ_1) und (V_2, ψ_2) mit dem Atlas kompatibel sind, sind sie kompatibel miteinander.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ ist. Für einen Punkt $p \in V_1 \cap V_2$ gibt es eine Karte (U_i, ϕ_i) im Atlas so dass $p \in U_i$ ist, also $p \in V_1 \cap V_2 \cap U_i$. Da die Karten beide kompatibel mit dem Atlas sind, ist die Komposition

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = (\psi_2 \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \psi_1^{-1})$$

glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2 \cap U_i)$. Daraus folgt, dass $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ glatt auf $\psi_1(V_1 \cap V_2)$ ist; analog sieht man, dass $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$ glatt auf $\psi_2(V_1 \cap V_2)$ ist. $\square$

prop:max-atlas

Proposition 3.2.4. *Jeder Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ auf einem lokal euklidischen Raum ist in einem eindeutigen maximalen Atlas enthalten.*

Beweis. Wir betrachten die Menge aller Atlanten, die kompatibel mit dem gegebenen Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ sind. Diese Menge ist partiell geordnet durch Mengeninklusion, und abgeschlossen unter Vereinigungen nach Lemma 3.2.3. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximales Element, also ein Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$.

Wenn es eine Karte (W, σ) gibt, die mit dem Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel ist, aber nicht im Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ enthalten ist, dann ist $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J} \cup (W, \sigma)$ ein größerer Atlas, was der Maximalität widerspricht. Also enthält der maximale Atlas alle Karten, die mit dem gegebenen Atlas kompatibel sind.

Wenn es einen anderen Atlas $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K}$ gibt, der mit dem Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel ist, dann sind nach Lemma 3.2.3 alle Karten $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K}$ mit dem Atlas $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ kompatibel. Wegen Maximalität von $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ muss dann $\{(W_k, \sigma_k)\}_{k \in K} \subseteq \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ gelten. Dies zeigt die Eindeutigkeit des maximalen Atlas. $\square$

Bemerkung 3.2.5. *Zwei C^∞-Atlanten $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ und $\{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ heißen auch* äquivalent, *wenn ihre Vereinigung ein Atlas ist. In der obigen Terminologie bedeutet das, dass alle Karten (V_j, ψ_j) mit dem Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ kompatibel sind. Proposition 3.2.4 bedeutet dann, dass jeder C^∞-Atlas auf einem lokal euklidischen Raum äquivalent zu einem eindeutigen maximalen Atlas ist.*

Damit können wir auch eine alternative Definition von glatter Mannigfaltigkeit in Definition 3.2.1 geben: Eine glatte Mannigfaltikgeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer Äquivalenzklasse von C^∞-Atlanten (bezüglich der obigen Äquivalenzrelation auf Atlanten).

Beispiel 3.2.6. *Der $\mathbb{R}^n$ mit dem Atlas, der nur aus der Karte $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ besteht, ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da nur eine Karte existiert, sind keine C^∞-Kompatibilitätsbedingungen zu überprüfen.*

Allgemeiner sind offene Teilmengen in glatten Mannigfaltigkeiten wieder glatte Mannigfaltigkeiten: für $V \subset M$ offen erhält man aus einem C^∞-Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ einen C^∞-Atlas $\{(V \cap U_i, \phi_i|_V)\}_{i \in I}$ für V. Die C^∞-Bedingungen für den eingeschränkten Atlas folgen direkt aus den C^∞-Bedingungen für $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. $\square$

ex:nsphere-smooth

Beispiel 3.2.7. *Die n-dimensionale Einheitssphäre S^n aus Beispiel 2.3.1 ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, genauer ist der Atlas aus Beispiel 2.3.1 ein C^∞-Atlas. Die Übergangsabbildung zwischen den beiden Karten ist*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{\frac{2x_1}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}}, \ldots, \frac{\frac{2x_n}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}} \right).$$

Die Einträge vereinfachen sich

$$\frac{\frac{2x_i}{\|x\|^2+1}}{1 - \frac{1-\|x\|^2}{1+\|x\|^2}} = \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2 - (1 - \|x\|^2)} = \frac{x_i}{\|x\|^2}.$$

Diese Abbildung ist für alle Werte $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *glatt, also ist die* C^∞*-Kompatibilitätsbedingung erfüllt.* □

Beispiel 3.2.8. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine offene Teilmenge und sei* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *eine glatte Funktion. Der Graph*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{R}^m$$

ist eine glatte Mannigfaltigkeit, gegeben durch die Karte $\mathrm{pr}_1\colon \Gamma_f \to \mathbb{R}^n$*.*

Tatsächlich benötigen wir dafür die Glattheit nicht. Wenn f *eine injektive Abbildung ist, hat* Γ_f *durch* $\mathrm{pr}_2\colon \Gamma_f \to \mathbb{R}^m$ *eine weitere glatte Struktur. Beide Strukturen sind diffeomorph, wenn* f *glatt ist.* □

Beispiel 3.2.9. *Produkte von glatten Mannigfaltigkeiten sind ebenfalls wieder glatte Mannigfaltigkeiten. Für einen* C^∞*-Atlas* $\{U_i, \phi_i\}_{i\in I}$ *von* M *und einen* C^∞*-Atlas* $\{V_j, \psi_j\}_{j\in J}$ *von* N *ist* $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ *ein* C^∞*-Atlas für* $M \times N$*.*

Insbesondere ist also der n*-dimensionale Torus* T^n *eine glatte Mannigfaltigkeit.* □

Beispiel 3.2.10. *Der reell-projektive Raum* $\mathbb{RP}^n$ *ist eine glatte Mannigfaltigkeit, genauer erfüllt der Atlas aus Beispiel* ex:rpn *2.3.11 die* C^∞*-Kompatibilitätsbedingung. Die Karten waren durch*

$$\phi_i\colon \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \to \mathbb{R}^n\colon \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir den Kartenwechsel zwischen $\phi_0(U_0)$ *und* $\phi_1(U_1)$ *betrachten. Die Kartenwechselabbildung ist gegeben durch*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0\} \to \mathbb{R}^n\colon (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1} \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$$

und diese Abbildung ist offensichtlich auf beliebig oft differenzierbar, solange $x_1 \neq 0$ *ist.*

Ebenso ist der komplex-projektive Raum $\mathbb{CP}^n$ *eine glatte Mannigfaltigkeit.* □

3.3. Glatte Abbildungen

Die richtigen/sinnvollen Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten sind die *glatten Abbildungen*. Auch dieser Begriff wird, wie schon der Begriff der Mannigfaltigkeit auf lokale Eigenschaften zurückgeführt: glatte Abbildungen sind Abbildungen, die in Karten als Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ beliebig oft differenzierbar sind.

Definition 3.3.1 (glatte Abbildung). *Seien* M *und* N *glatte Mannigfaltigkeiten und* $p \in M$ *ein Punkt.*

1. *Eine Abbildung* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *heißt* glatt *am Punkt* p*, wenn es eine Karte* (U, ϕ) *mit* $p \in U$ *gibt, so dass die Zusammensetzung* $f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U) \to U \to \mathbb{R}$ *am Punkt* $\phi(p)$ *eine* C^∞*-Abbildung ist. Die Abbildung* f *heißt* glatt *auf* M*, wenn sie an allen Punkten glatt ist.*
2. *Eine stetige Abbildung* $f\colon M \to N$ *heißt* glatt *am Punkt* p*, wenn es eine Karte* (U, ϕ) *von* M *mit* $p \in U$ *und eine Karte* (V, ψ) *von* N *mit* $f(p) \in V$ *gibt, so dass die Komposition*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to U \cap f^{-1}(V) \to V \to \psi(V)$$

   C^∞ *am Punkt* $\phi(p)$ *ist. Die Abbildung* f *heißt* glatt*, wenn sie an allen Punkten glatt ist.*

Notation 3.3.2. *Für zwei glatte Mannigfaltigkeiten M und N bezeichnen wir die Menge aller glatten Abbildungen $M \to N$ mit $C^\infty(M,N)$. Ein Spezialfall ist $C^\infty(M) := C^\infty(M,\mathbb{R})$.*

prop:smooth-indep

Proposition 3.3.3. *Sei $f\colon M \to N$ glatt am Punkt p. Für jede Karte (U,ϕ) von M mit $p \in U$ und jede Karte (V,ψ) von N mit $f(p) \in V$ ist die Komposition*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to U \cap f^{-1}(V) \to V \to \psi(V)$$

C^∞ am Punkt $\phi(p)$.

Beweis. Nach Definition gibt es eine Karte (U',ϕ') von M mit $p \in U'$ und eine Karte (V',ψ') von N mit $f(p) \in V'$, so dass $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ glatt am Punkt $\phi'(p)$ ist. Wegen der C^∞-Kompatibilität sind die Kartenwechsel $\phi' \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$ und $\psi \circ (\psi')^{-1}\colon \psi'(V \cap V') \to \psi(V \cap V')$ beide C^∞. Damit ist dann auch die Komposition

$$(\psi \circ (\psi')^{-1}) \circ \left(\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}\right) \circ (\phi' \circ \phi^{-1}) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

glatt am Punkt $\phi(p)$. $\square$

Bemerkung 3.3.4. *Insbesondere ist also die Definition von glatter Abbildung unabhängig von der Wahl der Karte. Um zu zeigen, dass eine Abbildung glatt ist, reicht es auch aus, die Glattheit in den Karten eines nicht notwendig maximalen Atlas zu überprüfen.*

Proposition 3.3.5. *Die Komposition von C^∞-Abbildungen zwischen glatten Mannigfaltigkeiten ist wieder C^∞.*

Beweis. Seien $f\colon M \to N$ und $g\colon N \to P$ glatte Abbildungen, und seien (U,ϕ), (V,ψ) und (W,σ) Karten für M, N und P. Es gilt

$$\sigma \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\sigma \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}),$$

und die beiden Faktoren auf der rechten Seite sind nach Voraussetzung (und Proposition prop:smooth-indep 3.3.3) glatt. Also ist auch die Komposition wieder glatt, was nach Proposition prop:smooth-indep 3.3.3 für die Behauptung ausreicht. $\square$

not:pullback

Notation 3.3.6. *Für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ und eine Mannigfaltigkeit P haben wir eine induzierte Abbildung*

$$f^*\colon C^\infty(N,P) \to C^\infty(M,P)\colon (g\colon N \to P) \mapsto g \circ f.$$

Diese Konstruktion wird auch Pullback genannt. Insbesondere wird die Zuordnung

$$M \mapsto C^\infty(M), \qquad (f\colon M \to N) \mapsto (f^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M))$$

zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildung in die Kategorie der $\mathbb{R}$-Algebren, s. Anhang chp:cats ??.

Beispiel 3.3.7. *Für glatte Mannigfaltigkeiten N, M_1 und M_2 ist eine Abbildung $f\colon N \to M_1 \times M_2$ genau dann glatt, wenn die Kompositionen $\mathrm{pr}_i \circ f\colon N \to M_i$ für $i = 1,2$ glatt sind. Insbesondere sind die Projektionsabbildungen $\mathrm{pr}_i\colon M_1 \times M_2 \to M_i$ glatt.* $\square$

Beispiel 3.3.8. *Wenn $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung ist und $U \subset M$ eine offene Teilmenge, dann ist die Einschränkung $f|_U\colon U \subset M \to N$ eine glatte Abbildung.* $\square$

Beispiel 3.3.9. *Bezeichne GL_n die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit der Matrizenmultiplikation. Wir können GL_n als offene Teilmenge in $\mathbb{R}^{n^2}$ identifizieren: im Raum aller Matrizen ist GL_n das Komplement des Unterraums, der durch $\{(a_{ij})_{i,j} \mid \det(a_{ij}) = 0\}$ definiert wird. Dass GL_n eine offene Menge ist, folgt* *aus der Stetigkeit der Determinantenabbildung* $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$. *Als offene Teilmenge im* $\mathbb{R}^{n^2}$ *ist* GL_n *also eine glatte Mannigfaltigkeit.*

Die Multiplikationsabbildung $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n \colon (A,B) \mapsto A \cdot B$ *ist glatt, da die Formel für Matrizenmultiplikation polynomial in den Einträgen der zu multiplizierenden Matrizen ist. Genauso ist auch die Cramersche Regel zum Invertieren von Matrizen polynomial in den Einträgen der zu invertierenden Matrix, also ist auch das Matrizeninvertieren* $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_n \colon A \mapsto A^{-1}$ *glatt.* □

Definition 3.3.10. *Eine* Lie-Gruppe *ist eine glatte Mannigfaltigkeit* G *zusammen mit einer Gruppenstruktur* $\mu \colon G \times G \to G$, $(-)^{-1} \colon G \to G$, *so dass Multiplikation* μ *und Invertieren* $(-)^{-1}$ *beide glatt sind.*

Bemerkung 3.3.11. *Wir haben oben gesehen, dass* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *eine Lie-Gruppe ist. Mit demselben Argument sieht man, dass* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *eine Lie-Gruppe ist. Die aus der linearen Algebra bekannten Matrizengruppen* $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ *(und eventuell* $\mathrm{Sp}(2n)$*) sind weitere Beispiele für Lie-Gruppen. Zumindest die halbeinfachen Lie-Gruppen können komplett klassifiziert werden. Quotienten von Lie-Gruppen nach geeigneten abgeschlossenen Untergruppen liefern viele weitere interessante Beispiele für glatte Mannigfaltigkeiten.*

Definition 3.3.12. *Sei* $f \colon M \to N$ *eine Abbildung von glatten Mannigfaltigkeiten.*

Die Abbildung f *heißt* Diffeomorphismus, *wenn sie bijektiv ist und sowohl* f *als auch* f^{-1} *glatt sind.*

Die Abbildung f *heißt* lokaler Diffeomorphismus, *wenn es für jeden Punkt* $p \in M$ *eine offene Umgebung* U *gibt, so dass* $f|_U \colon U \to f(U)$ *ein Diffeomorphismus ist.*

Proposition 3.3.13. *Sei* M *eine glatte Mannigfaltigkeit,* $U \subseteq M$ *eine offene Teilmenge und* $\phi \colon U \to \mathbb{R}^n$ *eine Abbildung. Dann ist* (U, ϕ) *genau dann eine Karte für* M, *wenn* $\phi \colon U \to \phi(U)$ *ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge* $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist.*

Beweis. Sei (U, ϕ) eine Karte für M, insbesondere ist $\phi \colon U \to \phi(U)$ bijektiv. Es reicht zu zeigen, dass ϕ und ϕ^{-1} glatt sind. Um die Glattheit nachzurechnen benutzen wir die Karte (U, ϕ) für U und die Karte $(\phi(U), \mathrm{id}_{\phi(U)})$ für $\phi(U)$. Dann ist die Komposition $\mathrm{id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \mathrm{id}_{\phi(U)}$ glatt, also ist ϕ glatt. Mit denselben Karten sehen wir mit $\phi \circ \phi^{-1} \circ \mathrm{id}_{\phi(U)} = \mathrm{id}_{\phi(U)}$, dass ϕ^{-1} glatt ist.

Sei umgekehrt $\phi \colon U \to \phi(U)$ ein Diffeomorphismus. Für jede Karte (V, ψ) von M sind ψ und ψ^{-1} glatt, nach dem vorherigen Schritt. Damit sind die Kartenwechsel $\phi \circ \psi^{-1}$ und $\psi \circ \phi^{-1}$ glatt, also ist (U, ϕ) kompatibel mit der glatten Struktur auf M und damit ist (U, ϕ) im maximalen Atlas für M enthalten. □

Beispiel 3.3.14. *Sei* M *eine glatte Mannigfaltigkeit und* G *eine diskrete Gruppe. Wir nehmen an, dass* $G \times M \to M$ *eine eigentlich diskontinuierliche Gruppenwirkung durch Diffeomorphismen ist, d.h. für jedes* $g \in G$ *ist die induzierte Abbildung* $g \cdot (-) \colon M \to M$ *ein Diffeomorphismus. Dann ist der Quotient* M/G *eine glatte Mannigfaltigkeit, und die Quotientenabbildung* $M \to M/G$ *ist ein lokaler Diffeomorphismus.*

Beispiele für diese Situation sind $\mathrm{T}^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *und* $\mathrm{S}^n / \mathrm{C}_2 \cong \mathbb{RP}^n$. □

Übungsaufgabe 3.3.15. *Die Liegruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *ist diffeomorph zu* $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Übungsaufgabe 3.3.16. *Zeigen Sie, dass die Gruppe* $\mathrm{SU}(2)$ *der unitären* (2×2)*-Matrizen eine glatte Mannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie, dass* $\mathrm{SU}(2)$ *diffeomorph zu* S^3 *ist. Zeigen Sie, dass die Spurabbildung* $\mathrm{tr} \colon \mathrm{SU}(2) \to [-2, 2]$ *eine glatte Abbildung ist.*

3.4. Partielle Ableitungen und Jacobi-Matrix

def:partial-der

DEFINITION 3.4.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, (U, ϕ) eine Karte und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir bezeichnen mit $r^1, \ldots, r^n$ die Standardkoordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^n$. Mit Hilfe der Karte (U, ϕ) werden dann auf U Koordinatenfunktionen durch $x^i = r^i \circ \phi$ definiert. Die* partielle Ableitung *von f nach x^i am Punkt $p \in U$ ist definiert durch*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)).$$

Da f als glatt vorausgesetzt wird, ist auch die partielle Ableitung glatt, dies kann in der Karte (U, ϕ) direkt überprüft werden.

BEMERKUNG 3.4.2. *Wichtig ist zu bemerken, dass die Koordinatenfunktionen x^i auf U und auch die partielle Ableitung $\partial f / \partial x^i$ von der Wahl der Karte abhängen. In der Analysis II kann man das bereits sehen: für eine Wahl von Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ im $\mathbb{R}^n$ hängen die Richtungsableitungen $\partial_{e_i} f$ einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ natürlich von der Wahl der Basis ab.*

PROPOSITION 3.4.3. *Sei (U, ϕ) eine Karte für eine Mannigfaltigkeit M, und seien $x^1, \ldots, x^n$ die dazugehörigen Koordinatenfunktionen auf U. Dann gilt*

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

BEWEIS. Nach Definition ist

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial x^i \circ \phi^{-1}}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial r^i \circ \phi \circ \phi^{-1}}{\partial r^j}(\phi(p)) = \delta^i_j$$

□

DEFINITION 3.4.4. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Seien (U, ϕ) und (V, ψ) Karten für M bzw. N, mit zugehörigen Koordinatenfunktionen $x^1, \ldots, x^n$ und $y^1, \ldots, y^m$. Wir nehmen an, dass $f(U) \subseteq V$. Die Komponentenfunktionen von f bezüglich der Koordinaten $y^1, \ldots, y^m$ sind dann gegeben durch $f^i = y^i \circ f = r^i \circ \psi \circ f$. Die Matrix*

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$$

heißt die Jacobi-Matrix *für f in den Karten (U, ϕ) und (V, ψ). Im Fall $n = m$ heißt* $\det(\partial f^i / \partial x^j)$ Jacobi-Determinante *für f in den Karten (U, ϕ) und (V, ψ).*

BEISPIEL 3.4.5. *Seien $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ und $(V, y^1, \ldots, y^n)$ zwei Karten für eine Mannigfaltigkeit. Die Jacobi-Matrix für den Kartenwechsel ist die Jacobi-Matrix $\partial y^i / \partial x^j$ für die Identität auf $U \cap V$ bezüglich der Karten U und V.* □

BEMERKUNG 3.4.6. *Auch hier hängen die Matrix und Determinante wieder von den Karten ab. Die Eigenschaft* $\det(\partial f^i / \partial x^j) \neq 0$ *ist allerdings unabhängig von der Wahl der Karten. (siehe Basiswechselmatrizen in LA I)*

3.5. Satz von der Umkehrabbildung

m:inverse-function-mfd

SATZ 3.5.1 (Satz von der Umkehrabbildung für Mannigfaltigkeiten). *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für einen Punkt $p \in M$ sei $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte von M mit $p \in U$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ eine Karte von N mit $f(U) \subseteq V$. Dann ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p, wenn* $\det(\partial y^i \circ f / \partial x^j)(p) \neq 0$.

Beweis. Nach Definition

$$\frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial (r^i \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p))$$

ist die Jacobi-Matrix für f in den Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ gleich der Jacobi-Matrix für die Abbildung $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Theorem thm:inverse-function-rn A.3.1 besagt, dass $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Da die Kartenabbildungen ϕ und ψ Diffeomorphismen sind, ist das gleichbedeutend mit der Aussage, dass f ein lokaler Diffomorphismus ist. □

3.6. Ausblick: exotische glatte Strukturen

Es gibt sehr exotische Beispiele von Mannigfaltigkeiten. Die Gebiete, die sich mit solchen Fragen beschäftigen sind die Differentialtopologie bzw. die geometrische Topologie.

- John Milnor entdeckte glatte Strukturen auf S^7, die nicht diffeomorph zur Standardstruktur aus Beispiel ex:nsphere-smooth 3.2.7 sind. Milnor und Kervaire bewiesen, dass es 28 paarweise nicht-diffeomorphe glatte Strukturen auf der S^7 gibt (und allgemeine Aussagen zur Anzahl von Diffeomorphieklassen von glatten Strukturen auf S^n sind bekannt).
- Freedman und Donaldson zeigten, dass es eine glatte Struktur auf dem $\mathbb{R}^4$ gibt, die nicht diffeomorph zum Standard $\mathbb{R}^4$ ist. Inzwischen ist bekannt, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-diffeomorphe glatte Strukturen auf $\mathbb{R}^4$ gibt. Andererseits sind für alle $n \neq 4$ alle glatten Strukturen auf $\mathbb{R}^n$ diffeomorph.
- Es gibt auch topologische Mannigfaltigkeiten, auf denen es keine glatte Struktur, also keinen C^∞-kompatiblen Atlas gibt.

KAPITEL 4

Tangentialvektoren und Differential

Lineare Algebra ist nahezu die einzige Möglichkeit in der Mathematik, Probleme tatsächlich zu lösen. Man kann sich also fragen, wie viel man über Mannigfaltigkeiten und glatte Abbildungen mit Hilfe der linearen Algebra sagen kann. Die beste lineare Annäherung an eine Mannigfaltigkeit ist der Tangentialraum. Kurven in der Mannigfaltigkeit werden durch lineare Annäherung auf die Geschwindigkeitsvektoren an einem Punkt reduziert; dies führt zum Konzept des Tangentialvektors. Für Funktionen in der Umgebung eines Punktes ist die lineare Annäherung durch die Ableitung (alternativ, durch Taylor-Approximation) gegeben; durch (lineare) Taylor-Approximation werden Funktionen zu Linearformen auf dem Tangentialraum. In dieser Formulierung reduziert sich die Richtungsableitung von Funktionen in Richtung von Tangentialvektoren auf die Auswertung von Linearformen auf dem Tangentialraum. Mit dieser Sichtweise können wir Tangentialvektoren als Derivationen betrachten, also als Operatoren auf dem Raum der Funktionenkeime an einem Punkt. Umgekehrt können wir die Ableitung einer Funktion als Linearform auf dem Raum der Tangentialvektoren sehen.

Ein weiterer (insbesondere auch für physikalische Anwendungen durchaus zentraler) Aspekt dieser Formulierung von Tangentialvektoren durch Kurvenkeime oder Derivationen ist die Unabhängigkeit der Definition von gewählten Koordinaten. Für konkrete Rechnungen müssen natürlich immer noch Koordinaten gewählt werden, aber für Definitionen und Beweise allgemeiner Aussagen sind koordinatenfreie Darstellungen immer vorzuziehen.

4.1. Tangentialvektoren als infinitesimale Kurven

Wir diskutieren zuerst die geometrische Sichtweise auf Tangentialvektoren: als lineare Annäherung an Kurven. Dies ist eine nahezu direkte Übertragung des Begriffs der Tangentialvektoren an Kurven im $\mathbb{R}^n$.

Zur Erinnerung: für eine offene Teilmenge $U \subseteq M$ bezeichnet $C^\infty(U)$ die Menge der auf U definierten glatten Funktionen. Für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ und eine offene Teilmenge $V \subseteq N$ gibt es eine induzierte Abbildung

$$f^*\colon C^\infty(V) \to C^\infty(f^{-1}(V))\colon g \in C^\infty(V) \mapsto g \circ f.$$

def:germs

Definition 4.1.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Für einen Punkt $p \in M$ definieren wir auf der Menge*

$$\{(U,f) \mid p \in U, U \subset M \text{ offen}, f \in C^\infty(U)\}$$

von in einer Umgebung von p definierten C^∞-Funktionen die folgende Äquivalenzrelation:

$$(U,f) \sim (V,g) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists W \subset U \cap V \text{ offen, und } f|_W = g|_W.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation heißt die Menge der Funktionenkeime am Punkt $p \in M$ *und wird mit $C^\infty_p(M)$ bezeichnet. Addition und Multiplikation von Funktionen induzieren Operationen auf Keimen, durch die $C^\infty_p(M)$ eine $\mathbb{R}$-Algebra wird.*

Für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ gibt es eine induzierte Abbildung

$$f^*\colon C^\infty_{f(p)}(N) \to C^\infty_p(M)\colon (V,g) \mapsto (f^{-1}(V), g\circ f).$$

Diese Abbildung ist ein Homomorphismus von $\mathbb{R}$-Algebren.

Bemerkung 4.1.2. *Mit Kategorientheorie kann die Definition von $C^\infty_p(M)$ umformuliert werden:*

$$C^\infty_p(M) = \operatorname*{colim}_{p\in U\subseteq M \text{ offen}} C^\infty(U).$$

Für eine gewählte Karte (U,ϕ) mit $p\in U$ induziert ϕ einen Isomorphismus:

$$\phi\colon C^\infty_p(M) \to C^\infty_{\phi(p)}(\mathbb{R}^n)\colon (V,f)\mapsto (\phi(V\cap U), f\circ\phi^{-1}).$$

def:tangent-vector

Definition 4.1.3. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p\in M$ ein Punkt. Wir definieren auf der Menge*

$$\{\gamma\colon (a,b)\to M \mid a<0<b, \gamma(0)=p, \gamma \text{ glatt}\}$$

von glatten Kurven durch den Punkt p die folgende Äquivalenzrelation

$$\gamma_1\sim\gamma_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma_1(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(\gamma_2(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \quad \text{für alle } f\in C^\infty_p(M).$$

Die Äquivalenzklassen dieser Relation heißen infinitesimale Kurven *oder* Tangentialvektoren an M im Punkt p. *Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit T_pM bezeichnet.*

Bemerkung 4.1.4. *In $\mathbb{R}^n$ können Tangentialvektoren durch Pfeile veranschaulicht werden. Dies setzt allerdings ein konkretes Koordinatensystem voraus. Außerdem ist natürlich der Begriff der Geraden nicht invariant unter Diffeomorphismen, so dass eine Gerade in einem Koordinatensystem in einem anderen Koordinatensystem eine beliebige glatte Kurve sein kann. Dagegen ist die obige Definition von Tangentialvektoren als Äquivalenzklassen von Kurvenkeimen unabhängig von der Wahl der Karte.*

Lemma 4.1.5. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p\in M$. Der Tangentialraum T_pM ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

Beweis. Für die Definition der Addition wählen wir eine Karte (U,ϕ) um p. Für zwei infinitesimale Kurven γ_1 und γ_2 und $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ist die Linearkombination $\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2$ gegeben durch

$$\phi^{-1}\left(\lambda\phi(\gamma_1(t)) + \mu\phi(\gamma_2(t)) - (\lambda+\mu-1)\phi(p)\right)$$

In $\phi(U)\subseteq\mathbb{R}^n$ entspricht dies genau der Linearkombination der Tangentialvektoren an die Kurven $\phi(\gamma_1(t))$ und $\phi(\gamma_2(t))$. Die Vektorraum-Axiome sind erfüllt, weil sie für $\mathbb{R}^n$ erfüllt sind. □

ex:tangent-rn

Beispiel 4.1.6. *Für einen Punkt $p\in\mathbb{R}^n$ ist leicht zu sehen, dass die Abbildung*

$$\mathbb{R}^n \to \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n\colon (v\in\mathbb{R}^n)\mapsto [\gamma(t) = p + v\cdot t]$$

ein Isomorphismus ist. Die Injektivität folgt, weil für einen Vektor $v\neq 0$ eine Funktion konstruiert werden kann, die in Richtung v eine von 0 verschiedene Ableitung hat. Die Surjektivität folgt, weil jede Äquivalenzklasse in $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ durch die partiellen Ableitungen in Koordinatenrichtungen eindeutig bestimmt ist. Alternativ kann man natürlich die Umkehrabbildung $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ konkret angeben: eine infinitesimale Kurve wird auf ihren Tangentialvektor abgebildet.

Insbesondere ist eine Basis für $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ gegeben durch die Kurven $p+e_i\cdot t$. □

Wir haben bereits bemerkt, dass die Definition der partiellen Ableitung in eine Koordinatenrichtung natürlich von der Wahl des Koordinatensystems (bzw. der Karte der Mannigfaltigkeit) abhängt. Mit der vorigen Definition von Tangentialvektoren können wir jetzt allerdings die Richtungsableitungen betrachten, die unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind.

`def:directional`

DEFINITION 4.1.7. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $\gamma\colon (a,b) \to M$ ein Repräsentant des Tangentialvektors $v \in \mathrm{T}_pM$. Für einen Funktionenkeim $(U,f) \in C_p^\infty(M)$ definieren wir die* Richtungsableitung von f in Richtung v *durch*
$$D_v f := \frac{\mathrm{d}f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}.$$

BEMERKUNG 4.1.8. *Dies entspricht genau der Definition der Richtungsableitung aus Analysis II. Eine Möglichkeit, das zu sehen ist, die Ableitung als Grenzwert eines Differenzenquotienten zu schreiben. Die Definition von Richtungsableitung einer auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten Funktion f in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich als Spezialfall der obigen Definition, wenn wir als Kurve $\gamma(t) = p + v \cdot t$ nehmen.*

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, nach Definition `def:tangent-vector` *4.1.3.*

BEISPIEL 4.1.9. *Für $p \in \mathbb{R}^n$ haben wir die bekannte Beziehung zwischen Richtungsableitung und partiellen Ableitungen: für $v \in \mathrm{T}_pM$ und $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*
$$D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$$
Dies folgt unmittelbar aus der Definition `def:directional` *4.1.7 und der Kettenregel.* □

4.2. Tangentialvektoren als Derivationen

Die Richtungsableitung aus Definition `def:directional` 4.1.7 erlaubt jetzt eine alternative Interpretation von Tangentialvektoren: ein Tangentialvektor v am Punkt p ist ein Operator, der jedem Funktionenkeim f um p den Wert der Richtungsableitung $D_v f$ von f in Richtung v zuordnet. Dies führt auf die Interpretation von Tangentialvektoren als Derivationen.

`def:derivation`

DEFINITION 4.2.1. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul.*

- *Eine R-*Derivation von A mit Werten in M *ist eine R-lineare Abbildung $D\colon A \to M$, so dass für alle $a, b \in A$ die Leibniz-Regel $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ erfüllt ist.*
- *Die Menge aller R-Derivationen von A mit Werten in M ist ein R-Modul, der mit $\mathrm{Der}_R(A, M)$ bezeichnet wird.*
- *Für einen Homomorphismus $\phi\colon A \to B$ von R-Algebren haben wir einen induzierten Homomorphismus von R-Moduln:*
$$\phi^*\colon \mathrm{Der}_R(B, M) \to \mathrm{Der}_R(A, M)\colon D \mapsto D \circ \phi$$

`ex:lie-alg`

BEISPIEL 4.2.2. *Sei D eine R-Derivation von A mit Werten in M, wobei A eine kommutative Algebra ist. Für alle $r \in R$ gilt $D(r) = 0$. Es gilt die übliche Ableitungsregel für Polynome $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$.*

Für zwei Derivationen $D_1, D_2\colon A \to A$ ist der Kommutator $[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ eine Derivation, der die Jacobi-Identität erfüllt:
$$[D_1,[D_2,D_3]] + [D_3,[D_1,D_2]] + [D_2,[D_3,D_1]] = 0.$$
□

Beispiel 4.2.3. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A eine kommutative R-Algebra. Es gibt eine universelle R-Derivation von A: wir betrachten den A-Modul $\Omega_{A/R}$, der als Erzeuger die Symbole* $\mathrm{d}a$ *mit $a \in A$ und die Relationen*

$$\mathrm{d}(a+b) = \mathrm{d}(a) + \mathrm{d}(b), \quad \mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f, \quad \mathrm{d}r = 0$$

für $a, b, f, g \in A$ und $r \in R$ hat. Die Abbildung $\mathrm{d}\colon A \to \Omega_{A/R}\colon a \mapsto \mathrm{d}a$ ist eine R-Derivation von A mit Werten im A-Modul $\Omega_{A/R}$.

Der Modul $\Omega_{A/R}$ heißt auch Modul der Kähler-Differentiale *und hat die folgende universelle Eigenschaft: für jede R-Derivation $D\colon A \to M$ gibt es eine eindeutige Faktorisierung*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, dotted] \\ & M \end{tikzcd}$$

□

Beispiel 4.2.4. *Sei $v \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ ein Tangentialvektor am Punkt p. Die Abbildung*

$$D_v\colon C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}\colon f \mapsto D_v f = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial r^i}(p),$$

die einer Funktion f die Richtungsableitung von f am Punkt p in Richtung v zuordnet, ist eine Derivation in $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$. Die $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$-Modulstruktur von $\mathbb{R}$ ist dabei durch

$$C_p^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon ((U, f), \lambda) \mapsto f(p) \cdot \lambda$$

gegeben. Die Leibniz-Regel folgt aus der Produktregel für die partiellen Ableitungen.

Allgemeiner ist für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ einer Mannigfaltigkeit M um den Punkt p die partielle Ableitung

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}$$

def:partial-der
aus Definition 3.4.1 eine Derivation in $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$. □

thm:tangent-vs-der

Satz 4.2.5. *Die lineare Abbildung*

$$\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})\colon v \mapsto D_v = \sum v^i \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_p$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die $\mathbb{R}$-Linearität der Abbildung folgt direkt aus der Definition der Richtungsableitung als Linearkombination der partiellen Ableitungen.

Für die Injektivität sei $v \in \mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ ein Vektor mit $D_v = 0$. Für die Koordinatenfunktionen r^j gilt

$$D_v(r^j) = \sum v^i \frac{\partial r^j}{\partial r^i} = \sum v^i \delta_i^j = v^j.$$

Wir sehen, dass $D_v = 0$ nur für $v = 0$ gelten kann, also ist die Abbildung injektiv.

Für die Surjektivität sei $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty, \mathbb{R})$ eine Derivation. Für einen Funktionenkeim (U, f) können wir den Satz von Taylor (in der Form von Proposition
prop:taylor-cinf
A.2.1) anwenden: auf einer kleineren Umgebung U' von p existieren C^∞-Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ mit $g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$, so dass auf U' gilt

$$f(x) = f(p) + \sum (x^i - p^i) g_i(x).$$

Auf diese Gleichheit wenden wir die Derivation D an:

$$Df = \sum \big(g_i(p)D(r^i - p^i) + (p^i - p^i)Dg_i\big) = \sum D(r^i)\frac{\partial f}{\partial r^i}(p).$$

Diese Derivation ist die Richtungsableitung für den Vektor $v = (Dr^1, \ldots, Dr^n)$. $\square$

rem:tangent-basis

BEMERKUNG 4.2.6. *Unter dem Isomorphismus aus Satz* thm:tangent-vs-der *4.2.5 entspricht die Standardbasis* $e_1, \ldots, e_n$ *von* $\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ *den partiellen Ableitungen* $\frac{\partial}{\partial r^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial r^n}\Big|_p$ *wobei die* $r^1, \ldots, r^n$ *die Standard-Koordinatenfunktionen auf* $\mathbb{R}^n$ *sind.*

4.3. Differential für Abbildungen

def:differential

DEFINITION 4.3.1. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten. Dann induziert* f *lineare Abbildungen*

$$f_*\colon \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M), \mathbb{R}) \to \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_{f(p)}(N), \mathbb{R})\colon D \mapsto \Big(g \in C^\infty_{f(p)}(N) \mapsto D(g \circ f)\Big)$$

$$\mathrm{d}f\colon \mathrm{T}_p(M) \to \mathrm{T}_{f(p)}(N)\colon\ ((\gamma\colon (a,b) \to M) \mapsto f \circ \gamma)\,.$$

Diese Abbildung heißt Differential der glatten Abbildung $f\colon M \to N$ am Punkt p.

BEMERKUNG 4.3.2. *Alternativ ist das Differential die vom Pullback*

$$f^*\colon C^\infty_{f(p)}(N) \to C^\infty_p(M)$$

von Funktionen aus Definition def:germs *4.1.1 induzierte Abbildung auf* $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$ *aus Definition* def:derivation *4.2.1.*

prop:chain-rule

PROPOSITION 4.3.3 (Kettenregel). *Seien* $f\colon M \to N$ *und* $g\colon N \to P$ *glatte Abbildungen, und* $p \in M$ *ein Punkt. Dann haben wir ein kommutative Diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M), \mathbb{R}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "(g\circ f)_*"'] & \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_{f(p)}(N), \mathbb{R}) \arrow[d, "g_*"] \\
& \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_{g(f(p))}(P), \mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_p M \arrow[r, "\mathrm{d}f"] \arrow[dr, "\mathrm{d}(g\circ f)"'] & \mathrm{T}_{f(p)}(N) \arrow[d, "\mathrm{d}g"] \\
& \mathrm{T}_{g(f(p))}(P)
\end{tikzcd}$$

BEWEIS. Sei $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M))$ eine Derivation und $(U, h) \in C^\infty_{g(f(p))}$ ein glatter Funktionenkeim. Nach Definition def:differential 4.3.1 bildet die Derivation $(g \circ f)_*(D)$ die Funktion h auf $D(h \circ g \circ f)$ ab. Andererseits bildet die Derivation $g_* \circ f_*(D)$ die Funktion h auf

$$f_*(D)(h \circ g) = D(h \circ g \circ f)$$

ab. Also ist das Diagramm wie behauptet kommutativ.

Die entsprechende Aussage für das zweite Diagramm folgt direkt aus der Definition des Differentials $\mathrm{d}f$ als Komposition der infinitesimalen Kurve mit f. $\square$

BEMERKUNG 4.3.4. *Aus Definition* def:differential *4.3.1 folgt direkt, dass die von der Identität* $\mathrm{id}\colon M \to M$ *induzierte Abbildung* $\mathrm{id}_*\colon \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M), \mathbb{R}) \to \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M), \mathbb{R})$ *auch die Identität ist. Insbesondere ist also das Differential für glatte Abbildungen funktoriell (als Funktor von der Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit Punkt* (M, p) *mit Abbildungen glatte punktierte Abbildungskeime in die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume).*

prop:diff-functorial

Proposition 4.3.5. *Sei $f\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus und $p \in M$. Dann haben wir Isomorphismen*

$$\begin{aligned} f_*\colon \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R}) &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N),\mathbb{R}) \\ \mathrm{d}f\colon \mathrm{T}_p(M) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{T}_{f(p)}(N) \end{aligned}$$

Beweis. Folgt direkt aus der Funktorialität des Differentials. □

Korollar 4.3.6 (glatte Invarianz der Dimension). *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei offene Teilmengen. Wenn es einen Diffeomorphismus $U \cong V$ gibt, dann gilt $n = m$.*

Beweis. Aus Theorem 4.2.5 und Beispiel 4.1.6 folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U),\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n = n$$

Analog folgt $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(V),\mathbb{R}) = m$. Anwendung von Proposition 4.3.5 liefert die Behauptung. □

cor:tangent-vs-der

Korollar 4.3.7. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Dann ist die lineare Abbildung*

$$\mathrm{T}_p(M) \to \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R})\colon v \mapsto D_v,$$

die einen Tangentialvektor auf die Richtungsableitung aus Definition 4.1.7 abbildet, ein Isomorphismus. Außerdem gibt es für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ ein kommutatives Diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_p(M) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{d}f"'] & \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R}) \arrow[d, "f_*"] \\ \mathrm{T}_{f(p)}(N) \arrow[r, "\cong"'] & \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_{f(p)}^\infty(N),\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus Proposition 4.3.5 und Theorem 4.2.5. Die Kommutativität des Diagramms folgt aus der ersten Aussage und einem analogen Quadrat für eine glatte Abbildung $f\colon U \to V$ für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Die Kommutativität in diesem Fall folgt daraus, dass beide vertikalen Abbildungen einfach durch die Jacobi-Matrix gegeben sind. □

Bemerkung 4.3.8. *Insbesondere können wir sowohl $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R})$ als auch T_pM als Definition des Tangentialraums einer Mannigfaltigkeit verwenden, und die zwei Definitionen von Differential sind mit dieser Identifikation kompatibel. Wir werden im weiteren Verlauf die notationelle Unterscheidung zwischen T_pM und $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R})$ weglassen und infinitesimale Kurven mit ihren durch die Richtungsableitung gegebenen Derivationen identifizieren.*

Aus Proposition 4.3.5 folgt auch, dass für eine Karte (U,ϕ) einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n und $p \in M$ die Abbildung ϕ einen Isomorphismus

$$\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R}) \to \operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_{\phi(p)}^\infty(\mathbb{R}^n),\mathbb{R})$$

induziert. Insbesondere hat der Tangentialraum an eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit auch Dimension n.

prop:tm-basis

Proposition 4.3.9. *Sei $(U,\phi) = (U,x^1,\dots,x^n)$ eine Karte um den Punkt p in der glatten Mannigfaltigkeit M. Dann ist $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ eine Basis von $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M),\mathbb{R})$.*

Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, sei $(U, x^1, \ldots, x^m)$ eine Karte um $p \in M$ und $(V, y^1, \ldots, y^n)$ eine Karte um $f(p)$. Dann gilt für das Differential

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)},$$

d.h. für die obige Wahl von Basen für die Tangentialräume ist die Jacobi-Matrix von f in den gewählten Karten die darstellende Matrix des Differentials.

Beweis. Nach Definition def:differential 4.3.1 gilt für das Differential ϕ_* der Kartenabbildung

$$\phi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p (f \circ \phi) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi \circ \phi^{-1}) = \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_{\phi(p)}(f)$$

Die Behauptung folgt aus Proposition prop:diff-functorial 4.3.5 und Theorem thm:tangent-vs-der 4.2.5 bzw. Bemerkung rem:tangent-basis 4.2.6.

Das Differential ist linear, d.h. es gibt $a^i_j \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \sum_{i=1}^n a^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)}$$

Dann ist $(a^i_j)_{i,j}$ die darstellende Matrix für f_*. Die Koeffizienten können wir ermitteln:

$$a^i_j = \left(\sum_{k=1}^n a^k_j \frac{\partial}{\partial y^k}\Big|_{f(p)}\right) y^i = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) y^i = \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ f) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)$$

□

Bemerkung 4.3.10. *Der Satz von der Umkehrfunktion thm:inverse-function-mfd 3.5.1 läßt sich dann umformulieren: eine glatte Abbildung zwischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p, wenn das Differential ein Isomorphismus ist.*

Bemerkung 4.3.11. *Für den Spezialfall $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ haben wir als darstellende Matrizen für die Differentiale γ_* und f_**

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Die Kettenregel prop:chain-rule 4.3.3 hat dann die aus der Analysis-Vorlesung übliche Form

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ \gamma)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Der Tangentialvektor an eine glatte Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ist das Bild von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ unter dem Differential γ_*.

rem:diff-total

Bemerkung 4.3.12. *Tatsächlich ist das Differential $\mathrm{d}f\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ für eine glatte Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ genau das totale Differential aus der Analysis II. Für eine Karte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ von M sind die Abbildungen $\mathrm{d}x^i$ (bzw. x^i_*) Linearformen auf T_pM. Genauer sind die $\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n$ die duale Basis zur Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ von T_pM. Das Differential $\mathrm{d}f$, als Linearform auf T_pM, läßt sich dann in der dualen Basis schreiben:*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

Dies ist genau die Formel für das totale Differential aus Analysis II.

Übungsaufgabe 4.3.13. *Seien M und N glatte Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass die Differentiale der Projektionsabbildungen Isomorphismen $\mathrm{T}_{(p,q)}(M \times N) \cong \mathrm{T}_p M \oplus \mathrm{T}_q M$ induzieren.*

Übungsaufgabe 4.3.14. *Sei G eine Liegruppe. Berechnen Sie das Differential der Multiplikation $G \times G \to G$ am Punkt $(1, 1)$.*

Übungsaufgabe 4.3.15. *Sei $A \in \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Differential der Konjugationsabbildung $M \mapsto AMA^{-1}$ an der Einheitsmatrix.*

4.4. Tangentialbündel

Bis jetzt haben wir die Tangentialräume an den Punkten einer Mannigfaltigkeit als separate Vektorräume behandelt. Wir wollen nun alle Tangentialräume zu einer Mannigfaltigkeit zusammenfassen, dem Tangentialbündel. Dies ist ein Spezialfall des allgemeineren Konzepts von Vektorbündeln. Dadurch können insbesondere Vektorfelder einfach als glatte Abbildungen betrachtet werden.

def:tangent-bdl

Definition 4.4.1. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Das* Tangentialbündel *für M ist, als Menge, gegeben durch*

$$\mathrm{T}M := \bigcup_{p \in M} \mathrm{T}_p M.$$

Es gibt eine natürliche Projektionsabbildung $\pi \colon \mathrm{T}M \to M \colon v \in \mathrm{T}_p M \mapsto p$.

Für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ von M haben wir eine Abbildung

$$\mathrm{d}\phi \colon \mathrm{T}_p U \to \mathrm{T}_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n,$$

die sich als Zusammensetzung des Differentials mit der Identifikation aus Beispiel ex:tangent-rn *4.1.6 ergibt. Diese Abbildung schickt einen Tangentialvektor auf seine Koordinaten bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ und ist ein Isomorphismus. Kombiniert mit der Kartenabbildung erhalten wir eine Abbildung*

$$(\phi \circ \pi, \mathrm{d}\phi) \colon \mathrm{T}U = \bigcup_{p \in U} \mathrm{T}_p U \to \phi(U) \times \mathbb{R}^n.$$

Auf $\mathrm{T}U$ wird dann eine Topologie dadurch definiert, dass $(\phi \circ \pi, \mathrm{d}\phi)$ ein Homöomorphismus sein soll, wobei $\phi(U) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ die von $\mathbb{R}^{2n}$ induzierte Topologie trägt.

Proposition 4.4.2. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit von Dimension n mit Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$. Die in Definition* def:tangent-bdl *4.4.1 gegebenen Abbildungen*

$$(\phi_i \circ \pi, \mathrm{d}\phi_i) \colon \mathrm{T}_p U_i \to \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

bilden einen Atlas $\{(\mathrm{T}U_i, (\phi_i \circ \pi, \mathrm{d}\phi_i))\}_{i \in I}$. Insbesondere ist das Tangentialbündel $\mathrm{T}M$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die C^∞-Kompatibilitätsbedingungen für den Atlas auf $\mathrm{T}M$. Seien $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ Karten für M. Auf $U \cap V$ haben wir als Kartenwechselabbildung

$$\phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \colon\ (\phi(p), v) \mapsto \left(\psi(p), \sum v^j \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

Das heisst, als Abbildung $\phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ haben wir die Kartenwechselabbildung $\psi \circ \phi^{-1}$ von M, und auf dem $\mathbb{R}^n$-Faktor haben wir Multiplikation $v \mapsto v \cdot \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ mit der Jacobi-Matrix für den Kartenwechsel, nach Proposition prop:tm-basis 4.3.9. Da sowohl $\psi \circ \phi^{-1}$ als auch die Multiplikation mit der Jacobi-Matrix glatte Abbildungen sind, erfüllen also die Karten $(\mathrm{T}U, (\phi \circ \pi, \mathrm{d}\phi))$ und $(\mathrm{T}V, (\psi \circ \pi, \mathrm{d}\psi))$ die C^∞-Kompatibilitätsbedingung.

Auf $\mathrm{T}M$ definieren wir eine Topologie durch Angabe einer Basis:

$$\{V \mid V \subseteq \mathrm{T}U \text{ offen}, (U, \phi \colon U \to \mathbb{R}^n) \text{ Karte im maximalen Atlas}\}$$

Es ist direkt zu sehen, dass $\mathrm{T}M$ die Vereinigung aller dieser Teilmengen ist. Außerdem ist für offene Teilmengen $V_1 \subseteq \mathrm{T}U_1$ und $V_2 \subseteq \mathrm{T}U_2$ der Schnitt

$$V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_2 \cap \mathrm{T}(U_1 \cap U_2) = (V_1 \cap (\mathrm{T}U_1 \cap \mathrm{T}U_2)) \cap (V_2 \cap (\mathrm{T}U_1 \cap \mathrm{T}U_2))$$

offen in $\mathrm{T}(U_1 \cap U_2)$, da $V_1 \cap \mathrm{T}(U_1 \cap U_2)$ offen in $\mathrm{T}(U_1 \cap U_2)$ ist. Damit haben wir gezeigt, dass die angegebenen Mengen die Basis einer Topologie sind.

Wir zeigen, dass $\mathrm{T}M$ eine abzählbare Basis hat. Sei $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ ein maximaler Atlas für M und $\{B_j\}_{j \in J}$ eine abzählbare Basis von M. Dann wählen wir für jedes U_i und jeden Punkt $p \in U_i$ eine offene Umgebung $p \in B_{p,i} \subseteq U_i$. Dies ist eine abzählbare Menge offener Mengen. Für jede offene Menge U und jeden Punkt $p \in U$ gibt es eine Karte (U_i, ϕ_i) mit $p \in U_i \subseteq U$ und $B_{p,i} \subseteq U_i \subseteq U$. Also ist U eine Vereinigung geeigneter $B_{p,i}$ und damit ist $\{B_{p,i}\}$ eine abzählbare Basis von M, deren offene Mengen zu Karten im maximalen Atlas gehören. Wir betrachten die Menge $\{\mathrm{T}B_{p,i}\}$. Jeder der Unterräume $\mathrm{T}B_{p,i}$ erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Die Vereinigung von gewählten Basen für die abzählbar vielen Räume $\mathrm{T}B_{p,i}$ ist eine abzählbare Basis für $\mathrm{T}M$.

Es ist direkt zu sehen, dass diese Topologie hausdorffsch ist. Es folgt, dass $\mathrm{T}M$ eine Mannigfaltigkeit ist. □

def:vector-bdl

DEFINITION 4.4.3. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein* glattes Vektorbündel von Rang r auf M *ist eine glatte Abbildung $\pi\colon E \to M$ zwischen Mannigfaltigkeiten, so dass gilt*

(1) *Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es einen Isomorphismus $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^r$, d.h. die Fasern der Abbildung π haben die Struktur von Vektorräumen.*
(2) *Für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von p und einen Diffeomorphismus $\tau\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ mit $\mathrm{pr}_1 \circ \tau(v) = v$, der für jeden Punkt $p \in U$ einen Isomorphismus $\tau|_p\colon \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^r$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen induziert.*

BEMERKUNG 4.4.4. *Die Diffeomorphismen $\tau\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ heißen* lokale Trivialisierungen. *Die Mannigfaltigkeit E heißt* Totalraum *des Vektorbündels, M heißt* Basis.

BEMERKUNG 4.4.5. *Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorbündel von Rang r. Für zwei lokale Trivialisierungen $\tau_U\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ und $\tau_V\colon \pi^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^r$ haben wir die* Übergangsabbildung

$$(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\alpha_i^{-1}} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\alpha_j} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r.$$

Aus den Bedingungen der lokalen Trivialisierbarkeit folgt, dass eine glatte Abbildung $A_{U,V}\colon U \cap V \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ existiert, so dass die Übergangsabbildung durch $\alpha_j \circ \alpha_i^{-1}(p, v) = (p, A_{U,V}(p)(v))$ gegeben ist.

BEMERKUNG 4.4.6. *Eine glatte Abbildung zwischen glatten Vektorbündeln ist ein kommutatives Diagram*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2, \end{tikzcd}$$

so dass für jeden Punkt $p \in M$, die Einschränkung

$$\overline{f}|_{\pi_1^{-1}(p)}\colon (E_1)_p = \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(f(p)) = (E_2)_{f(p)}$$

eine lineare Abbildung ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ die Kategorie der glatten Vektorbündel auf M mit glatten Bündelabbildungen.

BEISPIEL 4.4.7.
- *Für eine glatte Mannigfaltigkeit M heißt* $\mathrm{pr}_1 \colon M \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ *das* triviale Vektorbündel vom Rang r.
- *Für eine glatte Abbildung $f \colon M \to N$ und ein Vektorbündel $\pi \colon E \to N$ haben wir ein* induziertes Vektorbündel *auf M, dessen Totalraum durch*
$$f^*E := \{(p, v) \in M \times E \mid f(p) = \pi(v)\}$$
gegeben ist. Die Projektionsabbildung ist $\overline{\pi} \colon f^*E \subseteq M \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} M$. Die Vektorraumstruktur auf der Faser $\overline{\pi}^{-1}(p)$ ist gegeben durch die natürliche Identifikation $\overline{\pi}^{-1}(p) \cong \pi^{-1}(f(p))$. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq N$ mit lokaler Trivialisierung $\tau_U \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ haben wir eine lokale Trivialisierung auf $f^{-1}(U)$ durch
$$\overline{\pi}^{-1}(f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^r \colon x \mapsto (\overline{\pi}(x), \tau_U(\overline{f}(x)))$$
wobei $\overline{f} \colon f^*E \subseteq M \times E \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} E$ ist.
- *Für zwei Vektorbündel $E_1 \to M_1$ und $E_2 \to M_2$ ist $E_1 \times E_2 \to M_1 \times M_2$ ein Vektorbündel, das* Produktbündel. *Für zwei Vektorbündel E_1, E_2 auf M ist die Einschränkung des Produktbündels $E_1 \times E_2 \to M \times M$ entlang der Diagonalen $\Delta \colon M \to M \times M$ ein Vektorbündel, die sogenannte* Whitney-Summe.

□

ex:bdl-constructions

BEISPIEL 4.4.8. *Sei $F \colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$ ein Funktor von der Kategorie der $\mathbb{R}$-Vektorräume in sich. Für eine glatte Mannigfaltigkeit M induziert F einen Funktor $F \colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M) \to \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}(M)$ auf der Kategorie der Vektorbündel auf M. Dieser Funktor bildet ein Vektorbündel $\pi \colon E \to M$ auf das folgende Bündel ab: Der Totalraum ist, wie beim Tangentialbündel, $F(E) := \bigcup_{p \in M} F(E_p)$ und die Projektion π_F gegeben durch $v \in F(E_p) \mapsto p$. Für eine lokale Trivialisierung $\tau \colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist eine lokale Trivialisierung $\tau_F \colon \pi_F^{-1}(U) \to U \times F(\mathbb{R}^r)$ von $F(E)$ dadurch gegeben, dass für die Einschränkung*
$$\tau_F|_p \colon F(E_p) = \pi_F^{-1}(p) \to F(\mathbb{R}^r)$$
gilt $\tau_F|_p = F(\tau|_p)$.

Es gibt viele relevante Beispiele für diese Konstruktion bzw. die Erweiterung der obigen Konstruktion auf Funktoren mit mehreren Argumenten.
- *Für den Dualraum-Funktor $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ erhalten wir das duale Vektorbündel $E^\vee \to M$. Im Spezialfall $E = \mathrm{T}M$ heißt $\mathrm{T}M^\vee \to M$ das* Kotangentialbündel.
- *Für zwei Vektorbündel $E_1, E_2 \to M$ gibt es das Hom-Bündel* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to M$*, dessen Faser über dem Punkt p der Vektorraum der linearen Abbildungen $(E_1)_p \to (E_2)_p$ ist.*
- *Für zwei Vektorbündel $E_1, E_2 \to M$ gibt es das Tensorbündel $E_1 \otimes E_2 \to M$, dessen Faser über dem Punkt p das Tensorprodukt $(E_1)_p \otimes (E_2)_p$ ist.*

□

ÜBUNGSAUFGABE 4.4.9. *Zeigen Sie, dass die Mannigfaltigkeit $\mathrm{T}\,\mathrm{S}^n$ diffeomorph zu $\mathrm{S}^n \times \mathrm{S}^n \setminus \Delta$ ist, wobei Δ das Bild der diagonalen Einbettung $\mathrm{S}^n \hookrightarrow \mathrm{S}^n \times \mathrm{S}^n \colon x \mapsto (x, x)$ ist.*

4.5. Vektorfelder

DEFINITION 4.5.1. *Sei $\pi \colon E \to M$ ein glattes Vektorbündel, und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Ein* glatter Schnitt *von π über U ist eine glatte Abbildung $\sigma \colon U \to E$ mit $\pi \circ \sigma(p) = p$ für alle $p \in U$. Für eine offene Menge $U \subseteq M$ bezeichnen wir mit $\Gamma(U, E)$ die Menge der glatten Schnitte $U \to E$ von π über U.*

Ein glattes Vektorfeld *auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein glatter Schnitt des Tangentialbündels $\pi\colon \mathrm{T}M \to M$.*

Beispiel 4.5.2. *Wir betrachten den speziellen Fall eines Vektorfelds X auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Vektorfeld X ordnet jedem Punkt $p \in U$ einen Tangentialvektor $X_p \in \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ zu. Mit Hilfe der Basis $\frac{\partial}{\partial r^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n}|_p$ des Tangentialraums können wir das Vektorfeld als Linearkombination*

$$X_p = \sum a^i(p) \frac{\partial}{\partial r^i}\Big|_p, \quad p \in U, \quad a^i(p) \in \mathbb{R}$$

schreiben. Das Vektorfeld X ist glatt auf U, wenn die Funktionen a^i glatt auf U sind.

Allgemeiner können wir für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ einer glatten Mannigfaltigkeit M eine lokale Trivialisierung des Tangentialbündels $\mathrm{T}M \to M$ konstruieren:

$$\tau\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n\colon \left(v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p \in \mathrm{T}_pM\right) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n v^i e_i\right).$$

Ein Vektorfeld $X\colon M \to \mathrm{T}M$ kann dann in einer solchen lokalen Trivialisierung durch Komponentenfunktionen beschrieben werden: die Komposition

$$U \xrightarrow{X|_U} \mathrm{T}U \xrightarrow{\tau} U \times \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch $(\mathrm{id}_U, a^1, \dots, a^n)$, und wir können auf U schreiben $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann gilt wieder, dass das Vektorfeld genau dann glatt ist, wenn die Komponentenfunktionen a^i glatt sind.

In der Literatur wird diese Wahl von lokalen Koordinaten auf dem Vektorbündel durch eine Trivialisierung $\tau\colon \mathrm{T}U \to U \times \mathbb{R}^n$ auch Rahmen *genannt.* □

ex:df Beispiel 4.5.3. *Wie in Bemerkung 4.3.12 (rem:diff-total) können wir das Differential einer Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ als Schnitt $\mathrm{d}f\colon M \to \mathrm{T}M^\vee$ auffassen. Jedem Punkt $p \in M$ wird dabei die Linearform*

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

zugeordnet. Um nachzurechnen, dass es sich hier um einen glatten Schnitt handelt, können wir für eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ als Rahmen für $\mathrm{T}M^\vee$ die Schnitte $\mathrm{d}x^1, \dots, \mathrm{d}x^n$ verwenden. In diesem Rahmen sind die Koordinaten des Schnittes $\mathrm{d}f$ genau die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, die glatt sind, weil f glatt ist. □

Definition 4.5.4. *Die Menge der glatten Vektorfelder auf U wird mit $\mathfrak{X}(U)$ bezeichnet. Durch*

$$C^\infty(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)\colon \left(f, X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \mapsto \sum (f a^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

wird $\mathfrak{X}(U)$ zu einem Modul über dem Ring $C^\infty(U)$.

Definition 4.5.5. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^\infty(U)$ und $X \in \mathfrak{X}(U)$. Die* Ableitung von f in Richtung des Vektorfeldes $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial r^i}$ *ist definiert durch*

$$(Xf)(p) = X_p f = \sum a^i \frac{\partial f}{\partial r^i} \in C^\infty(U).$$

Proposition 4.5.6. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X \in \mathfrak{X}(U)$. Die Abbildung*

$$C^\infty(U) \to C^\infty(U)\colon f \mapsto Xf$$

ist eine Derivation. Insbesondere haben wir eine Abbildung

$$\mathfrak{X}(U) \to \mathrm{Der}(C^\infty(U))\colon X \mapsto (f \mapsto Xf).$$

Beweis. Es ist nur die Leibniz-Regel $X(fg) = fXg + gXf$ zu beweisen. Diese folgt daraus, dass für einen Punkt $p \in U$ der Tangentialvektor X_p, aufgefasst als Derivation, die Leibniz-Regel $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ erfüllt. $\square$

Definition 4.5.7. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Menge. Für zwei glatte Vektorfelder X und Y auf U definieren wir die* Lie-Klammer

$$[X, Y]_p f := (X_p Y - Y_p X) f.$$

Das Vektorfeld $[X, Y]$ ist wieder glatt, und ist genau der Kommutator der Vektorfelder in $\mathrm{Der}(C^\infty(U))$, s. Beispiel ex:lie-alg *4.2.2. Insbesondere ist $\mathfrak{X}(U)$ eine Lie-Algebra.*

Lemma 4.5.8. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge und $\Delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ eine Derivation.*

(1) Sei $f \in C^\infty(U)$ eine glatte Funktion und $V \subseteq U$ eine offene Teilmenge mit $f|_V \equiv 0$. Dann ist $\Delta(f)|_V \equiv 0$.

(2) Für $f \in C^\infty(U)$ und $x \in U$ hängt $\Delta(f)(x)$ nur von Δ und dem Keim $[f] \in C_x^\infty(U)$ ab.

Beweis. (1) Sei $x \in V$. Nach Proposition prop:bump A.6.2 existiert eine glatte Funktion $\phi \in C^\infty(U)$ so dass $\phi(x) = 1$ und $\phi|_{(U \setminus V)} \equiv 0$. Da $f|_V = 0$ ist $(1 - \phi) \cdot f = f$. Es folgt

$$\Delta(f)(x) = \Delta((1 - \phi) \cdot f)(x) = \Delta(1 - \phi)(x) \cdot f(x) + (1 - \phi)(x) \cdot \Delta(f)(x).$$

Da $f(x) = 1 - \phi(x) = 0$ ist $\Delta(f)(x) = 0$ wie behauptet.

(2) Seien $f, g \in C^\infty(U)$ zwei Funktionen mit demselben Keim $[f] = [g] \in C_x^\infty(U)$. Nach Definition existiert eine Umgebung W von x mit $f|_W = g|_W$. Nach (1) ist $(\Delta(f) - \Delta(g))|_W = \Delta(f - g)|_W = 0$. Also ist $\Delta(f)(x) = \Delta(g)(x)$. $\square$

Durch glatte Ausdehnung von Funktionen können wir eine Derivation in $C^\infty(U)$ auf den Halm $C_p^\infty(U)$ an einem Punkt $p \in U$ einschränken. Für einen Funktionenkeim $(V, f) \in C_p^\infty(U)$ können wir nach Proposition prop:extension A.6.3 eine Funktion $\tilde{f} \colon U \to \mathbb{R}$ und eine offene Teilmenge $W \subseteq V$ finden, so dass $\tilde{f}|_W = f|_W$.

def:localization-der

Definition 4.5.9. *Für eine Derivation $\Delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ und einen Punkt $p \in U$ definieren wir eine Derivation $\Delta_p \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R})$ durch*

$$\Delta_p((U, f)) = \Delta(\tilde{f})(p).$$

thm:xvsder

Satz 4.5.10. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und U eine offene Teilmenge. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{X}(U) \to \mathrm{Der}(C^\infty(U)) \colon X \mapsto (f \mapsto Xf)$$

ein Isomorphismus von Lie-Algebren und $C^\infty(U)$-Moduln.

Beweis. Nach Definition bildet die Abbildung die Lie-Klammer auf den Kommutator in $\mathrm{Der}(C^\infty(U))$ ab. Außerdem ist die Abbildung kompatibel mit der Multiplikation mit glatten Funktionen: für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$ wird fX auf $g \mapsto fXg$ abgebildet, was genau der Multiplikation der glatten Funktion f und der Derivation $g \mapsto Xg$ entspricht. Damit reicht es, die Bijektivität zu zeigen.

Für die Injektivität bemerken wir, dass für einen Punkt $p \in U$ die Auswertung am Punkt p ein kommutatives Diagramm induziert

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U)) \arrow[d] \\
\mathrm{T}_p(U) \arrow[r] & \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(U), \mathbb{R}),
\end{tikzcd}$$

d.h. am Punkt p ist die Abbildung $\mathfrak{X}(U) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ einfach die Abbildung, die den Tangentialvektor X_p auf die zugehörige Derivation abbildet. Wenn ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ auf die Derivation 0 abgebildet wird, dann muss bereits das Vektorfeld an allen Punkten 0 sein.

Für die Surjektivität benutzen wir wieder die Einschränkung der Derivation aus Definition def:localization-der 4.5.9. Für $\Delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(U))$ definieren wir ein Vektorfeld $X_\Delta \in \mathfrak{X}(U)$, indem wir dem Punkt $p \in U$ den Tangentialvektor $\Delta_p \in \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(U), \mathbb{R})$ zuordnen. Ohne Beschränkung können wir annehmen, dass $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte ist. Dann sind die Koordinatenfunktionen des Vektorfelds X_Δ durch die Ableitungen $\Delta(x^i)$ gegeben, und das bedeutet gerade, dass die zu X_Δ gehörende Derivation genau Δ ist. (Dies ist die globalere Variante von Satz thm:tangent-vs-der 4.2.5 bzw. Korollar cor:tangent-vs-der 4.3.7.) □

ex:vfexist

Übungsaufgabe 4.5.11. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $p \in M$ ein Punkt. Sei $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von p und $X \in \mathfrak{X}(U)$ ein glattes Vektorfeld. Zeigen Sie, dass es ein glattes Vektorfeld $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(M)$ und eine Umgebung $V \subseteq U$ von p gibt, so dass $\tilde{X}|_V = X|_V$.*

Definition 4.5.12. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Eine* Integralkurve für X durch den Punkt p *ist eine glatte Kurve $\gamma\colon (a,b) \to M$ so dass $a < 0 < b$, $\gamma(0) = p$ und für alle $t \in (a,b)$ gilt* $\mathrm{d}\gamma|_t(1) = X_{\gamma(t)}$.

Integralkurven werden durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen beschrieben: in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir

$$X_{\gamma(t)} = \sum a^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}, \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\gamma|_t(1) = \sum \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}.$$

Eine Integralkurve durch den Punkt $p = (p^1, \dots, p^n)$ ist dann genau eine Lösung des Systems

$$\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} = a^i(\gamma(t)), \gamma^i(0) = p^i$$

Der folgende Satz aus der Analysis II/III besagt, dass zumindest in Karten Integralkurven für Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten existieren und eindeutig sind.

Satz 4.5.13. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $p_0 \in U$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Funktion.*

(1) Die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y), y(0) = p_0$$

hat eine eindeutige glatte Lösung $y\colon (a,b) \to V$.

(2) Für jeden Punkt $p_0 \in V$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq V$, ein $\epsilon > 0$ und eine glatte Funktion $y\colon (-\epsilon, \epsilon) \times W \to V$ so dass für alle $(t,q) \in (-\epsilon,\epsilon) \times W$ gilt

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,q) = f(y(t,q)), y(0,q) = q.$$

Durch die Eindeutigkeit können dann Integralkurven in verschiedenen überlappenden Karten zusammengeklebt werden. Der zweite Teil der Aussage bedeutet, dass die Lösungen des gewöhnlichen DGL-Systems glatt von den Anfangsbedingungen abhängen. Insbesondere können Integralkurven durch alle Punkte einer geeigneten Umgebung W von p gefunden werden. Dies führt zum Begriff des lokalen Flusses:

Definition 4.5.14. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Ein* lokaler Fluss *um einen Punkt $p \in U$ ist eine glatte Funktion $F\colon (-\epsilon,\epsilon) \times W \to U$, wobei $W \subseteq U$ eine offene Umgebung von p ist, so dass gilt*

(1) $F(0, q) = q$ *für alle* $q \in W$,
(2) $F(t, F(s, q)) = F(t + s, q)$, *wenn beide Seiten definiert sind.*

BEMERKUNG 4.5.15. *Hier muss* $F(t, q)$ *interpretiert werden als der Punkt, an dem die Integralkurve durch den Punkt* q *zum Zeitpunkt* t *angekommen ist. Ein lokaler Fluss, der auf* $\mathbb{R} \times M$ *definiert ist, heißt* globaler Fluss. *Die Sätze aus der Analysis II/III sagen, dass lokale Flüsse für Vektorfelder immer existieren. Globale Flüsse existieren im Allgemeinen nicht. Ein Vektorfeld, für das ein globaler Fluss existiert, heißt* vollständig.

Zum Schluss erwähnen wir noch den Begriff des Zusammenhangs, der die Richtungsableitung für Vektorfelder verallgemeinert.

DEFINITION 4.5.16. *Sei* $E \to M$ *ein glattes Vektorbündel auf einer glatten Mannigfaltigkeit. Ein* Zusammenhang *auf* E *ist eine* $\mathbb{R}$*-lineare Abbildung*

$$\nabla \colon \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathrm{T}M^\vee),$$

für die die Leibniz-Regel $\nabla(\sigma f) = (\nabla\sigma)f + \sigma \otimes \mathrm{d}f$ *erfüllt ist.*

BEISPIEL 4.5.17. *Für ein Vektorfeld* $X \colon M \to \mathrm{T}M$ *und einen Zusammenhang* $\nabla \colon \Gamma(E) \to \Gamma(E \otimes \mathrm{T}M^\vee)$ *erhalten wir eine* kovariante Ableitung von Schnitten in E in Richtung X *durch*

$$\nabla_X \colon \Gamma(E) \to \Gamma(E) \colon \sigma \mapsto (\nabla\sigma)(X),$$

wobei wir $\nabla\sigma$ *als Schnitt in* $\Gamma(E \otimes \mathrm{T}M^\vee) = \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{T}M, E))$ *auffassen und mit der Auswertung* $\Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{T}M, E)) \to \Gamma(E)$ *an* X *zusammensetzen.*

Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist der Zusammenhang $\mathrm{d} \colon \Gamma(\underline{\mathbb{R}}) \to \Gamma(\mathrm{T}M^\vee)$, *der einem glatten Schnitt des trivialen Geradenbündels* $\underline{\mathbb{R}}$ *– einer glatten Funktion* $f \colon M \to \mathbb{R}$ *– das Differential* $\mathrm{d}f$ *zuordnet. In diesem Fall erhalten wir genau die oben diskutierte Ableitung einer Funktion in Richtung eines Vektorfelds.* □

ÜBUNGSAUFGABE 4.5.18. *Zeigen Sie, dass ein* n*-dimensionales glattes reelles Vektorbündel genau dann trivial ist, wenn es* n *glatte Vektorfelder gibt, die an jedem Punkt linear unabhängig sind.*

4.6. Ausblick

4.6.1. Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Grassmann-Mfkt $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$, Gauß-Abbildung für Tangentialbündel für Untermfkt in $\mathbb{R}^n$. Topologie: Klassifikation von Vektorbündeln durch Homotopieklassen von Abbildungen $X \to \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$

4.6.2. Zusatzstrukturen. Reduktionen der Strukturgruppe, fast komplexe, fast symplektische Mfkt, Blätterungen

4.6.3. Euler-Zahl und Satz vom Igel. Vektorfelder auf Sphären, Satz vom Igel, maximale Anzahl von linear unabhängigen Vektorfeldern auf der Sphäre, Beziehung zu Euler-Charakteristik

KAPITEL 5

Kritische Punkte und Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel geht es nun genauer um die Beziehung zwischen Mannigfaltigkeiten und glatten Abbildungen und ihren linearen Annäherungen durch Tangentialbündel und Differential. Zentrales Werkzeug ist der Satz von der Umkehrfunktion, der es erlaubt, aus Aussagen über das Differential Aussagen über die glatte Abbildung (z.B. einfache Form in geeigneten Koordinaten) zu folgern.

DEFINITION 5.0.1. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung. Dann heißt* f Immersion *bzw.* Submersion am Punkt $p \in M$, *wenn* $f_*\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$ *injektiv bzw. surjektiv ist.*

DEFINITION 5.0.2. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung. Der* Rang von f am Punkt $p \in M$ *ist der Rang der linearen Abbildung* $f_*\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$.

BEMERKUNG 5.0.3. *Der Rang der Abbildung* $f_*\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$ *ist die Dimension des Bildes von* f_*. *Für gewählte Karten* $(U, x^1, \dots, x^m)$ *und* $(V, y^1, \dots, y^n)$ *ist der Rang der Abbildung* f_* *gleich dem Rang der Jacobi-Matrix* $\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$.

Zusammen mit dem Satz von der Umkehrfunktion liefert der Rang einer Abbildung gute Kriterien, wann für eine glatte Abbildung $f\colon M \to N$ das Urbild eines Punktes $q \in N$ eine Mannigfaltigkeit ist; dies ist eine weitere reiche Quelle für natürlich vorkommende Mannigfaltigkeiten.

5.1. Kritische Punkte und Satz von Sard

DEFINITION 5.1.1. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung. Ein Punkt* $p \in M$ *heißt* regulärer Punkt, *wenn das Differential* $\mathrm{d}f\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$ *surjektiv ist; andernfalls heißt* p kritischer Punkt.

Ein Punkt $q \in N$ *heißt* kritischer Wert, *wenn es einen kritischen Punkt* $p \in M$ *mit* $f(p) = q$ *gibt; andernfalls heißt* q regulärer Wert.

PROPOSITION 5.1.2. *Sei* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *eine glatte Abbildung. Ein Punkt* $p \in M$ *ist genau dann ein kritischer Punkt, wenn es eine Karte* $(U, x^1, \dots, x^n)$ *um* p *gibt, so dass für alle* $i = 1, \dots, n$ *gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0.$$

BEWEIS. Es gibt nur zwei Möglichkeiten für $\mathrm{d}f\colon \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$. Entweder ist $\mathrm{d}f$ die Null-Abbildung oder $\mathrm{d}f$ ist surjektiv (und damit ist p ein regulärer Punkt). Die darstellende Matrix für das Differential ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p)\right)$$

Also ist p ein kritischer Punkt, wenn alle partiellen Ableitungen von f verschwinden. □

BEMERKUNG 5.1.3. *Der Begriff des kritischen Punktes umfasst also alles, was zu Extremwertaufgaben in der Analysis-Vorlesung gesagt wird.*

Proposition 5.1.4. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist die Menge der kritischen Punkte abgeschlossen in M. Wenn M kompakt ist, ist die Menge der regulären Werte offen in N.*

Beweis. Der Fall $\dim M < \dim N$ ist klar: alle Punkte in M sind kritische Punkte. Wir können also annehmen, dass $\dim M \geq \dim N$ ist. Wir zeigen, dass für jede Karte $(U, x^1, \ldots, x^m)$ die Menge der kritischen Punkte in U abgeschlossen ist. Für eine Karte $(V, y^1, \ldots, y^n)$ mit $f(U) \subseteq V$ ist ein Punkt $p \in U$ kritisch genau dann, wenn die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right)_{i,j}$$

nicht maximalen Rang hat. Die Menge der kritischen Punkte in U wird also definiert durch die Bedingung, dass die endliche Menge der $(n \times n)$-Minoren (Determinanten von quadratischen Teilmatrizen) identisch null ist. Also ist die Menge der kritischen Punkte in U abgeschlossen.

Wenn M kompakt ist, ist die Abbildung f abgeschlossen. Damit ist dann die Menge der kritischen Werte abgeschlossen, also ist die Menge der regulären Werte offen. □

thm:sard

Satz 5.1.5 (Satz von Morse–Sard). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann hat die Menge*

$$\mathrm{Krit}(f) = \{f(p) \mid p \in U; \mathrm{rg}(f_*\colon \mathrm{T}_p(U) \to \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}^n) < n\}$$

der kritischen Werte von f Lebesgue-Maß null.

Beweis. Die Aussage wird mittels Induktion über m bewiesen. Der Fall $m = 0$ ist klar.

Wir definieren $K_i \subseteq U$ als die Menge der Punkte $p \in U$, für die alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung $\leq i$ verschwinden. Dann haben wir eine absteigende Kette von Teilmengen $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$, wobei $K \subseteq U$ die Menge der kritischen Punkte von f ist. Der Beweis besteht aus drei Schritten: (i) zeigt, dass $f(K \setminus K_1)$ eine Nullmenge ist, (ii) zeigt, dass $f(K_i \setminus K_{i+1})$ eine Nullmenge ist, und (iii) zeigt, dass $f(K_i)$ für genügend großes i eine Nullmenge ist.

(i) Im ersten Schritt wollen wir zeigen, dass $f(K \setminus K_1)$ eine Nullmenge ist. Da für $n = 1$ schon $K = K_1$ gilt, nehmen wir an, dass $n \geq 2$ ist. Wir wollen zeigen, dass für jeden Punkt $x \in K \setminus K_1$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von x existiert, so dass $f(V \cap K)$ eine Nullmenge ist. Da $\mathbb{R}^m$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und das Lebesgue-Maß abzählbar additiv ist, reicht das, um die Behauptung zu bekommen.

Da $x \notin K_1$ gibt es i und j so dass $\frac{\partial f^i}{\partial r^j} \neq 0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $i = j = 1$. Dann hat die Abbildung

$$h\colon U \to \mathbb{R}^m\colon x \mapsto (f^1(x), x^2, \ldots, x^m).$$

eine invertierbare Jacobi-Matrix, also gibt es eine Umgebung V von x, so dass $h\colon V \to V' = h(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus ist. Damit ist für die Komposition $g = f \circ h^{-1}\colon V' \to \mathbb{R}^n$ die Menge K' der kritischen Punkte genau $h(V \cap K)$. Insbesondere ist $g(K') = f(V \cap K)$.

Nach Konstruktion bildet g einen Punkt $(t, x^2, \ldots, x^m) \in V'$ in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ ab, d.h. g bildet Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}$ auf Hyperebenen $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ ab. Für festes t bezeichnen wir mit $g_t\colon \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ die entsprechende Einschränkung. Die kritischen Punkte von g_t sind genau die kritischen Punkte für g, da die Jacobi-Matrix die Form

$$\left(\frac{\partial g^i}{\partial r^j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial g_t^i}{\partial r^j} \end{pmatrix}$$

hat. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von g_t in $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge. Anders gesagt ist der Schnitt der Menge $g(K')$ mit jeder Hyperebene $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ eine Nullmenge. Außerdem ist $g(K')$ messbar: die Menge der kritischen Punkte K' ist abgeschlossen, und $\mathbb{R}^m$ ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen (z.B. durch $\mathbb{Z}^n$-Verschiebung des Einheitswürfels $[0,1]^m$); dann ist auch $g(K')$ eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen, also messbar. Nach dem Satz von Fubini (Analysis III?) ist $g(K') = f(V \cap K)$ eine Nullmenge.

(ii) Im zweiten Schritt wollen wir zeigen, dass $f(K_i \setminus K_{i+1})$ eine Nullmenge ist. Das Argument ist dem aus dem ersten Schritt sehr ähnlich. Für einen Punkt $x \in K_i \setminus K_{i+1}$ gibt es eine $(i+1)$-te Ableitung, die nicht verschwindet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben wir also eine Funktion

$$w = \frac{\partial^k f^r}{\partial r^{s_2} \cdots \partial r^{s_{k+1}}},$$

die an x verschwindet, aber für die $\frac{\partial w}{\partial r^1} \neq 0$ ist. Wie im ersten Schritt können wir die Funktion $h(x) = (w(x), x^2, \ldots, x^n)$ betrachten. Diese Funktion bildet eine Umgebung V von x diffeomorph in eine Menge $V' = h(V) \subseteq \mathbb{R}^m$ ab, und es gilt $h(K_i \cap V) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Wir betrachten wieder die Funktion $g = f \circ h^{-1} \colon V' \to \mathbb{R}^n$ bzw. deren Einschränkung $\overline{g} \colon (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Menge der kritischen Werte von $\overline{g}$ eine Nullmenge, die $h(K_i \cap V)$ enthält. Also ist $\overline{g} \circ h(K_i \cap V) = f(K_i \cap V)$ eine Nullmenge. Wie im Schritt (i) reicht, das für die Behauptung.

(iii) Im dritten Schritt zeigen wir, dass $f(K_i)$ für genügend großes i eine Nullmenge ist. Für einen Würfel $I^m \subseteq U$ von Kantenlänge δ wollen wir zeigen, dass $f(K_i \cap I^m)$ eine Nullmenge ist. Die Menge K_i kann mit abzählbar vielen solchen Würfeln überdeckt werden, und aus der abzählbaren Additivität des Lebesgue-Maßes folgt dann die Behauptung.

Da I^m kompakt ist, folgt aus dem Satz von Taylor (Analysis II), dass für $x \in K^i \cap I^m$ und $x+h \in I^m$ gilt $f(x+h) = f(x) + R(x,h)$ mit $\|R(x,h)\| \leq c\|h\|^{i+1}$ gilt, wobei die Konstante c nur von f und I^m abhängt. Wir können jetzt den Würfel I^m in a^m Würfel der Seitenlänge δ/a unterteilen. Sei I_1 ein Würfel der Unterteilung, der einen Punkt aus K_i enthält, und für jeden Punkt $x+h \in I_1$ gilt $\|h\| \leq \sqrt{m}(\delta/a)$.

Aus der Abschätzung mit Taylor erhalten wir, dass $f(I_1)$ in einem Würfel der Kantenlänge

$$2c\left(\frac{\sqrt{m}\delta}{a}\right)^{i+1}.$$

Damit ist das Bild $f(K_i \cap I^m)$ in einer Vereinigung von maximal a^m Würfeln enthalten, deren Gesamtvolumen durch

$$a^{m-n(i+1)} \cdot \left(2c\left(\sqrt{m}\delta\right)^{i+1}\right)^n$$

beschränkt ist. Der zweite Faktor ist unabhängig von a. Für $m - n(i+1) < 0$, alternativ $i+1 > m/n$, geht also die obere Schranke für das Gesamtvolumen gegen 0 für $a \to \infty$. Also ist $f(K_i \cap I^n)$ eine Nullmenge. $\square$

cor:brown

Korollar 5.1.6 (Satz von Brown). *Für eine glatte Abbildung $f \colon M \to N$ ist die Menge der regulären Werte dicht in N, d.h. der Abschluss der Menge der regulären Werte ist N.*

Beweis. Folgt aus Satz thm:sard 5.1.5: in jeder Karte von N ist die Menge der regulären Werte dicht. $\square$

Übungsaufgabe 5.1.7. *Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{S}^i \to \mathrm{S}^i \colon (y \in \mathbb{R}^i, t \in \mathbb{R}) \mapsto (2ty, 2t^2 - 1)$ den regulären Wert $(0, \ldots, 0, 1)$ hat.*

Übungsaufgabe 5.1.8. *Sei $p\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ gegeben durch ein homogenes Polynom vom Grad $m > 1$ in k Variablen, d.h. $p(tx_1, \ldots, tx_k) = t^m p(x_1, \ldots, x_k)$. Zeigen Sie, dass 0 der einzige kritische Wert ist und die Mannigfaltigkeiten $p^{-1}(a)$ für alle $a > 0$ diffeomorph sind.*

Übungsaufgabe 5.1.9. *Die Menge*

$$\left\{(z, w) \in \mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n \mid \sum_{i=0}^{m} z_i w_i = 0\right\}$$

für $m \leq n$ und $z = [z_0 : \cdots : z_m], w = [w_0 : \cdots : w_n]$ ist eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$.

5.2. Untermannigfaltigkeiten und Abbildungen von konstantem Rang

Definition 5.2.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Eine Teilmenge $S \subseteq M$ heißt* reguläre Untermannigfaltigkeit von Dimension k, *wenn für jeden Punkt $p \in S$ eine Karte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ von M um p existiert, so dass*

$$U \cap S = \{(x^1, \ldots, x^n) \in U \mid x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}.$$

Eine solche Karte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ heißt an S angepasste Karte von M.

Bemerkung 5.2.2. *Die Differenz* $\dim M - k$ *der Dimensionen heißt auch* Kodimension *von S in M.*
Die Definition umfasst auch offene Untermannigfaltigkeiten.

Proposition 5.2.3. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $S \subseteq M$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit. Dann ist S eine Mannigfaltigkeit, und*

$$\{(U \cap S, \phi|_S) \mid (U, \phi) \text{ an } S \text{ angepasste Karte}\}$$

ist ein glatter Atlas für S.

Beweis. Für zwei an S angepasste Karten $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ und $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ ist die Kartenwechselabbildung $\phi \circ \psi^{-1}\colon \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ glatt. Wir nehmen an, dass die Kodimension $n - k$ ist, d.h. dass S in den Karten durch das Verschwinden der letzten $n - k$ Koordinaten definiert ist. Dann bildet $\phi \circ \psi^{-1}$ die Menge $\psi(U \cap V \cap S) \subseteq \psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ in die Menge $\phi(U \cap V \cap S) \subseteq \phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ab. Die Komponenten dieser Abbildung sind Komponenten von $\phi \circ \psi^{-1}$, also ist diese Einschränkung auf $\mathbb{R}^k$ auch glatt. Da nach Definition für jeden Punkt in S eine angepasste Karte existiert, haben wir einen glatten Atlas für S. Also ist S eine Mannigfaltigkeit der Dimension k. □

Definition 5.2.4. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Für einen Punkt $p \in N$ heißt*

$$f^{-1}(p) = \{q \in M \mid f(q) = p\}$$

die Niveaumenge *(engl.* level set*) zu p. Für $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ nennt man $f^{-1}(0)$ auch* Verschwindungsmenge *von f.*

prop:regular-level

Proposition 5.2.5. *Sei $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung und sei $p \in N$ ein regulärer Wert. Wenn $f^{-1}(p) \neq \emptyset$, dann ist $f^{-1}(p)$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension* $\dim M - \dim N$.

Beweis. Sei $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ eine Karte um p. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\psi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ annehmen. Für diese Karte ist insbesondere $f^{-1}(V) \subseteq M$ eine offene Umgebung von $f^{-1}(p)$, und $f^{-1}(p)$ ist die Verschwindungsmenge von $\psi \circ f$ in $f^{-1}(V)$. Insbesondere können wir die folgende einfachere Situation annehmen: $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ und $p = 0$ in $\mathbb{R}^n$ ist ein regulärer Wert.

Da $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ ist f für alle Punkte in $f^{-1}(0)$ eine Submersion, also $m \geq n$; außerdem sind alle Punkte in $f^{-1}(0)$ regulär. Für einen Punkt $q \in f^{-1}(0)$ wählen wir eine Karte $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^m)$ um q. Da q regulär ist, hat die Jacobi-Matrix $(\partial f^i/\partial x^j)_{i,j}$ Rang n. Durch Umordnen der Koordinaten können wir erreichen, dass der Block $(\partial f^i/\partial x^j)_{m-n+1 \leq j \leq m}$ invertierbar ist.

Auf U betrachten wir die Funktionen $x^1, \ldots, x^{m-n}, f^1, \ldots, f^n \colon U \to \mathbb{R}$. Die Jacobi-Matrix für die zusammengesetzte Funktion $(x^1, \ldots, x^{m-n}, f^1, \ldots, f^n) \colon U \to \mathbb{R}^m$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} & \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^j} \\ \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^\beta} & \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq \alpha, \beta \leq m-n$ und $m-n+1 \leq i, j \leq m$. Diese Matrix hat Determinante

$$\det \left(\frac{\partial f^{i-m+n}}{\partial x^j} \right)_{m-n+1 \leq i,j \leq m} \neq 0,$$

nach Konstruktion. Nach dem Satz von der Umkehrfunktion existiert also eine Umgebung U' von p so dass $(U', x^1, \ldots, x^{m-n}, f^1, \ldots, f^n)$ eine Karte von M ist. In dieser Karte wird $f^{-1}(0)$ beschrieben durch $f^1 = \cdots f^n = 0$. Also ist diese Karte angepasst an $f^{-1}(0)$, und $f^{-1}(0)$ ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit der Dimension $m-n$. □

Mit Proposition prop:regular-level 5.2.5 können wir viele weitere Beispiele von Mannigfaltigkeiten konstruieren.

Beispiel 5.2.6. *Die n-dimensionale Sphäre ist in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch die Gleichung $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ gegeben. Dies entspricht der Verschwindungsmenge der Funktion*

$$f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \colon (x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 - 1$$

Die Jacobi-Matrix ist

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r^1} = 2x^1, \ldots, \frac{\partial f}{\partial r^{n+1}} = 2x^{n+1} \right)$$

und damit ist der einzige kritische Punkt $(0, \ldots, 0)$. Also ist S^n eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$. □

Beispiel 5.2.7. *Allgemeiner ist für ein Polynom $f(x_1, \ldots, x_n)$ die Menge*

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

eine reguläre Untermannigfaltigkeit, wenn f und $\partial f/\partial r^i$ keine gemeinsamen Nullstellen haben. Untermannigfaltigkeiten dieser Form nennt man glatte Hyperflächen.

Zum Beispiel ist für die kubische Fläche $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 1$ eine glatte Hyperfläche: die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 3.$$

Die gemeinsame Nullstelle der partiellen Ableitungen ist $x = y = z = \frac{3}{2}$, aber wegen $3\frac{9}{4} - 3\frac{27}{8} = -\frac{27}{8} \neq 1$ liegt dieser Punkt nicht auf der Fläche. □

Beispiel 5.2.8. *Wir können auch im projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ Hyperflächen definieren: jedes homogene Polynom definiert eine Funktion $f \colon \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ und $\{f = 0\}$ ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit, wenn f keine gemeinsamen Nullstellen mit allen partiellen Ableitungen hat. Solche Mannigfaltigkeiten nennt man glatte projektive Hyperflächen.*

Die projektive Fläche $f(x,y,z) = xyw + xyz + yzw + xzw = 0$ *ist singulär, d.h. keine reguläre Untermannigfaltigkeit in* $\mathbb{RP}^3$*. Die partiellen Ableitungen sind*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yw+yz+zw, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xw+xz+zw, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy+yw+xw, \quad \frac{\partial f}{\partial w} = xy+yz+xz.$$

Die Punkte $[1:0:0:0]$, $[0:1:0:0]$, $[0:0:1:0]$ *und* $[0:0:0:1]$ *sind singulär, da an ihnen sowohl* f *als auch alle partiellen Ableitungen verschwinden. Man kann zeigen (das ist aber etwas schwieriger), dass dies die einzigen singulären Punkte sind. (für Bilder: Stichwort Cayley nodal cubic)* □

Beispiel 5.2.9. *Die Matrizengruppe* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *ist eine reguläre Untermannigfaltigkeit von* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, konkret realisiert als Niveau-1-Menge der glatten Abbildung* $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*. Um zu zeigen, dass die 1 tatsächlich ein regulärer Punkt der Determinantenabbildung ist, entwickeln wir die Determinante nach der* i*-ten Zeile:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij},$$

wobei m_{ij} *der entsprechende* (i,j)*-Minor ist, d.h. die Determinante der Matrix, die aus* A *durch Entfernen der* i*-ten Zeile und der* j*-ten Spalte entsteht. Damit sehen wir*

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

Eine Matrix ist also ein kritischer Punkt der Determinante, wenn alle (i,j)*-Minoren verschwinden. Eine solche Matrix hat aber nach dem Entwicklungssatz Determinante* 0*. Also ist* SL_n *eine reguläre Untermannigfaltigkeit von Dimension* $n^2 - 1$*.* □

Satz 5.2.10 (constant rank theorem). *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung, die in einer Umgebung von* $p \in M$ *konstanten Rang* k *hat. Dann existiert eine Karte* $(U, \phi\colon U \to \mathbb{R}^m)$ *mit* $\phi(p) = 0$ *und eine Karte* $(V, \psi\colon V \to \mathbb{R}^n)$ *mit* $\psi(f(p)) = 0$*, so dass für alle Punkte in* U *gilt*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^k, 0, \ldots, 0).$$

Wenn für einen Punkt $q \in N$ *die Niveaumenge* $f^{-1}(q)$ *eine offene Umgebung hat, auf der* f *konstanten Rang* k *hat, dann ist* $f^{-1}(q)$ *eine reguläre Untermannigfaltigkeit in* M *von Kodimension* k*.*

Bemerkung 5.2.11. *Der Beweis wird an dieser Stelle weggelassen. Die Technik ist dieselbe, wie im Beweis von Proposition* `prop:regular-level` *5.2.5: eine Aussage über das Differential wird durch Koordinatenwechsel mit Hilfe des Satzes von der inversen Funktion zu einer lokalen Beschreibung der Abbildung.*

Beispiel 5.2.12. *Mit der Abbildung* $f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\colon A \mapsto A^{\mathrm{t}}A$ *können wir die orthogonale Gruppe* O *als* $f^{-1}(\mathrm{I}_n)$ *identifizieren. Am Punkt* $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *haben wir* $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$*, und das Differential von* f *am Punkt* I_n *ist* $\mathrm{d}f\colon M \mapsto M^{\mathrm{t}} + M$*. Die Abbildung* $\mathrm{d}f$ *hat konstanten Rang* $n(n+1)/2$*. Aus dem Satz vom konstanten Rang folgt, dass* $\mathrm{O}(n)$ *eine reguläre Untermannigfaltigkeit von* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *von Dimension* $n(n-1)/2$ *ist.* □

Immersionen und Submersionen sind insbesondere auch Abbildungen mit konstantem Rang. Damit ergeben sich zwei Spezialfälle des Satzes vom konstanten Rang.

Proposition 5.2.13 (Immersionssatz). *Sei* $f\colon M \to N$ *eine Immersion am Punkt* $p \in M$*. Dann existieren Karten* $(U, \phi\colon U \to \mathbb{R}^m)$ *mit* $\phi(p) = 0$ *und* $(V, \psi\colon V \to \mathbb{R}^n)$ *mit* $\psi(f(p)) = 0$*, so dass in einer Umgebung von* $\phi(p)$ *gilt*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^m, 0, \ldots, 0).$$

PROPOSITION 5.2.14 (Submersionssatz). *Sei $f\colon M \to N$ eine Submersion am Punkt $p \in M$. Dann existieren Karten $(U, \phi\colon U \to \mathbb{R}^m)$ mit $\phi(p) = 0$ und $(V, \psi\colon V \to \mathbb{R}^n)$ mit $\psi(f(p)) = 0$, so dass in einer Umgebung von $\phi(p)$ gilt*

$$(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(r^1, \ldots, r^n, r^{n+1}, \ldots, r^m) = (r^1, \ldots, r^n).$$

BEMERKUNG 5.2.15.

- *Insbesondere sind Submersionen offene Abbildungen: lokal sind sie durch Projektionsabbildungen gegeben, die offen sind.*
- *Wenn $f\colon M \to N$ eine Submersion ist, dann ist $S = f^{-1}(p)$ für jeden Punkt $p \in N$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit von M. Für einen Punkt $q \in S$ haben wir dann eine exakte Sequenz von Tangentialräumen*

$$0 \to \mathrm{T}_q S \to \mathrm{T}_q M \xrightarrow{\mathrm{d}f} \mathrm{T}_p N \to 0.$$

  Insbesondere ist der Kern von $\mathrm{d}f$ genau der Tangentialraum an S im Punkt q. Wenn auf $\mathrm{T}_q M$ ein Skalarprodukt existiert, wird das orthogonale Komplement $\mathrm{T}_q S^\perp$ isomorph auf $\mathrm{T}_p N$ abgebildet. Die Vektoren in $\mathrm{T}_q S^\perp$ heißen dann Normalenvektoren *zu S.*
- *Wir hatten bereits das Tangentialbündel als Beispiel für ein Vektorbündel von Rang r auf einer Mannigfaltigkeit von Dimension r. Für eine Immersion $\iota\colon M \to N$ Normalenbündel haben wir für jeden Punkt $p \in M$ eine injektive lineare Abbildung $\mathrm{d}\iota\colon \mathrm{T}_p M \hookrightarrow \mathrm{T}_p N$. Es gibt ein Vektorbündel auf M, dessen Faser über dem Punkt p genau der Kokern $\operatorname{coker} \mathrm{d}\iota = \mathrm{T}_p N / \mathrm{d}\iota(\mathrm{T}_p M)$ ist. Dieses Bündel heißt* Normalenbündel.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.16. *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und sei $(U, \phi\colon U \to \mathbb{R}^m)$ eine Karte. Zeigen Sie, dass sich für einen Punkt $p \in U$ der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ mit dem Bild der linearen Abbildung $\mathrm{d}_{\phi(p)} \phi^{-1}\colon \mathbb{R}^m \cong \mathrm{T}_{\phi(p)} U \to \mathbb{R}^N$ identifizieren lässt.*

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.17. *Sei $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-m}$ eine glatte Abbildung und $0 \in \mathbb{R}^{N-m}$ ein regulärer Wert. Bezeichne $M = f^{-1}(0)$ die zugehörige Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass sich der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ an einen Punkt $p \in M$ mit dem Unterraum $\ker \mathrm{d}_p f$ von $\mathbb{R}^N$ identifizieren lässst.*

Beschreiben Sie den Tangentialraum von $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ als Unterraum von $\mathbb{R}^{n+1}$.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.18. *Beweisen Sie, dass die Menge*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 x^3 + 3zx^2 + 3x - zy^2 - 2y = 1\}$$

eine zum $\mathbb{R}^2$ diffeomorphe glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.19. *Zeigen Sie, dass die Menge*

$$\{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z_0^2 + \cdots + z_n^2 = 1\}$$

eine glatte Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^{n+1}$ ist, und diffeomorph zu $\mathrm{T}\,\mathrm{S}^n$ ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.20. *Seien $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\colon t \mapsto (\mathrm{e}^{\lambda t} \cos t, \mathrm{e}^{\lambda t} \sin t)$. Sei $X = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$, und*

$$f\colon X \to \mathrm{S}^2\colon (x, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}}(x, 0, z).$$

Zeigen Sie, dass f eine Immersion ist.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.21. *Sei $X = \{(\sin z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ und $Y = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $f(x, y, z) = (x, y)$ keine Submersion ist.*

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.22. *Wir realisieren $\mathrm{S}^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}$ und $\mathrm{S}^2 = \mathbb{CP}^1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $(u, v) \mapsto [u : v]$ eine Submersion ist.*

5.3. Einbettungen und Whitney'scher Einbettungssatz

Definition 5.3.1. *Eine glatte Abbildung* $f\colon M \to N$ *heißt* Einbettung, *wenn sie eine injektive Immersion und ein Homöomorphismus auf das Bild* $f(M)$ *(mit der von* N *induzierten Unterraumtopologie) ist.*

Proposition 5.3.2. *Für eine Einbettung* $f\colon M \to N$ *ist das Bild* $f(M)$ *eine reguläre Untermannigfaltigkeit in* N*. Umgekehrt ist für eine reguläre Untermannigfaltigkeit* $S \subseteq M$ *die Inklusionsabbildung* $\iota\colon S \hookrightarrow M$ *eine Einbettung.*

Beweis. (1) Aus dem Immersionssatz folgt, dass es Karten $(U, x^1, \ldots, x^m)$ um p und $(V, y^1, \ldots, y^n)$ um $f(p)$ gibt, so dass $f\colon U \to V$ die Form $(x^1, \ldots, x^m) \mapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$ hat. Es bleibt zu zeigen, dass es eine Umgebung von $f(p)$ gibt, in der $f(M)$ durch die Verschwindung von $y^{m+1}, \ldots, y^n$ definiert ist. (An dieser Stelle haben wir $f(U) \subseteq \{y^{m+1}, \ldots, y^n\}$, aber a priori könnte die Verschwindungsmenge größer als $f(U)$ sein.) Da $f\colon M \to f(M)$ ein Homöomorphismus ist (wobei $f(M)$ die von N induzierte Unterraumtopologie trägt), ist $f(U)$ offen in $f(M)$. Also existiert eine offene Menge V' in N, so dass $V' \cap f(M) = f(U)$ ist. Aus $V \cap V' \cap f(M) = V \cap f(U) = f(U)$ folgt, dass $f(U)$ in $V \cap V'$ durch das Verschwinden von $y^{m+1}, \ldots, y^n$ definiert ist und $(V \cap V', y^1, \ldots, y^n)$ eine an $f(M)$ angepasste Karte um $f(p)$ ist.

(2) Wenn $S \subseteq M$ eine Untermannigfaltigkeit ist, ist die Inklusionsabbildung ein Homöomorphismus auf das Bild. Bleibt zu zeigen, dass die Inklusionsabbildung eine Immersion ist. Sei $(U, x^1, \ldots, x^n)$ eine an S angepasste Karte von M, d.h. dass S in U durch das Verschwinden von $x^{s+1}, \ldots, x^n$ definiert wird, und $(S \cap U, x^1, \ldots, x^s)$ eine Karte für S ist. In diesen Karten sehen wir, dass die Inklusionsabbildung ι eine Immersion auf $S \cap U$ ist. □

Übungsaufgabe 5.3.3. *Wenn* M *eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann ist jede injektive Immersion* $f\colon M \to N$ *schon eine Einbettung.*

thm:embedding

Satz 5.3.4. *Sei* M *eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension* n*. Dann existiert ein* $N > n$ *und eine Einbettung* $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$*.*

Beweis. Da M kompakt ist, existiert ein endlicher Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ von M. Wir wählen eine der Überdeckung $\{U_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ untergeordnete glatte Partition der Eins $\{\lambda_i\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$, s. Proposition prop:partition-unity A.6.5.

Für die Konstruktion der Einbettung setzen wir $N = r(n+1)$. Die Abbildung wird definiert durch

$$\iota\colon M \to \mathbb{R}^{rn+r} \colon p \mapsto (\lambda_1(p)\phi_1(p), \ldots, \lambda_r(p)\phi_r(p), \lambda_1(p), \ldots, \lambda_r(p))$$

(Hier trägt jedes $\lambda_i(p)\phi_i(p)$ immer n Komponenten zur Gesamtdimension bei.) Dabei ist zu bemerken, dass $\phi_i(p)$ nicht überall definiert ist. Da $\operatorname{supp}\lambda_i \subseteq U_i$, gibt es eine offene Umgebung V_i von $M \setminus U_i$, so dass $\lambda_i \cdot \phi_i = 0$ auf $U_i \cap V_i$ verschwindet. Also kann $\lambda_i \cdot \phi_i$ glatt durch $\lambda_i \cdot \phi_i|_{V_i} = 0$ auf M fortgesetzt werden. Insbesondere ist die Abbildung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^N$ glatt.

Wir zeigen, dass für einen Punkt p mit $\lambda_i(p) \neq 0$ die Abbildung ι eine Immersion ist. Multiplikation mit $\lambda_i(p)$ ist ein Diffeomorphismus und damit ist die Abbildung $\mathrm{d}(\lambda_i \cdot \phi_i)\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\lambda_i(p)\phi_i(p)}\mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus, also muss $\mathrm{d}\iota\colon \mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\iota(p)}\mathbb{R}^N$ injektiv sein. Für die Partition der Eins ist $\{x \in M \mid \lambda_i(x) \neq 0\}_{i\in\{1,\ldots,r\}}$ eine offene Überdeckung von M, also ist ι eine Immersion.

Es bleibt noch zu zeigen, dass ι injektiv ist. Seien $p, q \in M$ zwei Punkte. Da λ eine Partition der Eins ist, gibt es ein j, so dass $\lambda_j(p) \neq 0$. Wenn $\iota(p)$ und $\iota(q)$ gleich sind, sind insbesondere die Koordinaten $\lambda_j(p)$ und $\lambda_j(q)$ gleich, also $p, q \in \{x \in M \mid \lambda_j(x) \neq 0\}$. Aber $\lambda_j\phi_j$ ist ein Diffeomorphismus auf dieser Menge, also muss bereits $p = q$ gelten.

Nach Voraussetzung ist M kompakt, also ist ι ein Einbettung. $\square$

thm:whitney

SATZ 5.3.5 (Whitney Einbettungssatz). *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 2$. Dann existiert eine Einbettung $\iota\colon M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.*

BEWEIS. Nach Satz 5.3.4 gibt es eine Einbettung $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$. Wir nehmen an, dass $N > 2n+1$ und wollen zeigen, dass auch eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{N-1}$ existiert. Wir identifizieren $\mathbb{R}^{N-1}$ als $\{r^N \equiv 0\}$ und betrachten die Parallelprojektion $\mathrm{pr}_v\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ für einen gegebenen Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ mit $v^N \neq 0$.

Für einen Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$ wollen wir die Bedingungen ermitteln, unter denen $\mathrm{pr}_v|_M$ eine glatte Einbettung ist. Die Einschränkung $\mathrm{pr}_v|_M$ ist injektiv, wenn v nicht parallel zu einer Sekante von M ist, d.h. für alle $p, q \in M$ muss gelten $v \neq \frac{p-q}{\|p-q\|}$. Für einen Tangentialvektor $w \in \mathrm{T}_pM$ an einem Punkt $p \in M$ ist w im Kern von pr_v, wenn v und w parallel sind. Dabei fassen wir T_pM als Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$ vermittels $d\iota$ auf. Insbesondere wird $\mathrm{pr}_v|_M$ eine Immersion, wenn für alle Punkte $p \in M$ und Tangentialvektoren $w \in \mathrm{T}_pM$ gilt $v \neq \frac{w}{\|w\|}$.

Wir formulieren die Bedingungen um. Die Abbildung $\mathrm{pr}_v|_M$ ist injektiv, wenn v nicht im Bild der glatten Abbildung

$$\sigma\colon M \times M \setminus \Delta \to \mathrm{S}^{N-1}\colon (p,q) \mapsto \frac{p-q}{\|p-q\|}$$

liegt. Da $\dim M \times M \setminus \Delta = 2n < N-1 = \dim \mathrm{S}^{N-1}$, ist nach Satz 5.1.5 bzw. Korollar 5.1.6 das Komplement dicht. Das heißt, dass es in jeder offenen Teilmenge von S^{N-1} einen Punkt v gibt, so dass pr_v injektiv ist.

Für die zweite Bedingung reicht es, die Aussage für Vektoren im Einheitssphärenbündel

$$\mathrm{T}_1M = \{v \in \mathrm{T}M \mid \|v\| = 1\}$$

zu prüfen. Aus Proposition 5.2.5, angewendet auf die Norm-Abbildung $\nu\colon \mathrm{T}M \to \mathbb{R}\colon v \mapsto \nu(v) = \|v\|^2$, folgt, dass T_1M eine reguläre Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}M$ ist. Da M kompakt ist, ist auch T_1M kompakt.

Wir definieren die Abbildung $\tau\colon \mathrm{T}_1M \to \mathrm{S}^{N-1}$, indem wir $\mathrm{T}M$ als Untermannigfaltigkeit von $M \times \mathbb{R}^N$ auffassen, und $\mathrm{T}_1M \subseteq M \times \mathrm{S}^{N-1}$ auf den zweiten Faktor projizieren. Die Abbildung τ ist glatt, und wegen $\dim \mathrm{T}_1M = 2n-1 < \dim \mathrm{S}^{N-1}$ ist das Bild nirgends dicht. Da T_1M kompakt ist, ist das Komplement W des Bildes von τ eine dichte offene Teilmenge in S^{N-1}. Also ist der Durchschnitt $W \cap (\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1})$ eine offene Teilmenge W_0. Diese Menge enthält dann einen Vektor v, der nicht im Bild von σ liegt. Für solch einen Vektor v ist $\mathrm{pr}_v|_M\colon M \to \mathbb{R}^{N-1}$ eine injektive Immersion, und da M kompakt und Hausdorff ist, auch eine Einbettung. $\square$

BEMERKUNG 5.3.6. *Das ist tatsächlich noch die einfachere Variante. Allgemeiner besagt der Whitney'sche Einbettungssatz, dass für jede n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit eine Einbettung nach $\mathbb{R}^{2n}$ und eine Immersion nach $\mathbb{R}^{2n-1}$ existiert. (Zum Beispiel ist die Boy'sche Fläche eine konkrete Darstellung einer Immersion $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Man kann zeigen, dass keine Einbettung $\mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ existiert.)*

ÜBUNGSAUFGABE 5.3.7. *Sei $h\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ eine symmetrische Bilinearform, für die $x \neq 0$ und $y \neq 0$ immer $h(x,y) \neq 0$ impliziert. Zeigen Sie, dass die Abbildung $g\colon \mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^{n+k}\colon x \mapsto h(x,x)/\|h(x,x)\|$ eine glatte Einbettung $\mathbb{RP}^n \to \mathrm{S}^{n+k}$ induziert.*

Die Bilinearform

$$h\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}\colon ([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_n]) \mapsto [z_0 : \cdots : z_{2n}]$$

mit $z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j$ induziert eine Einbettung $\mathbb{RP}^n \to \mathrm{S}^{2n}$.

Übungsaufgabe 5.3.8. *Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen injektive Immersionen aber keine Einbettungen sind:*

(1) $\gamma_1 \colon (-\pi/2, 3\pi/2) \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (\sin 2t, \cos t)$
(2) $\gamma_2 \colon \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \colon t \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,t}, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,ct})$ *für* $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.4. Anwendungen

5.4.1. Fundamentalsatz der Algebra.

lem:degree

Lemma 5.4.1. *Sei* $f \colon M \to N$ *eine glatte Abbildung zwischen* n*-dimensional Mannigfaltigkeiten, und sei* M *kompakt. Für einen regulären Wert* $x \in N$ *ist* $f^{-1}(x)$ *eine endliche Menge, und die Abbildung*

$$\deg \colon R = \{x \in N \mid x \text{ regulärer Wert}\} \to \mathbb{N} \colon x \mapsto \# f^{-1}(x)$$

ist lokal konstant.

Beweis. Sei $x \in N$ ein regulärer Wert von f. Da M kompakt ist, ist $f^{-1}(x)$ kompakt. Da x ein regulärer Wert ist, sind alle Urbilder $y \in f^{-1}(x)$ reguläre Punkte, und damit $f_* \colon \mathrm{T}_y(M) \to \mathrm{T}_x(N)$ ein Isomorphismus. Also ist für jeden Punkt $y \in f^{-1}(x)$ die Abbildung f ein lokaler Diffeomorphismus an y und damit sind alle Punkte in $f^{-1}(x)$ isoliert. Für einen regulären Wert $x \in N$ der Abbildung $f \colon M \to N$ ist also die Menge $f^{-1}(x)$ endlich.

Für einen regulären Wert $x \in N$ ist an allen Punkten $y \in f^{-1}(x)$ das Differential $f_* \colon \mathrm{T}_y M \to \mathrm{T}_x N$ ein Isomorphismus. Für jeden der Punkte $y_1, \ldots, y_l \in f^{-1}(x)$ existiert also eine offene Umgebung U_i von y_i, auf der f einen Diffeomorphismus $U_i \to f(U_i)$ induziert. Nach Konstruktion ist deg auf der offenen Umgebung $\bigcap_{i=1}^l f(U_i) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^l U_i\right)$ von x konstant. □

Satz 5.4.2. *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom* $F(z)$ *hat eine Nullstelle.*

Beweis. Durch die stereographische Projektion $p \colon \mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ identifizieren wir die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$. Das Polynom $F(z)$ liefert dann eine Abbildung

$$f \colon \mathrm{S}^2 \to \mathrm{S}^2 \colon x \mapsto \begin{cases} (0,0,1) & x = (0,0,1) \\ p^{-1} \circ F \circ p(x) & x \neq (0,0,1) \end{cases}$$

Da f in der Karte durch ein Polynom gegeben ist, ist f auf $\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ nach Definition glatt.

Wir müssen noch zeigen, dass f glatt in einer Umgebung von $(0,0,1)$ ist. Dazu benutzen wir die andere Karte $(\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}, q)$ mit der stereographischen Projektion $q \colon \mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$. Wir kennen bereits die Kartenwechselabbildung $p \circ q^{-1}$; nach der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist $p \circ q^{-1}(z) = \overline{z}^{-1}$. Dann können wir f in der Karte $(\mathrm{S}^2 \setminus \{0,0,-1\}), q)$ berechnen:

$$q \circ f \circ q^{-1}(z) = q \circ p^{-1} \circ F \circ p \circ q^{-1}(z) = \overline{F(\overline{z}^{-1})}^{-1}.$$

Für $F(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ ist diese Abbildung gegeben durch

$$\frac{z^n}{\sum_{i=0}^n \overline{a_i} z^i}.$$

Damit ist die Funktion f auch glatt in der Karte $(\mathrm{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}, q)$.

Die glatte Abbildung f hat nur eine endliche Anzahl von kritischen Punkten, da die kritischen Punkte genau die Nullstellen der Ableitung $F'(z)$ sind (und F nach Annahme nicht konstant ist). Damit ist die Menge $R \subset \mathrm{S}^2$ der regulären Punkte von f das Komplement einer endlichen Teilmenge von S^2, also zusammenhängend. Nach Lemma 5.4.1 ist die Funktion $x \mapsto \# f^{-1}(x)$ auf R lokal konstant, also konstant.

Die Funktion kann nicht konstant 0 sein, da F nicht konstant ist. Also liegen alle regulären Werte im Bild von f, und da S^2 kompakt ist, muss f surjektiv sein. Die Elemente in $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ sind die Nullstellen des Polynoms F. □

5.4.2. Morse-Theorie. Anwendung Morse-Theorie: nicht-ausgeartete kritische Punkte, lokale Struktur (inverse/implicit function + Sylvester=Morse-Lemma). Morse-Funktion: alle kritischen Punkte nicht-ausgeartet. Variante von Sard: Morse-Funktionen sind dicht.

evtl Diskussion Transversalität

5.4.3. Brouwer'scher Fixpunktsatz. vorher Diskussion Mannigfaltigkeiten mit Rand

5.5. Ausblick: Immersions- und Einbettungstheorie

Diese Beziehung zwischen infinitesimalen Eigenschaften und globalen Eigenschaften (hier: Immersionen vs. Einbettungen, reguläre Punkte vs. Untermannigfaltigkeiten) ist ein weitreichendes Kapitel der Differentialtopologie.

Erwähnung Homotopieprinzip: Übergang von Abbildung zwischen Tangentialbündeln zu Immersionen (Smale sphere eversion), allgemeiner immersion and embedding theory.

KAPITEL 6

Differentialformen

In diesem Kapitel geht es um Differentialformen. Das erste Beispiel einer Differentialform ist das Differential $\mathrm{d}f$ einer glatten Funktion $f \in C^\infty(M)$. Wie bereits diskutiert, können wir $\mathrm{d}f$ als Linearform auf Tangentialräumen oder besser als Schnitt des Kotangentialbündels betrachten. Differentialformen sind dann alternierende Multilinearformen auf Tangentialräumen; in Bündelformulierung sind glatte Differentialformen von Grad k glatte Schnitte von äußeren Potenzen des Kotangentialbündels: $\Omega^k(M) = \Gamma(M, \bigwedge^k \mathrm{T}M^\vee)$. Die wesentlichen Operationen mit Differentialformen sind das Dachprodukt und die äußere Ableitung d, die das Differential von glatten Funktionen auf k-Formen verallgemeinert. Die äußere Ableitung führt zum De-Rham-Komplex, der Analysis und Topologie von Mannigfaltigkeiten verbindet.

6.1. Multilineare Algebra

Wir wiederholen die relevanten Aussagen aus LAII. Alle Vektorräume sind $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Für einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis $e_1, \ldots, e_n$ haben wir den Dualraum $V^\vee = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R})$ mit der dualen Basis $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, die durch $\alpha^i(e_j) = \delta^i_j$ charakterisiert ist. Anders gesagt, gilt $\alpha^i(v) = v^i$ für einen Vektor $v = \sum v^i e_i$.

Für zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume V und W klassifiziert das Tensorprodukt bilineare Abbildungen auf $V \times W$: Für jede bilineare Abbildung $f\colon V \times W \to U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes W \to U$, so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Allgemeiner klassifiziert das Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ für Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ die multilinearen/n-linearen Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_n \to U$, d.h. die Abbildungen, die linear in jedem der n Argumente sind.

Für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V haben wir die *Tensoralgebra* $\mathrm{T}^\bullet(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i}$, wobei $V^{\otimes 0} = \mathbb{R}$ gesetzt wird. Die einzelnen $\mathrm{T}^i(V) = V^{\otimes i}$ sind $\mathbb{R}$-Vektorräume. Mit der Multiplikation

$$V^{\otimes i} \times V^{\otimes j} \to V^{\otimes i+j} \colon (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i, w_1 \otimes \cdots \otimes w_j) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_j$$

wird $\mathrm{T}^\bullet(V)$ zu einer graduierten assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra.

In $\mathrm{T}^n(V)$ betrachten wir den Untervektorraum

$$\mathcal{I}^n(V) = \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mid \exists 1 \leq i < j \leq n : v_i = v_j \rangle \subseteq \mathrm{T}^n(V).$$

Wir definieren die *äußere Algebra*

$$\bigwedge\nolimits^\bullet V = \bigoplus_{n \geq 0} \bigwedge\nolimits^n V, \qquad \bigwedge\nolimits^n V = \mathrm{T}^n(V)/\mathcal{I}^n(V).$$

Da $\mathcal{I}^\bullet(V)$ in $\mathrm{T}^\bullet(V)$ ein zweiseitiges Ideal ist, induziert die Multiplikation der Tensoralgebra eine Multiplikation auf der äußeren Algebra.

Es gibt eine andere Beschreibung der äußeren Algebra. Auf $\mathrm{T}^n(V) = V^{\otimes n}$ wirkt die symmetrische Gruppe Σ_n durch vertauschen der Tensorfaktoren, d.h. $\sigma \in \Sigma_n$ wirkt auf einem Elementartensor $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ durch $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$. Wir nennen ein Element $a \in \mathrm{T}^n(V)$ *alternierend*, wenn $\sigma(a) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a$ für alle $\sigma \in \Sigma_n$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Alt}^n(V) \subseteq \mathrm{T}^n(V)$ den Untervektorraum der alternierenden Tensoren in $\mathrm{T}^n(V)$.

Es gibt eine Antisymmetrisierungsabbildung

$$\mathrm{Alt}\colon \mathrm{T}^n(V) \to \mathrm{Alt}^n(V)\colon v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \left(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}\right).$$

Die einzelnen Vektorräume $\mathrm{Alt}^n(V)$ von alternierenden n-Tensoren können dann zu einer assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra zusammengefasst werden, deren Multiplikation durch die folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\mathrm{Alt}^i(V) \times \mathrm{Alt}^j(V) \to \mathrm{Alt}^{i+j}(V)\colon (a,b) \mapsto a \wedge b = \frac{(i+j)!}{i!j!} \mathrm{Alt}(a \otimes b).$$

Lemma 6.1.1. *Die Komposition* $\mathrm{Alt}^\bullet(V) \to \mathrm{T}^\bullet(V) \to \bigwedge^\bullet(V)$ *ist ein Isomorphismus von Algebren.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Proposition 6.1.2.
(1) *Für zwei Elemente* $a \in \mathrm{Alt}^i(V)$ *und* $b \in \mathrm{Alt}^j(V)$ *gilt* $a \wedge b = (-1)^{ij} b \wedge a$.
(2) *Für eine Basis* $e_1, \ldots, e_n$ *von* V *ist* $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ *eine Basis von* $\bigwedge^k(V)$. *Insbesondere ist* $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{\dim V}{k}$ *und* $\dim \bigwedge^\bullet(V) = 2^{\dim V}$.

Beweis. Übungsaufgabe □

Definition 6.1.3. *Eine Multilinearform* $f\colon V^n \to \mathbb{R}$ *heißt* symmetrisch, *wenn für jede Permutation* $\sigma \in \Sigma_n$ *gilt* $f(v_1, \ldots, v_n) = f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$.

Eine Multilinearform $f\colon V^n \to \mathbb{R}$ *heißt* alternierend, *wenn für jede Permutation* $\sigma \in \Sigma_n$ *gilt* $f(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$.

Bemerkung 6.1.4. *Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum* V *können wir dann die alternierenden* k*-Multilinearformen mit* $\mathrm{Alt}^k(V)$ *identifizieren. Wie oben erhalten wir dann eine assoziative graduiert-kommutative Algebra* $\mathrm{Alt}^\bullet(V)$. *Das* Dachprodukt *für alternierende Multilinearformen* $f \in \mathrm{Alt}^p(V)$ *und* $g \in \mathrm{Alt}^q(V)$ *ist dann wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned} & (f \wedge g)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) \\ = \; & \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Beispiel 6.1.5.
(1) *Ein Skalarprodukt* $\langle -, - \rangle\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist eine symmetrische bilineare Abbildung.*
(2) *Die Determinante von* $(n \times n)$*-Matrizen, aufgefasst als Abbildung*

$$\det\colon (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$$

auf dem Raum der Spaltenvektoren ist eine alternierende multilineare Abbildung.
(3) *Das Kreuzprodukt* $- \times -\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\colon (v,w) \mapsto v \times w$ *ist alternierend.*

(4) Für zwei lineare Abbildungen $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ ist das Dachprodukt

$$f \wedge g\colon V \times V \to \mathbb{R}\colon (u, v) \mapsto f(u)g(v) - f(v)g(u).$$

$\square$

rem:alt-functor

Bemerkung 6.1.6. *Für die Anwendung auf Mannigfaltigkeiten, Vektorbündel und Differentialformen benötigen wir noch eine kurze Bemerkung zur Funktorialität. Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ von endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen haben wir einen induzierten Homomorphismus der Vektorräume von alternierenden Multilinearformen* $\mathrm{Alt}^p(f^\vee)\colon \mathrm{Alt}^p(W^\vee) \to \mathrm{Alt}^p(V^\vee)$. *Diese induzierte Abbildung ist auch kompatibel mit dem Dachprodukt, so dass wir auch einen Homomorphismus der äußeren Algebren $\bigwedge^\bullet f^\vee\colon \bigwedge^\bullet W^\vee \to \bigwedge^\bullet V^\vee$ erhalten. Diese Zuordnungen sind funktoriell, wir erhalten also Funktoren* $\mathrm{Alt}^k\colon \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{Vect}_{\mathbb{R}}$*; zusammengefasst ist* $\mathrm{Alt}^\bullet$ *ein Funktor von der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume in die Kategorie der assoziativen graduiert-kommutativen Algebren.*

Übungsaufgabe 6.1.7. *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $0 \neq \omega \in$* $\mathrm{Alt}^n(V)$ *eine alternierende n-Form. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $v \mapsto \omega(v, -)$ einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\cong} \mathrm{Alt}^{n-1} V$ induziert. Wie hängt der Isomorphismus von ω ab?*

Übungsaufgabe 6.1.8. *(1) Auf dem $\mathbb{R}^3$ seidie alternierende Bilinearform ω durch die Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir bezeichnen mit δ^i die zu e_i duale Basis des $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie ω als Linearkombination der Basisvektoren $\delta^i \wedge \delta^j$.

(2) Berechnen Sie den Wert von $\delta^1 \wedge \delta^3$ auf $v_1 = (2, 4, 5)$ und $v_2 = (-1, 0, 3)$.

Übungsaufgabe 6.1.9. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Form $\phi \in \mathrm{Alt}^q(V^\vee)$ heißt zerlegbar, wenn es Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in V^\vee$ gibt, so dass $\phi = \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_q$ gilt.*

(1) Zeigen Sie, dass für $\dim V \leq 3$ jede alternierende Multilinearform zerlegbar ist.

(2) Geben Sie im Fall $\dim V = 4$ eine nicht zerlegbare alternierende Multilinearform an.

6.2. Differentialformen

Für eine glatte Mannigfaltigkeit M haben wir das Tangentialbündel $\mathrm{T}M \to M$ und das dazu duale *Kotangentialbündel* $\mathrm{T}M^\vee \to M$. Nach Bemerkung rem:alt-functor 6.1.6 können wir nun die Bündel-Konstruktionen aus Beispiel ex:bdl-constructions 4.4.8 anwenden, um die Bündel

$$\bigwedge^k \mathrm{T}M^\vee \to M$$

zu erhalten. Die Faser des Bündels $\bigwedge^k(M)$ an einem Punkt $p \in M$ ist die k-te äußere Potenz $\bigwedge^k \mathrm{T}_pM^\vee$ des Kotangentialraums am Punkt p.

Definition 6.2.1. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge. Eine* glatte Differentialform vom Grad k auf U *(kurz: k-*Form *auf U) ist ein glatter Schnitt von $\bigwedge^k \mathrm{T}M^\vee \to M$ über U. Der Vektorraum der k-Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.*

Bemerkung 6.2.2. *Für eine gegebene Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir die Differentiale $\mathrm{d}x^i|_p$ als Basis des Kotangentialraums $\mathrm{T}_pU^\vee$. Damit bilden dann die Dachprodukte $\mathrm{d}x^{i_1}|_p \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}|_p$ mit $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ eine Basis des Raums der k-Formen $\bigwedge^k \mathrm{T}_pU^\vee$ am Punkt p. Eine glatte k-Form auf U läßt sich dann in den durch die Karte gegebenen Koordinaten als*

$$\omega = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}, \#I = k} a_I \mathrm{d}x^I$$

schreiben, wobei wir für eine gegebene Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ das relevante Dachprodukt als $\mathrm{d}x^I = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ geschrieben wird, und die Koeffizienten a_I glatte Funktionen auf U sind.

Beispiel 6.2.3. *Der einfachste Spezialfall ist $\Omega^0(U)$. Da $\bigwedge^0 \mathrm{T}_pU^\vee \cong \mathbb{R}$ sind die 0-Formen einfach reell-wertige Funktionen auf U.*

Der nächste Spezialfall einer Differentialform ist das Differential $\mathrm{d}f$ einer Funktion $f : M \to \mathbb{R}$. Für einen Punkt $p \in M$ ordnet das Differential jedem Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_pM$ eine reelle Zahl zu – den Wert der Richtungsableitung von f in Richtung des Tangentialvektors v. Diese Zuordnung ist linear, d.h. wir können das Differential als Schnitt des Kotangentialbündels, also als 1-Form auffassen. Wie in Beispiel 4.5.3 können wir das Differential $\mathrm{d}f$ in den Koordinaten einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ darstellen:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i$$

□

Beispiel 6.2.4. *Für eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist das Kotangentialbündel $\mathrm{T}M^\vee$ eine 2n-dimensionale Mannigfaltigkeit, und die Projektionsabbildung $\pi : \mathrm{T}M^\vee \to M$ ist eine glatte Abbildung. Auf $\mathrm{T}M^\vee$ existiert eine 1-Form λ, die wie folgt definiert ist. Ein Punkt $\omega_p \in \mathrm{T}M^\vee$ ist eine Linearform $\omega_p : \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ auf dem Tangentialraum für einen Punkt $p \in M$. Für einen Tangentialvektor X_{ω_p} am Punkt p ist das Bild $\mathrm{d}\pi(X_{\omega_p})$ von X_{ω_p} unter dem Differential $\mathrm{d}\pi : \mathrm{T}_{\omega_p}(\mathrm{T}M^\vee) \to \mathrm{T}_pM$ ein Tangentialvektor am Punkt p. Dann können wir die Linearform ω_p auf dem Tangentialvektor $\mathrm{d}\pi(X_{\omega_p})$ auswerten und erhalten eine glatte 1-Form:*

$$\lambda(X_{\omega_p}) = \omega_p(\mathrm{d}\pi(X_{\omega_p}))$$

Diese Form heißt Liouville-Form oder Poincaré-Form, und ist das symplektische Potential für die symplektische Struktur des Kotangentialbündels. Diese 1-Form (und ihre äußere Ableitung als symplektische Form) spielt eine wichtige Rolle in der Formulierung der klassischen Mechanik mittels symplektischer Mannigfaltigkeiten.

□

Eine glatte 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ liefert eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$: für ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ erhalten wir eine Abbildung $M \to \mathbb{R}$, indem wir am Punkt $p \in M$ die Linearform $\omega_p : \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ auf dem Tangentialvektor X_p auswerten. Dies liefert eine Abbildung

$$\Omega^1(M) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M)),$$

die wegen $\omega_p(f(p)X_p) = f(p)\omega_p(X_p)$ auch $C^\infty(M)$-linear ist.

Die Glattheit der Auswertungsabbildung impliziert bereits, dass die 1-Form glatt ist. (Dafür müssen wir über allgemeinere 1-Formen reden, die wir lokal in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ als $\omega = \sum a_i \mathrm{d}x^i$ schreiben, wobei die a_i nicht notwendigerweise glatte Abbildungen sind. Alternativ können wir über stetige 1-Formen als stetige Schnitte des Kotangentialbündels sprechen.)

lem:smooth1form

LEMMA 6.2.5. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine 1-Form ω auf M ist genau dann glatt, wenn für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X)$ eine glatte Funktion auf M ist.*

BEWEIS. ($\Rightarrow$) Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte für M. Wir schreiben $\omega \in \Omega^1(M)$ als $\omega = \sum a_i \mathrm{d}x^i$ und $X \in \mathfrak{X}(M)$ als $X = \sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ mit $a_i, b^j \in C^\infty(U)$. Dann ist

$$\omega(X) = \left(\sum a_i \mathrm{d}x^i\right)\left(\sum b^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum a_i b^j \delta^i_j = \sum a_i b^i$$

eine glatte Funktion auf U.

($\Leftarrow$) Sei ω eine (nicht notwendigerweise glatte) 1-Form auf M, so dass für jedes glatte Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ die Auswertung $\omega(X)$ glatt auf M ist. In einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ schreiben wir $\omega = \sum a_i \mathrm{d}x^i$, wobei die a_i a priori irgendwelche Abbildungen $U \to \mathbb{R}$ sind. Für $1 \le j \le n$ benutzen wir Übung 4.5.11, um das Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial x^j}$ zu einem Vektorfeld X auf M auszudehnen, so dass es eine offene Umgebung $V(p,j)$ von p in U gibt mit $X|_{V(p,j)} = \frac{\partial}{\partial x^j}|_{V(p,j)}$. Auf dieser offenen Menge ist dann

$$\omega(X) = \left(\sum a_i \mathrm{d}x^i\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = a_j.$$

Auf der offenen Umgebung $V = \bigcap_j V(p,j)$ von p sind dann alle a_j glatt, d.h., die 1-Form ω ist auf V glatt. Die Behauptung folgt. $\square$

Analog zu Satz 4.5.10 können wir dann die 1-Formen als $C^\infty(M)$-Dual zu $\mathfrak{X}(M)$ identifizieren.

prop:omegavsdualx

PROPOSITION 6.2.6. *Die natürliche Abbildung*

$$\Omega^1(M) \to \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$$

ist ein Isomorphismus von $C^\infty(M)$-Moduln.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung injektiv ist; wir nehmen also an, dass $\omega \in \Omega^1(M)$ eine 1-Form ist, die die Nullabbildung $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ induziert. Sei $v \in \mathrm{T}_pM$ ein beliebiger Vektor. Eine Variation zu Übungsaufgabe 4.5.11 zeigt, dass ein glattes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert, für das $X_p = v$ ist. Insbesondere ist, nach Voraussetzung, $\omega_p \colon \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Nach Voraussetzung gilt dies auch für jeden Punkt $p \in M$, also ist $\omega = 0$.

Für die Surjektivität betrachten wir eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\alpha \colon \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$.

(1) Wir zeigen zuerst, dass für eine offene Menge $U \subseteq M$ und ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X|_U \equiv 0$ auch $\alpha(X)|_U \equiv 0$ gilt. Mit Proposition A.6.2 können wir eine Abbildung $f \in C^\infty(M)$ wählen, die an einem Punkt $p \in U$ verschwindet und auf $M \setminus U$ identisch 1 ist. Dann gilt $fX = X$ und $\alpha(X) = \alpha(fX) = f\alpha(X)$, woraus $\alpha(X)(p) = f(p)\alpha(X)(p) = 0$ folgt. Dies kann für alle Punkte $p \in U$ gemacht werden, woraus die Behauptung folgt.

(2) Wir konstruieren eine kanonische Abbildung

$$\alpha|_U \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}(\mathfrak{X}(U), C^\infty(U)),$$

für die $\alpha|_U(X|_U) = \alpha(X)|_U$ für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt. Für $Y \in \mathfrak{X}(U)$ und $p \in U$ definieren wir $\alpha|_U(Y)(p)$ wie folgt: wir wählen mit Proposition A.6.2 eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, für die $f \equiv 1$ auf einer offenen Umgebung $V \subseteq U$ von p und $f|_{M \setminus U} \equiv 0$ gilt. Dann kann fY als Vektorfeld durch 0 auf M fortgesetzt werden, und $fY|_V = Y_V$. Wir definieren $\alpha|_U(Y)(p) = \alpha(fY)(p)$. Aus Schritt (1) folgt, dass das wohldefiniert ist und nicht von der Wahl von V bzw. f abhängt.

(3) Aus Schritt (2) folgt, dass $\alpha(X)(p)$ nur von X_p abhängt: für eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ haben wir eine Wahl von Basen $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ für die Tangentialräume

T_pM für $p \in U$ und können ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ als $X|_U = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ schreiben. Dann ist

$$\alpha(X)(p) = \alpha|_U(X|_U)(p) = \sum_{i=1}^n a^i(p)\alpha|_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(p)$$

und das hängt nur von den Koordinaten $a^i(p)$ von X_p ab.

(4) Wir können nun ein Urbild für $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$ konstruieren. Für einen Punkt $p \in M$ und einen Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_pM$ können wir (wie in Schritt (1)) ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ finden, für das $X_p = v$ gilt. Dann definieren wir

$$\omega_p \colon \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R} \colon v \mapsto \alpha(X)(p).$$

Nach Schritt (3) hängt $\alpha(X)(p)$ nur von $X_p = v$ ab, also ist ω_p wohldefiniert. Nach Lemma 6.2.5 ist die 1-Form ω glatt. □

Bemerkung 6.2.7. *Ein zentraler Schritt im obigen Beweis ist die Aussage, dass für $\alpha \in \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $p \in M$ der Wert $\alpha(X)(p)$ nur von X_p abhängt. Dies ist tatsächlich äquivalent zur $C^\infty(M)$-Linearität – dadurch können die Funktionen aus Proposition A.6.2 eingesetzt werden, um lokal definierte Vektorfelder auf ganz M auszudehnen. Ähnliche Argumente waren auch im Beweis von Satz 4.5.10 wichtig.*

Allgemeiner können Differentialformen als multilineare Formen auf Vektorfeldern angesehen werden. Für eine k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$ haben wir k-multilineare Abbildungen $\omega_p \colon \underbrace{\mathrm{T}_pM \times \cdots \times \mathrm{T}_pM}_{k} \to \mathbb{R}$. Insbesondere können wir eine k-Form auf k Vektorfeldern auswerten:

$$\omega \colon \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k} \to C^\infty(M) \colon (X_1, \ldots, X_k) \mapsto (p \mapsto \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p)).$$

Da die Abbildungen ω_p Multilinearformen sind, gilt für eine glatte k-Form $\omega \in \Omega^k(M)$, Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$:

$$\omega(X_1, \ldots, fX_i, \ldots, X_k) = f\omega(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k).$$

Eine k-Form liefert also eine $C^\infty(M)$-multilineare Abbildung

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{k} \to C^\infty(M).$$

Die Algebrenstruktur der äußeren Algebra $\bigwedge^\bullet V$ induziert eine Algebrenstruktur auf Differentialformen. Das Dachprodukt $\alpha \wedge \beta$ für zwei Formen $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$ ist punktweise durch $(\alpha \wedge \beta)_p = \alpha_p \wedge \beta_p$ für $p \in M$ definiert.

Proposition 6.2.8. *Für eine glatte Mannigfaltigkeit M ist das Dachprodukt von zwei glatten Formen wieder eine glatte Form, d.h. wir haben eine Abbildung*

$$\wedge \colon \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M).$$

Beweis. In einer Karte $(U, x^1, \ldots, x^n)$ schreiben wir $\alpha = \sum a_I \mathrm{d}x^I$ und $\beta = \sum b_J \mathrm{d}x^J$ für $a_I, b_J \in C^\infty(U)$. Das Dachprodukt ist

$$\alpha \wedge \beta = \left(\sum a_I \mathrm{d}x^I\right) \wedge \left(\sum b_J \mathrm{d}x^J\right) = \sum a_I b_J \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J.$$

Wenn $I \cap J \neq \emptyset$, dann ist $\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = 0$; für $I \cap J = \emptyset$ ist $\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = \pm \mathrm{d}x^{I \cup J}$, und das Vorzeichen hängt davon ab, wie viele Vertauschungen vorgenommen werden müssen, um aus I, J eine aufsteigende Sequenz K von Indizes zu machen. In jedem Fall können wir schreiben

$$\alpha \wedge \beta = \sum_K \left(\sum_{I \cup J = K, I \cap J = \emptyset} \pm a_I b_J \right) \mathrm{d}x^K.$$

Alle Koeffizienten sind glatt, und die Behauptung folgt. □

Bemerkung 6.2.9. *Die Algebra* $(\Omega^\bullet(M), \wedge)$ *ist assoziativ und graduiert-kommutativ, d.h.* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$ *für* $\alpha \in \Omega^i(M)$ *und* $\beta \in \Omega^j(M)$.

Proposition 6.2.10. *Sei* $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *eine Karte für eine glatte Mannigfaltigkeit, und seien* $f^1, \ldots, f^k \in C^\infty(U)$. *Dann ist*

$$\mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^k = \sum_{\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}} \frac{\partial(f^1, \ldots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$$

Dabei bezeichnet $\frac{\partial(f^{i_1}, \ldots, f^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_k})} = \det \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_{\alpha, \beta}$ *für die Indexmengen* $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ *und* $J = (j_1 < \cdots < j_k)$.

Beweis. Wir schreiben die Differentialform als

$$\mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^k = \sum c_J \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_k},$$

und wir müssen die Koeffizienten c_J bestimmen. Um die Aussage zu beweisen, werten wir beide Seiten auf k-Tupeln von Vektorfeldern $\frac{\partial}{\partial x^j}$ aus:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^k \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) &= \det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^{i_j}} \right) = \frac{\partial(f^1, \ldots, f^k)}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})} \\ \sum c_J \mathrm{d}x^J \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \right) &= \sum c_J \delta_I^J = c_I \end{aligned}$$

□

Insbesondere erhalten wir die Transformationsformel für Differentialformen: für zwei Karten $(U, x^1, \ldots, x^n)$ und $(V, y^1, \ldots, y^n)$ einer glatten Mannigfaltigkeit und eine Indexmenge $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ haben wir

$$\mathrm{d}y^J = \sum_{I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}} \frac{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_k})}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})} \mathrm{d}x^I$$

Für eine glatte Abbildung $f \colon M \to N$ haben wir für jeden Punkt $p \in M$ das Differential $\mathrm{d}f \colon \mathrm{T}_p M \to \mathrm{T}_{f(p)} N$ als lineare Abbildung. Das Dual dieser Abbildung ist eine lineare Abbildung

$$\mathrm{d}f^\vee \colon \mathrm{T}_{f(p)} N^\vee \to \mathrm{T}_p M^\vee$$

zwischen den Kotangentialräumen.

Definition 6.2.11. *Sei* $f \colon M \to N$ *eine glatte Abbildung. Die vom Dual* $\mathrm{d}f^\vee \colon \mathrm{T}_{f(p)} N^\vee \to \mathrm{T}_p M^\vee$ *des Differentials induzierte Abbildung*

$$f^* \colon \Omega^1(N) = \Gamma(N, \mathrm{T}N^\vee) \to \Gamma(M, \mathrm{T}M^\vee) = \Omega^1(M)$$

heißt Pullback/Rückzug *von k-Formen.*

Proposition 6.2.12. *Sei* $f \colon M \to N$ *eine glatte Abbildung.*

(1) *Der Rückzug einer glatten* 1*-Form ist wieder eine glatte* 1*-Form.* not:pullback
(2) *Der Rückzug von Funktionen* $f^* \colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, *s. Notation* 3.3.6, *induziert eine* $C^\infty(N)$*-Modulstruktur auf* $C^\infty(M)$. *Bezüglich dieser Modulstruktur ist der Rückzug von* 1*-Formen linear.*

Beweis. (1) Wir wählen eine Karte $(U,\phi)=(U,x^1,\dots,x^m)$ um $p\in M$ und eine Karte $(V,\psi)=(V,y^1,\dots,y^n)$ um $f(p)\in N$ mit $f(U)\subseteq V$. Auf V können wir eine 1-Form als $\omega=\sum_i a_i\mathrm{d}y^i$ schreiben. Der Rückzug ist dann

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum_i (f^*a_i)f^*(\mathrm{d}y^i)\\ &= \sum_i (f^*a_i)\mathrm{d}(f^*y^i)\\ &= \sum_i (a_i\circ f)\mathrm{d}(y^i\circ f)=\sum (a_i\circ f)\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind glatt, also ist die 1-Form $f^*\omega$ glatt auf U.

(2) Übungsaufgabe. □

Bemerkung 6.2.13. *Ein relevanter Spezialfall des Rückzugs ist die Einschränkung von Differentialformen entlang von Immersionen.*

Beispiel 6.2.14. *Auf dem Einheitskreis $\mathrm{S}^1\subset\mathbb{R}^2$ haben wir das Vektorfeld*

$$X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Die dazu duale 1-Form ist $\omega=-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$. Dies kann z.B. auf $\mathbb{R}^2$ nachgerechnet werden, wo $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ die zu $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ duale Basis des Kotangentialraums ist. Die Behauptung für S^1 ergibt sich dann durch Einschränkung entlang der Einbettung $\mathrm{S}^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2$. □

Übungsaufgabe 6.2.15. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p\in M$ und $U\subseteq M$ eine offene Umgebung von p. Für eine Differentialform $\omega\in\Omega^k(U)$ existiert eine Differentialform $\tilde\omega\in\Omega^k(M)$ und eine offene Umgebung $V\subseteq U$ von p, so dass $\omega|_V=\tilde\omega|_V$ gilt.*

rem:einstein

Bemerkung 6.2.16. *Eine Bemerkung zur Stellung der Indizes: In der Differentialgeometrie ist es üblich, Vektoren in einem Vektorraum mit unteren Indizes zu schreiben (z.B. die Standardbasis $e_1,\dots,e_n$) und Linearformen im Dualraum mit oberen Indizes. Angewendet auf Tangential- und Differentialformenbündel werden dann auch Vektorfelder mit unteren Indizes geschrieben (z.B. ∂_i als Kurzform für $\frac{\partial}{\partial x_i}$), Differentialformen mit oberen Indizes (wie $\mathrm{d}x^i$).*

Für Koeffizienten in Linearkombinationen ergibt sich dann folgende Konvention: für einen Tangentialvektor $v=\sum a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ erhalten die Koeffizienten obere Indizes, da sie tatsächlich aus Linearformen extrahiert werden können, nämlich als Werte von $\mathrm{d}x^i$. Analog schreiben wir die Koeffizienten für Linearformen mit unteren Indizes $\omega=\sum a_i\mathrm{d}x^i$.

Diese Konvention hat den Vorteil, dass auf zwei Seiten einer Gleichung immer obere und untere Indizes zusammenpassen müssen. Daran kann man Kovarianz und Kontravarianz von Tensorfeldern ablesen und erhält eine elementare Probe der Sinnhaftigkeit von Gleichungen. Eine Weiterentwicklung dieser Indexkonvention ist die Einsteinsche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produkts wird summiert, wenn ein Index als oberer und der andere Index als unterer Index auftritt. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ kann dann als x^iy_i geschrieben werden: ausformuliert haben wir die Summe über alle $i=1,\dots,n$ der Auswertungen der Linearform x^i auf dem Vektor y_i.

Übungsaufgabe 6.2.17. *Wir bezeichnen mit r^1, r^2 und r^3 die Einschränkung der Standardkoordinaten von $\mathbb{R}^3$ auf S^2. Aus Dimensionsgründen sind die Formen $\mathrm{d}\,r^1$, $\mathrm{d}\,r^2$ und $\mathrm{d}\,r^3$ überall linear abhängig. Bestimmen Sie die Relation.*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.18. *Sei $\omega = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ die Volumenform auf* S^1*, und*

$$\pi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{S}^1 \colon t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Standardparametrisierung. Zeigen Sie, dass in $\Omega^1(\mathbb{R})$ gilt $\pi^*\omega = \mathrm{d}t$.

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.19. *Sei*

$$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \colon (f, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Berechnen Sie

$$f^*\left(\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right), \ \textit{und } f^*(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.20. *Sei $\alpha = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}z \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung von α auf $\mathrm{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ für keinen Punkt $p \in \mathrm{S}^3$ die Nullform auf $\mathrm{T}_p\,\mathrm{S}^3$ ist.*

6.3. Äußere Ableitung

Die äußere Ableitung ist eine höherdimensionale Verallgemeinerung des Differentials, durch die wir k-Formen "ableiten" können.

def:exterior-der

DEFINITION 6.3.1. *Eine* äußere Ableitung *auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $D\colon \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet+1}(M)$, für die gilt*

(1) D ist eine Antiderivation, d.h. für $\alpha \in \Omega^k(M)$ und $\beta \in \Omega^l(M)$ gilt

$$D(\alpha \wedge \beta) = (D\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (D\beta),$$

(2) $D \circ D = 0$,

(3) für eine glatte Funktion f und ein glattes Vektorfeld X auf M gilt

$$(Df)(X) = Xf.$$

BEMERKUNG 6.3.2. *Die letzte Bedingung impliziert insbesondere, dass für $f \in \Omega^0(M)$ gilt $Df = \mathrm{d}f$, d.h. die äußere Ableitung von glatten Funktionen ist das Differential.*

Wir zeigen zuerst die lokale Existenz und Eindeutigkeit.

prop:local-d

PROPOSITION 6.3.3. *Sei $(U, x^1, \dots, x^n)$ eine Karte für eine glatte Mannigfaltigkeit M. Dann ist die äußere Ableitung für eine k-Form $\omega = \sum a_I \mathrm{d}x^I \in \Omega^k(U)$ eindeutig definiert durch:*

$$D\omega = \sum_I \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x^I = \sum_I \left(\sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j\right) \wedge \mathrm{d}x^I \in \Omega^{k+1}(U).$$

BEWEIS. Die Eindeutigkeit sehen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} D\omega &= \sum (Da_I) \wedge \mathrm{d}x^I + \sum a_I D\mathrm{d}x^I \\ &= \sum (Da_I) \wedge \mathrm{d}x^I \\ &= \sum_I \sum_j \frac{\partial a_I}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^I. \end{aligned}$$

Dabei ist die erste Gleichheit die Antiderivationseigenschaft, die zweite Gleichheit folgt aus $Dx^j = \mathrm{d}x^j$ und $D^2 = 0$, und die letzte Gleichheit auch wieder aus der Identifikation $Da_I = \mathrm{d}a_I$.

Für die Existenz benutzen wir die obige Formel als Definition, und müssen zeigen, dass die Eigenschaften erfüllt sind. Dabei ist (3) (die Identifikation von D und d) klar.

(1) Die Definition ist offensichtlich linear, also können wir annehmen, dass die beiden Formen durch $\alpha = f\mathrm{d}x^I$ und $\beta = g\mathrm{d}x^J$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\alpha\wedge\beta) &= \mathrm{d}(fg\mathrm{d}x^I\wedge \mathrm{d}x^J)\\
&= \sum \frac{\partial(fg)}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} g\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J + \sum f\frac{\partial g}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\wedge\mathrm{d}x^J\\
&= \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\wedge g\mathrm{d}x^J + (-1)^k\sum f\mathrm{d}x^I\wedge\frac{\partial g}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^J\\
&= \mathrm{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\mathrm{d}\beta.
\end{aligned}$$

(2) Es reicht, $\mathrm{d}^2\omega = 0$ für $\omega = f\mathrm{d}x^I$ zu zeigen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2(f\mathrm{d}x^I) &= \mathrm{d}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I\right)\\
&= \sum\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^I
\end{aligned}$$

Die Terme mit $i = j$ verschwinden wegen $\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^i = 0$, die Terme mit $i\neq j$ sind heben sich weg:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^j = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^i.$$

□

prop:local-der

Proposition 6.3.4. *Sei D eine Antiderivation auf $\Omega^\bullet(M)$, und sei $\omega\in\Omega^k(M)$ eine glatte k-Form. Sei $U\subseteq M$ eine offene Menge mit $\omega\equiv 0$ auf U. Dann gilt $D\omega\equiv 0$ auf U.*

Beweis. Sei $p\in U$, wir zeigen $(D\omega)_p = 0$. Nach Proposition prop:bump A.6.2 existiert eine Funktion f mit $\operatorname{supp} f\subset U$ und eine Umgebung V von p in U, so dass $f|_V\equiv 1$. Dann gilt $f\omega\equiv 0$ auf M und wir haben

$$0 = D(0) = D(f\omega) = (Df)\wedge\omega + (-1)^0 f\wedge(D\omega).$$

Am Punkt p verschwindet der erste Term wegen $\omega_p = 0$, und $f(p) = 1$ impliziert $(D\omega)_p = 0$. □

Bemerkung 6.3.5. *Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen* lokale Operatoren, *vgl. auch Satz thm:xvsder 4.5.10 und Proposition prop:omegavsdualx 6.2.6.*

Jetzt können wir die globale Existenz und Eindeutigkeit zeigen:

Satz 6.3.6. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine eindeutig bestimmte äußere Ableitung* $\mathrm{d}\colon \Omega^\bullet(M)\to\Omega^{\bullet+1}(M)$.

Beweis. Für die Existenz geben wir eine Konstruktion an. Sei $\omega\in\Omega^k(M)$ eine k-Form und $p\in M$ ein Punkt. Wir wählen eine Karte $(U, x^1,\dots,x^n)$ um p; in dieser Karte haben wir eine eindeutige äußere Ableitung nach Proposition prop:local-d 6.3.3. Wir müssen also noch die Unabhängigkeit von der Karte zeigen. Dies folgt aber auch aus der Eindeutigkeit der äußeren Ableitung auf $U\cap V$ für zwei Karten U und V in Proposition prop:local-d 6.3.3. Damit haben wir eine äußere Ableitung definiert, nach dem Existenzteil von Proposition prop:local-d 6.3.3.

Für die globale Eindeutigkeit auf $\Omega^0(M)$ sorgt die Eigenschaft (3) in Definition def:exterior-der 6.3.1. Für ein Dachprodukt haben wir

$$\begin{aligned}
D(\mathrm{d}f^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^k) &= D(Df^1\wedge\cdots\wedge Df^k)\\
&= \sum_{i=1}^k(-1)^{i-1}Df^1\wedge\cdots\wedge DDf^i\wedge\cdots\wedge Df^k = 0.
\end{aligned}$$

Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ eine beliebige k-Form und $p \in M$. Wir wählen eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p und schreiben $\omega = \sum a_I \mathrm{d}x^I$ auf U. Mit Proposition prop:extension A.6.3 können wir a_I, $x^1, \dots, x^n$ zu glatten Funktionen $\tilde{a_I}$, $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n$ auf ganz M ausdehnen. Wir erhalten eine Form $\tilde{\omega} = \sum \tilde{a}_I \mathrm{d}\tilde{x}^I \in \Omega^k(M)$ und eine offene Menge $V \subseteq U$ mit $\omega|_V \equiv \tilde{\omega}|_V$. Nach Proposition prop:local-der 6.3.4 ist $D\omega = D\tilde{\omega}$ auf V und wir erhalten

$$\begin{aligned}
(D\omega)_p = (D\tilde{\omega})_p &= \Big(D \sum \tilde{a}_I \mathrm{d}\tilde{x}^I\Big)_p \\
&= \Big(\sum D\tilde{a}_I \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^I + \sum \tilde{a}_I \wedge D\mathrm{d}\tilde{x}^I\Big)_p \\
&= \Big(\sum \mathrm{d}\tilde{a}_I \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^I\Big)_p \\
&= \Big(\sum \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}x^I\Big)_p = (\mathrm{d}\omega)_p.
\end{aligned}$$

□

Wir kehren noch einmal zur Diskussion von Pullbacks zurück.

def:pullback

DEFINITION 6.3.7. *Für eine lineare Abbildung von Vektorräumen* $f\colon V \to W$ *haben wir induzierte lineare Abbildungen* $\bigwedge^k f\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k W$. *Für eine glatte Abbildung* $f\colon M \to N$ *haben wir dann für jeden Punkt* $p \in M$ *die vom Dual des Differentials* $\mathrm{d}f^\vee\colon \mathrm{T}_{f(p)}N^\vee \to \mathrm{T}_pM^\vee$ *induzierten Abbildungen*

$$\bigwedge^k \mathrm{T}_{f(p)}N^\vee \to \bigwedge^k \mathrm{T}_pM^\vee$$

Wenn wir Elemente on $\bigwedge^k \mathrm{T}_{f(p)}N^\vee$ *als* k*-Multilinearformen auf* $\mathrm{T}_{f(p)}N$ *interpretieren, ordnet der Pullback einer solchen Multilinearform die Auswertung auf* $f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)$ *für Tangentialvektoren* $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{T}_pM$ *zu.*

PROPOSITION 6.3.8. *Sei* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung.*

(1) Die Abbildung aus Definition def:pullback *6.3.7 induziert eine Abbildung*

$$f^*\colon \Omega^k(N) = \Gamma(N, \mathrm{T}N^\vee) \to \Gamma(M, \mathrm{T}M^\vee) = \Omega^k(M).$$

(2) Die Abbildung aus (1) ist $C^\infty(N)$*-linear und verträglich mit dem Dachprodukt, d.h. ein Homomorphismus von* $C^\infty(N)$*-Algebren.*

(3) Die Abbildung aus (1) ist verträglich mit dem Differential, d.h. für $\omega \in \Omega^k(N)$ *gilt* $\mathrm{d}(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\omega)$.

BEWEIS. (2): Übungsaufgabe.

Wir zeigen zuerst (3). Dafür benutzen wir bereits die Notation f^*, punktweise definiert wie in Definition def:pullback 6.3.7, und setzen noch nicht voraus, dass diese Definition auch eine glatte Form in $\Omega^k(M)$ liefert.

Wir beginnen mit dem Fall $k = 0$, $\omega \in \Omega^0(M)$ ist einfach eine glatte Funktion. Es reicht zu zeigen, dass für jeden Punkt $p \in M$ und jeden Tangentialvektor $X_p \in \mathrm{T}_pM$ gilt $(f^*\mathrm{d}\omega)_p(X_p) = (\mathrm{d}f^*\omega)_p(X_p)$. Nach Definition haben wir

$$(f^*\mathrm{d}\omega)_p(X_p) = (\mathrm{d}\omega)_{f(p)}(f_*X_p) = (f_*X_p)(\omega) = X_p(\omega \circ f)$$

und $(\mathrm{d}f^*\omega)_p(X_p) = X_p(f^*\omega) = X_p(\omega \circ f)$, woraus die Behauptung folgt.

Auch für die Fälle $k \geq 1$ müssen wir die Aussage nur für den Tangentialraum an einem beliebigen Punkt $p \in M$ nachrechnen. Wir wählen eine Karte $(V, y^1, \dots, y^n)$ um den Punkt $f(p) \in N$ und schreiben $\omega = \sum a_I \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}$ für glatte Funktionen $a_I \in C^\infty(V)$ und $I = (i_1 < \cdots < i_k)$. Nach (2) ist

$$f^*\omega = \sum (f^*a_I)(f^*\mathrm{d}y^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*\mathrm{d}y^{i_k}).$$

Aus dem Fall $k = 0$ haben wir $f^*\mathrm{d}y^i = \mathrm{d}f^*y^i =: \mathrm{d}f^i$, also

$$\mathrm{d}f^*\omega = \sum \mathrm{d}(f^*a_I) \wedge \mathrm{d}f^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^{i_k}.$$

Für die andere Seite der Gleichung haben wir, auch wieder unter Benutzung des Falles $k = 0$

$$\begin{aligned} f^*\mathrm{d}\omega &= f^*\left(\sum \mathrm{d}a_I \wedge \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}\right) \\ &= \sum f^*\mathrm{d}a_I \wedge f^*\mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^*\mathrm{d}y^{i_k} \\ &= \sum \mathrm{d}f^*a_I \wedge \mathrm{d}f^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^{i_k} \end{aligned}$$

Damit ist (3) bewiesen.

(1) Jetzt können wir (3) benutzen, um die Glattheit für (1) zu zeigen. Dafür müssen wir zeigen, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung hat, auf der $f^*\omega$ glatt ist. Wir wählen eine Karte $(V, y^1, \dots, y^n)$ um $f(p)$ und eine Karte $(U, x^1, \dots, x^m)$ um p mit $f(U) \subseteq V$. Wir schreiben $\omega = \sum a_I \mathrm{d}y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{i_k}$ für glatte Funktionen $a_I \in C^\infty(V)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^*\omega &= \sum (f^*a_I)(f^*\mathrm{d}y^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (f^*\mathrm{d}y^{i_k}) \\ &= \sum (f^*a_I)\mathrm{d}f^*y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^*y^{i_k} \\ &= \sum (f^*a_I)\mathrm{d}f^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f^{i_k} \\ &= \sum (f^*a_I)\frac{\partial(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{\partial(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})}\mathrm{d}x^J. \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir (2) und (3) und die Notation $\frac{\partial(f^{i_1},\dots,f^{i_k})}{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_k})} = \det\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ für die Indexmengen $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ und $J = (j_1 < \cdots < j_k)$. Die Koeffizienten der Form sind glatt, daraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.3.9. *Zusammenfassung:* $M \mapsto \Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{i=0}^{\dim M} \Omega^i(M)$ *ist ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen in die Kategorie der differentiell-graduierten* $\mathbb{R}$*-Algebren, und ein Modul über dem Funktor* $M \mapsto C^\infty(M)$*.*

Beispiele. (Kotangentialbündel als symplektische Mannigfaltigkeit mit äußerer Ableitung der Liouville-Form)

Beispiel 6.3.10. $\mathrm{d}\omega$ *für* $\omega = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y$ *auf* $\mathbb{R}^2$ □

Übungsaufgabe 6.3.11. *Berechnen Sie die äußere Ableitung folgender Funktionen und Differentialformen auf* $\mathbb{R}^3$*:*

- $f = xyz$
- $g = y\,\mathrm{e}^x$
- $\omega_1 = \mathrm{e}^x\cos(y)\mathrm{d}x + \mathrm{e}^x\sin(y)\mathrm{d}y$
- $\omega_2 = yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$
- $\omega_3 = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$
- $\omega_4 = \sin(-x^3 + y^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

Übungsaufgabe 6.3.12. *Gegeben seien folgende Differentialformen auf* $\mathbb{R}^3$*:*

- $\phi = x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y$
- $\psi = z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$
- $\theta = z\mathrm{d}y.$

Berechnen Sie $\phi \wedge \psi$, $\theta \wedge \phi \wedge \psi$, $\mathrm{d}\phi$, $\mathrm{d}\psi$ *und* $\mathrm{d}\theta$.

6.4. De-Rham-Komplex

Definition 6.4.1. *Sei* M *eine glatte Mannigfaltigkeit und* $\omega \in \Omega^k(M)$ *eine* k*-Form.*

(1) ω heißt geschlossen, *wenn* $\mathrm{d}\omega = 0$ *gilt.*
(2) ω heißt exakt, *wenn es eine $(k-1)$-Form β mit $\mathrm{d}\beta = \omega$ gibt.*

BEMERKUNG 6.4.2. *Exakte 1-Formen sind also genau die Differentiale von glatten Funktionen. Aus physikalischer Motivation heraus heißt die Form β auch Potential für α; das Potential ist nur bis auf geschlossene Formen eindeutig bestimmt.*

DEFINITION 6.4.3. *Ein* Komplex *(von Vektorräumen) besteht aus einer Folge $\{C^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von Vektorräumen und linearen Abbildungen $\partial_i\colon C^i \to C^{i+1}$, für die $\partial_{i+1} \circ \partial_i = 0$ gilt:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i-2}} C^{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} C^i \xrightarrow{\partial_i} C^{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} \cdots$$

Wir definieren die Kohomologievektorräume *des Komplexes*

$$\mathrm{H}^i(C^\bullet) := \ker \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i-1}$$

BEMERKUNG 6.4.4. *Wegen $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$ gilt $\operatorname{Im}\partial_{i-1} \subseteq \ker \partial_i$. Die Kohomologie misst den Unterschied zwischen $\operatorname{Im}\partial_{i-1}$ und $\ker\partial_i$. Ein Komplex heißt* exakt, *wenn alle Kohomologieräume verschwinden; exakte Sequenzen (evtl. aus LAII) sind Beispiele für exakte Komplexe.*

DEFINITION 6.4.5. *Für eine glatte Mannigfaltigkeit M definieren wir den* De-Rham-Komplex*:*

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$$

Die Kohomologie des De-Rham-Komplexes heißt De-Rham-Kohomologie*:*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(M) := \mathrm{H}^i(\Omega^\bullet(M), \mathrm{d}).$$

BEMERKUNG 6.4.6. *Der Satz von de Rham besagt, dass es einen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{dR}}(M) \cong \mathrm{H}^\bullet_{\mathrm{sing}}(M, \mathbb{R})$$

zwischen De-Rham-Kohomologie und singulärer Kohomologie mit reellen Koeffizienten gibt (s. Topologie I). Dies bedeutet, dass man mit Differentialformen topologische Phänomene sehen kann, und dass andererseits die Analysis auf Mannigfaltigkeiten sehr stark von der Topologie der Mannigfaltigkeit bestimmt wird.

6.5. Klassischer Vektorkalkül

Wir diskutieren kurz den De-Rham-Komplex für $\mathbb{R}^3$. Dieser Komplex kodiert viele wesentliche Aussagen aus der klassischen Vektoranalysis.

Der De-Rham-Komplex für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ hat die folgende Form:

$$0 \to \Omega^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2(U) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3(U) \to 0$$

Dabei sind $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ einfach die glatten Funktionen.

Mit Hilfe der Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^3$ können wir für einen Punkt p den Tangentialraum $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3$ und den Kotangentialraum $(\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3)^\vee$ identifizieren, indem die Basis $\frac{\partial}{\partial r^1}, \frac{\partial}{\partial r^2}, \frac{\partial}{\partial r^3}$ auf die Basis $\mathrm{d}r^1, \mathrm{d}r^2, \mathrm{d}r^3$ geschickt wird. (Im Sinne der Riemannschen Geometrie benutzen wir das Skalarprodukt, für das $\langle \frac{\partial}{\partial r^i}, \mathrm{d}r^j \rangle = \delta_i^j$ gilt.) Dadurch erhalten wir eine Identifikation

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)\colon f_1\mathrm{d}r^1 + f_2\mathrm{d}r^2 + f_3\mathrm{d}r^3 \mapsto f_1\frac{\partial}{\partial r^1} + f_2\frac{\partial}{\partial r^2} + f_3\frac{\partial}{\partial r^3},$$

wobei $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Analog können wir auch 2-Formen mit Vektorfeldern identifizieren:

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{X}(M)\colon f_1\mathrm{d}r^2\wedge\mathrm{d}r^3 + f_2\mathrm{d}r^3\wedge\mathrm{d}r^1 + f_3\mathrm{d}r^1\wedge\mathrm{d}r^2 \mapsto f_1\frac{\partial}{\partial r^1} + f_2\frac{\partial}{\partial r^2} + f_3\frac{\partial}{\partial r^3}.$$

(Zum Merken der Indizes in der Differentialformen: zyklische Vertauschung von (123).)

Zuletzt identifizieren wir noch die 3-Formen mit glatten Funktionen

$$\Omega^3(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} C^\infty(\mathbb{R})\colon f\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 \mapsto f.$$

Dies entspricht der Wahl eines globalen Erzeugers von $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ als $C^\infty(\mathbb{R}^3)$-Modul bzw. der Wahl einer Volumenform (s. auch die Diskussion im Kapitel zur Integration).

Bemerkung 6.5.1. *Die obigen Identifikationen mögen erst einmal willkürlich erscheinen. Eine Grundlage der Identifikation ist die Wahl einer Identifikation* $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3 \cong (\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3)^\vee$*, bzw. der Wahl eines Skalarprodukts auf* $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^3$*, bzw. der Wahl einer Riemannschen Metrik. (Dies erklärt zumindest die Identifikation* $\Omega^1 \cong \mathfrak{X}$*.) Die Identifikationen für* Ω^i *mit* $i \geq 2$ *können im Rahmen der Hodge-Theorie sehr konzeptionell erklärt werden.*

Proposition 6.5.2. *Mit diesen Identifikationen erhalten wir dann für eine offene Teilmenge* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *ein kommutatives Diagram*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\cong"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\cong"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, "\cong"] & \Omega^3(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U) \arrow[r, "\mathrm{grad}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{rot}"'] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathrm{div}"'] & C^\infty(U) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. (1) Die Kommutativität des ersten Quadrates ist die Identifikation des Differentials mit dem Gradienten der Funktion f:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r^1}\mathrm{d}r^1 + \frac{\partial f}{\partial r^2}\mathrm{d}r^2 + \frac{\partial f}{\partial r^3}\mathrm{d}r^3 \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r^1}\frac{\partial}{\partial r^1} + \frac{\partial f}{\partial r^2}\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r^3}\frac{\partial}{\partial r^3}$$

(2) Die Kommutativität des zweiten Quadrates ist die Identifikation der äußeren Ableitung einer 1-Form mit der Rotation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f_1\mathrm{d}r^1 + f_2\mathrm{d}r^2 + f_3\mathrm{d}r^3) \quad &= \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial r^2} - \frac{\partial f_2}{\partial r^3}\right)\mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 \\
&- \quad \left(\frac{\partial f_3}{\partial r^1} - \frac{\partial f_1}{\partial r^3}\right)\mathrm{d}r^3 \wedge \mathrm{d}r^1 \\
&+ \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial r^1} - \frac{\partial f_1}{\partial r^2}\right)\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2
\end{aligned}$$

Die Komponenten des entsprechenden Vektorfeldes sind genau die Komponenten der Rotation.

(3) Zuletzt brauchen wir noch die äußere Ableitung einer 2-Form:

$$\mathrm{d}(f_1\mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3 + f_2\mathrm{d}r^3 \wedge \mathrm{d}r^1 + f_3\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial r^1} + \frac{\partial f_2}{\partial r^2} + \frac{\partial f_3}{\partial r^3}\right)\mathrm{d}r^1 \wedge \mathrm{d}r^2 \wedge \mathrm{d}r^3.$$

Dies ist genau die Beschreibung der Divergenz eines Vektorfelds. □

Bemerkung 6.5.3. *Die Aussage* $\mathrm{d}^2 = 0$ *für den De-Rham-Komplex übersetzt sich unter den obigen Identifikationen in klassische Aussagen aus der Vektoranalysis:*

(1) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$
(2) $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$

Bemerkung 6.5.4. *Die De-Rham-Kohomologie von* $\mathbb{R}^3$ *kann berechnet werden. Die etwas allgemeinere Aussages des Poincaré-Lemmas ist, dass für jede sternförmige offene Menge* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(U) = \begin{cases} \mathbb{R} & i = 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Dies beinhaltet verschiedene Aussagen:

(1) $\mathrm{H}^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$ *ist die Aussage, dass genau die konstanten Funktionen triviales Differential haben.*
(2) $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^3) = 0$ *ist die Aussage, dass ein Vektorfeld genau dann Gradientenfeld einer glatten Funktion ist, wenn die Rotation trivial ist. (Wirbelfreie Vektorfelder haben ein Potential.)*
(3) $\mathrm{H}^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^3) = 0$ *ist die Aussage, dass quellenfreie Vektorfelder als Rotation eines Vektorpotentials dargestellt werden können.*
(4) $\mathrm{H}^3_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^3) = 0$ *ist die Aussage, dass eine skalare Felddichte als Divergenz eines Vektorfelds dargestellt werden kann.*

In diesem Sinne ist die De-Rham-Kohomologie für Mannigfaltigkeiten eine weitreichende Verallgemeinerung des klassischen Vektorkalküls. Ausserdem sieht man dann (aus dem Satz von de Rham), dass es Mannigfaltigkeiten (oder einfach nur offene Teilmengen von $\mathbb{R}^3$, die nicht sternförmig sind) gibt, bei denen aufgrund der Topologie nicht jedes wirbelfreie Vektorfeld in Potential hat:

Beispiel 6.5.5. *Auf* $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ *haben wir das Vektorfeld*

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Das Vektorfeld ist wirbelfrei (da die z-Achse in U fehlt), aber es gibt kein Potential. Wenn es ein Potential gäbe, wäre jedes Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve 0*. Aber für den Einheitskreis um den Ursprung in der* (x,y)*-Ebene ist das Integral* 2π*. Die Form* $\frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ *ist geschlossen, aber nicht exakt.*

$\square$

Bemerkung 6.5.6. *Hodge-Stern, Laplace-Operator, harmonische Formen*

Übungsaufgabe 6.5.7. *nirgends verschwindende 1-Form auf* S^1.

KAPITEL 7

Integration auf Mannigfaltigkeiten

7.1. Orientierung und Abbildungsgrad

DEFINITION 7.1.1. *Sei V eine n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf angeordneten Basen von V durch*

$$v = [v_1, \dots, v_n] \sim w = [w_1, \dots, w_n] \quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : v = Aw, \det A > 0,$$

d.h. zwei angeordnete Basen sind äquivalent, wenn die zugehörige Basiswechselmatrix positive Determinante hat. Eine Orientierung *auf V ist eine Äquivalenzklasse von angeordneten Basen für die Äquivalenzrelation $\sim$. Ein Vektorraum mit gegebener Orientierung heißt* orientiert*.*

Für zwei orientierte Vektorräume V und W heißt eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ orientierungserhaltend*, wenn die darstellende Matrix für ϕ (bezüglich angeordneter Basen, die die gewählten Orientierungen induzieren) positive Determinante hat. Andernfalls heißt ϕ* orientierungsumkehrend*.*

Die Orientierung, die durch die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ induziert wird, heißt Standardorientierung.

BEMERKUNG 7.1.2. *Jeder $\mathbb{R}$-Vektorraum von Dimension $n \geq 1$ hat genau zwei Orientierungen. Dies entspricht genau den zwei Zusammenhangskomponenten von $\bigwedge^n V \cong \mathbb{R}$, wenn wir eine angeordnete Basis $[v_1, \dots, v_n]$ auf $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ schicken.*

Alternativ können wir Orientierungen mittels n-Formen definieren: der Raum der n-Formen $\bigwedge^n V$ ist eindimensional. Für eine n-Form $0 \neq \alpha \in \bigwedge^n V$ und zwei angeordnete Basen $v = [v_1, \dots, v_n]$ und $w = [w_1, \dots, w_n]$ haben $\alpha(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$ und $\alpha(w_1 \wedge \dots \wedge w_n)$ das gleiche Vorzeichen, wenn die Basiswechselmatrix A mit $v = Aw$ positive Determinante hat. Die Wahl einer nicht ausgearteten n-Form ist also gleichbedeutend mit der Wahl einer Orientierung auf V, und zwei n-Formen definieren die gleiche Orientierung, wenn sie sich um einen positiven skalaren Faktor unterscheiden.

DEFINITION 7.1.3. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi\colon E \to M$ ein glattes Vektorbündel von Rang n. Eine* punktweise Orientierung *von $\pi\colon E \to M$ ist die Wahl einer Orientierung der Faser E_p für jeden Punkt $p \in M$. Eine punktweise Orientierung heißt* stetig*, wenn es eine Trivialisierung $\psi\colon E|_U \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^n$ gibt, so dass die induzierte Abbildung $\psi_*\colon E_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. (Dabei wird $\mathbb{R}^n$ mit der Standardorientierung ausgestattet.)*

Wenn eine stetige Orientierung von $\pi\colon E \to M$ existiert, heißt das Vektorbündel orientierbar.

Eine glatte Mannigfaltigkeit heißt orientierbar*, wenn das Tangentialbündel $\mathrm{T}M$ orientierbar ist. Eine Orientierung von M ist eine Orientierung von $\mathrm{T}M$. Ein Diffeomorphismus $f\colon M \to N$ heißt* orientierungserhaltend*, wenn für jeden Punkt $p \in M$ das Differential $\mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{f(p)}N$ orientierungserhaltend ist.*

BEISPIEL 7.1.4.
1. *Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ ist als Mannigfaltigkeit orientierbar. Die Standardorientierung ist durch $\frac{\partial}{\partial r^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n}$ gegeben.*
2. *Die n-Sphäre S^n ist orientierbar.*

(3) Der reell-projektive Raum $\mathbb{RP}^n$ ist genau dann orientierbar, wenn n ungerade ist.

□

PROPOSITION 7.1.5. *Eine zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit M hat genau zwei Orientierungen.*

BEWEIS. Zwei Orientierungen μ und ν von M induzieren für jeden Punkt $p \in M$ Orientierungen μ_p und ν_p von T_pM. Wir definieren $f\colon M \to \{\pm 1\}$ durch $f(p) = 1$, wenn $\mu_p = \nu_p$ und $f(p) = -1$ wenn $\mu_p = -\nu_p$. Die Stetigkeit der Orientierungen bedeutet, dass für $p \in M$ eine offene Umgebung U von p und Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$ und $(Y_1, \dots, Y_n)$ auf U existieren, die die Orientierungen $\mu|_U$ bzw. $\nu|_U$ induzieren. Dann existiert eine stetige Abbildung $A = (a^i_j)_{i,j}\colon U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $Y_j = \sum a^i_j X^i$. Die Funktion f stimmt dann auf U mit dem Vorzeichen von $\det A$ überein. Damit ist $f\colon M \to \{\pm 1\}$ lokal konstant. Da M zusammenhängend ist, ist f konstant, und es gilt $\mu = \pm\nu$. □

lem:orientation LEMMA 7.1.6. *Eine punktweise Orientierung (induziert durch eventuell nichtstetige Rahmen $(X_1, \dots, X_n)$) von M ist genau dann stetig, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Koordinatenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ hat, so dass die Abbildung $(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n)$ überall positiv ist.*

BEWEIS. Eine punktweise Orientierung einer Mannigfaltigkeit M ist genau dann stetig, wenn jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung U hat, auf der Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$ existieren, so dass $(X_1, \dots, X_n)$ an jedem Punkt $q \in U$ die gewählte Orientierung induziert. Für eine zusammenhängende Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ existiert dann eine Abbildung $A = (a^i_j)_{i,j}\colon U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $X_j = \sum_i a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann ist

$$(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) = \det(a^i_j) \neq 0$$

auf ganz U. Da U zusammenhängend ist, ist $\det(a^i_j)$ entweder positiv oder negativ auf ganz U; im letzteren Fall ändern wir die Koordinate x^1 in $-x^1$ ab. Dies zeigt die Äquivalenz. □

SATZ 7.1.7. *Eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn es eine glatte nirgends-verschwindende n-Form auf M gibt.*

BEWEIS. Wenn M orientierbar ist, gibt es nach Lemma 7.1.6 um jeden Punkt $p \in M$ eine Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ um p und Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$, die die Orientierung induzieren, so dass gilt $(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Aus diesen Karten wählen wir $\{(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)\}$, so dass $M = \bigcup U_\alpha$. Sei $\{\rho_\alpha\}$ eine glatte Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung. Durch $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \mathrm{d}x^1_\alpha \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n_\alpha$ wird eine glatte nirgends-verschwindende n-Form auf M definiert.

Umgekehrt können wir für eine nirgends-verschwindende glatte n-Form ω an jedem Punkt $p \in M$ eine orientierte Basis $(X_{1,p}, \dots, X_{n,p})$ wählen, für die

$$\omega(X_{1,p}, \dots, X_{n,p}) > 0$$

gilt. Für eine zusammenhängende Kartenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ von p ist dann $\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n$, wobei f entweder überall positiv oder überall negativ auf U ist. Für $f > 0$ ist $(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$, für $f < 0$ ist $(\mathrm{d}(-x^1) \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Nach Lemma 7.1.6, ist dann die entsprechende Orientierung stetig. □

DEFINITION 7.1.8. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein glatter Atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ für M heißt* orientiert, *wenn für je zwei Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ die Jacobi-Determinante $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$ überall auf $U \cap V$ positiv ist.*

Satz 7.1.9. *Eine Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn es einen orientierten Atlas gibt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass M orientiert ist, d.h. für jeden Punkt $p \in M$ gibt es eine Kartenumgebung $(U, x^1, \dots, x^n)$ und Vektorfelder $X_1, \dots, X_n$, die die Orientierung auf U induzieren, so dass gilt $(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Für zwei solche Kartenumgebungen $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ ist

$$\mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^n = \det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Da sowohl die Vektorfelder $(X_1, \dots, X_n)$ als auch die Vektorfelder $(Y_1, \dots, Y_n)$ die Orientierung induzieren, gilt $(\mathrm{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$ und $(\mathrm{d}y^1 \wedge \dots \wedge \mathrm{d}y^n)(X_1, \dots, X_n) > 0$. Also ist $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) > 0$ auf $U \cap V$ und wir haben einen orientierten Atlas.

Umgekehrt sei $(U_\alpha, x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha)$ ein orientierter Atlas. Für jeden Punkt $p \in M$ induziert $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine angeordnete Basis von $\mathrm{T}_p M$. Für zwei Karten $(U, x^1, \dots, x^n)$ und $(V, y^1, \dots, y^n)$ aus dem Atlas ist $\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) > 0$ auf $U \cap V$, so dass wir durch $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine wohldefinierte stetige Orientierung erhalten. □

Übungsaufgabe 7.1.10. *Orientierung auf Produktmannigfaltigkeit $M \times N$ von orientierten Mannigfaltigkeiten*

Übungsaufgabe 7.1.11. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, die sich mit zwei offenen Karten U und V so überdecken läßt, dass $U \cap V$ wedgzusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass M orientierbar ist.*

Übungsaufgabe 7.1.12. *Zeigen Sie, dass S^n orientierbar ist: Zeigen Sie, dass der Tangentialraum von $\mathrm{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ an einen Punkt $x \in \mathrm{S}^n$ durch $x^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass eine Orientierung auf S^n dadurch gegeben ist, dass eine angeordnete Basis $[v_1, \dots, v_n]$ von $\mathrm{T}_p \mathrm{S}^n$ orientiert ist, wenn $[p, v_1, \dots, v_n]$ eine orientierte Basis von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.*

Übungsaufgabe 7.1.13. *Für welche n ist $\mathrm{S}^n \to \mathrm{S}^n : p \mapsto -p$ orientierungserhaltend?*

Übungsaufgabe 7.1.14. *Zeigen Sie, dass eine Liegruppe G orientierbar ist.*

Übungsaufgabe 7.1.15. *Wenn zwei der Bündel $\pi \colon E \to M$, $\pi' \colon E' \to M$ und $\pi \oplus \pi' \colon E \oplus E' \to M$ orientierbar sind, dann auch das dritte.*

7.2. Mannigfaltigkeiten mit Rand

Todo: aufteilen, mehr Details invariance of domain, und Differential

def:smooth-closed

Definition 7.2.1. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge (nicht notwendig offen). Eine Abbildung $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ heißt* glatt, *wenn es eine offene Umgebung $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ und eine glatte Funktion $h \colon U \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass $f = h|_A$.*

Übungsaufgabe 7.2.2. *Eine Abbildung $f \colon A \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann glatt im Sinne von Definition* def:smooth-closed *7.2.1, wenn jeder Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ hat, so dass eine glatte Funktion $h \colon U \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $h|_U = f|_U$. (Zerlegung der Eins)*

Definition 7.2.3. *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand. Zwei Karten $(U, \phi \colon \mathbb{H}^n)$ und $(V, \psi \colon V \to \mathbb{H}^n)$ von M heißen C^∞*-kompatibel, *wenn die beiden Kartenwechselabbildungen*

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi^{-1} \colon \psi(U \cap V) &\to \phi(U \cap V) \hookrightarrow \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ \psi \circ \phi^{-1} \colon \phi(U \cap V) &\to \psi(U \cap V) \hookrightarrow \mathbb{H}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(zusammengesetzt mit der Einbettung in $\mathbb{R}^n$) glatt im Sinne der Definition def:smooth-closed *7.2.1 sind.*

Analog zu Definition def:cinfty-compat *3.2.1 ist ein C^∞-Atlas für M durch eine Menge von paarweise C^∞-kompatiblen Karten gegeben. Eine* glatte Mannigfaltigkeit mit Rand *ist dann eine topologische Mannigfaltigkeit mit Rand zusammen mit einem glatten Atlas.*

Bemerkung 7.2.4. *Die Definitionen von Randpunkten und inneren Punkten ist dieselbe wie im Falle topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand.*

Übungsaufgabe 7.2.5. *Für eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand ist ∂M eine $(n-1)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit und $\mathring{M}$ eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.*

Übungsaufgabe 7.2.6. *Die n-dimensionale Einheitskreisscheibe*

$$\mathrm{D}^n = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\right\}$$

ist eine n-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit Rand.

Definition 7.2.7. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand, und $p \in \partial M$ ein Randpunkt.*

Seien $U, V \subseteq M$ offene Mengen mit $p \in U \cap V$. Zwei glatte Abbildungen $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $g\colon V \to \mathbb{R}$ heißen äquivalent, wenn es eine offene Umgebung $W \subseteq U \cap V$ von p gibt, so dass $f|_W = g|_W$. Wir bezeichnen mit $C_p^\infty(M)$ die $\mathbb{R}$-Algebra der Funktionenkeime am Punkt p, analog zu Definition def:germs *4.1.1.*

Der Tangentialraum $\mathrm{T}_p M$ ist durch $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ definiert.

Bemerkung 7.2.8.
1. *Auch eine Definition über Kurvenkeime ist möglich. Allerdings haben dann die Tangentialvektoren an den Punkt $p \in \partial M$, die nach "außen" (bezüglich einer Karte) zeigen, keine Repräsentanten durch Kurven in M.*
2. *Mit der obigen Definition von Tangentialraum können dann Kotangentialraum, (Ko-)Tangentialbündel, Differentialformen und Orientierungen wie für geschlossene Mannigfaltigkeiten definiert werden.*

Definition 7.2.9. *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Rand und $p \in \partial M$ ein Randpunkt. Wir sagen, dass ein Tangentialvektor $v \in \mathrm{T}_p M$* nach innen zeigt, *wenn $v \notin \mathrm{T}_p(\partial M)$ und eine glatte Kurve $\gamma\colon [0, \epsilon) \to M$ existiert, für die gilt $\gamma(0) = p$, $\gamma((0, \epsilon)) \subset \mathring{M}$ und $\gamma'(0) = v$. Andernfalls sagen wir, dass der Vektor* nach außen zeigt.

Definition 7.2.10. *Sei M eine glatte Mannnigfaltigkeit mit Rand. Ein glattes Vektorfeld X entlang ∂M ist eine Zuordnung $p \in \partial M \mapsto X_p \in \mathrm{T}_p M$, das in einer Karte $(U, x^1, \dots, x^n)$ als*

$$X_p = \sum_i a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

für $p \in U \cap \partial M$ und $a^i \in C^\infty(\partial M)$ geschrieben werden kann.

Bemerkung 7.2.11. *In der Konvention von Definition* def:hn *2.4.1 zeigt ein Vektorfeld X entlang ∂M genau dann am Punkt $p \in \partial M$ nach außen, wenn $a^n(p) < 0$ ist.*

Proposition 7.2.12. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann existiert ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M.*

Beweis. Für eine Karte $(U_\alpha, x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ von M um den Randpunkt $p \in \partial M$ zeigt das Vektorfeld $X_\alpha = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$ nach außen. Wir wählen eine Überdeckung von

∂M aus solchen Überdeckungen und eine passende glatte Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}_\alpha$. Dann ist $X = \sum \rho_\alpha X_\alpha$ ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M. □

Proposition 7.2.13. *Sei M eine orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, und $p \in \partial M$. Sei X ein glattes nach außen zeigendes Vektorfeld entlang ∂M. Wir definieren die induzierte Orientierung auf ∂M wie folgt: für einen Punkt $p \in M$ wird die Orientierung induziert durch eine angeordnete Basis $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ von $\mathrm{T}_p(\partial M)$, für die die angeordnete Basis $(X_p, v_1, \ldots, v_{n-1})$ von $\mathrm{T}_p M$ die Orientierung von M induziert.*

Wenn ω die Orientierungsform auf M ist, dann ist die Orientierungsform auf ∂M durch $\omega(X, -, \ldots, -)$ gegeben.

Bemerkung 7.2.14. *Produkt von Mannigfaltigkeiten mit Rand ist keine Mannigfaltigkeit mit Rand. (Begriff Mannigfaltigkeit mit Ecken) Bsp.* $[0, 1]^n$.

7.3. Integration

Zur Erinnerung: Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, die auf einem abgeschlossenen Rechteck $A = [a^1, b^1] \times \cdots [a^n, b^n] \subset \mathbb{R}^n$ definiert ist. Partitionierung P der Intervalle $[a^i, b^i]$ liefert eine Unterteilung von A in kleinere Rechtecke A_j. Für eine solche Einteilung können wir Unter- und Obersumme definieren

$$US(f, P) = \sum (\inf_{A_j} f) \operatorname{vol} A_j, \quad OS(f, P) = \sum (\sup_{A_j} f) \operatorname{vol} A_j$$

Es gilt $US(f, P) \le OS(f, P)$ und für eine Verfeinerung P' der Partitionierung P gilt $US(f, P) \le US(f, P')$ und $OS(f, P') \le OS(f, P)$.

Die Funktion heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\sup_P US(f, P) = \inf_P OS(f, P).$$

Der gemeinsame Wert heißt *Riemann-Integral* von f über A und wird mit

$$\int_A f(x) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

bezeichnet.

Für eine beliebige abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und eine beschränkte Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ durch 0 zu einer Funktion $\tilde{f}\colon B \to \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Rechteck $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \supset A$ fortsetzen und

$$\int_A f(x) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n := \int_B \tilde{f}(x) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n$$

definieren.

Satz 7.3.1 (Lebesgue). *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen der erweiterten Funktion $\tilde{f}$ eine Nullmenge ist.*

Bemerkung 7.3.2. *Insbesondere gilt: für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist f auf U Riemann-integrierbar.*

Definition 7.3.3. *Für gewählte Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ auf $\mathbb{R}^n$ und eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir eine n-Form $\omega \in \Omega^n(U)$ immer als $\omega = f \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$ mit einer eindeutigen glatten Funktion $f \in C^\infty(U)$ schreiben. Wenn die Funktion f Riemann-integrierbar auf $A \subset U$ ist, definieren wir*

$$\int_A \omega = \int_A f(x) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n := \int_A f(x) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n.$$

Diese Definition ist unabhängig unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen (also in gewissem Maße unabhängig von der Wahl der Koordinaten): Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus. Insbesondere sind $U, \phi(U)$ offene Teilmengen mit unterschiedlichen Wahlen von Koordinatenfunktionen $(x^1, \dots, x^n)$ und $(y^1, \dots, y^n)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_V \phi^*\omega &= \int_V (\phi^* f)\phi^* \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \phi^* \mathrm{d}y^n \\
&= \int_V (f \circ \phi)\mathrm{d}(y^1 \circ \phi) \wedge \cdots \mathrm{d}(y^n \circ \phi) \\
&= \int_V (f \circ \phi) \det(J(\phi))\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n \\
&= \int_V (f \circ \phi) \det(J(\phi)))\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n,
\end{aligned}$$

wobei $J(\phi)$ die Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}\right)$ bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen der Jacobi-Determinante ist das genau die Transformationsformel für das Riemann-Integral. Insbesondere ist das Integral invariant unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen.

Definition 7.3.4. *Sei M eine glatte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem orientierten Atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, und sei $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ eine glatte n-Form mit kompaktem Träger.*

In einer Karte (U, ϕ) ist $(\phi^{-1})^*(\omega)$ eine n-Form mit kompaktem Träger auf $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ und wir definieren

$$\int_U \omega := \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*(\omega).$$

Aufgrund der Invarianz des Integrals unter orientierungserhaltenden Diffeomorphismen ist dies wohldefiniert und unabhängig von der Wahl der Karte.

Wir wählen eine lokal endliche Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M durch Karten (U_α, ϕ_α) und eine glatte Zerlegung der Eins $\{\rho_\alpha\}$ zu dieser Überdeckung. Das Integral ist dann definiert als

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Bemerkung 7.3.5. *Die Summe ist endlich: ω hat kompakten Träger und an jedem Punkt sind nur endlich viele ρ_α von Null verschieden sind. Daraus folgt, dass insgesamt nur endlich viele $\rho_\alpha\omega$ verschieden von Null sind. Außerdem ist* $\operatorname{supp} \rho_\alpha\omega$ *abgeschlossen, also kompakt in U_α, so dass $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega$ definiert ist.*

Die Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte und der Zerlegung der Eins. Sei $\{V_\beta\}$ ein anderer orientierter Atlas mit zugehöriger Zerlegung der Eins $\{\chi_\beta\}$. Dann erhalten wir die verfeinerten Atlanten $\{(U_\alpha \cap V_\beta, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\}$ und $\{(U_\alpha \cap V_\beta, \psi_\alpha|_{U_\alpha \cap V_\beta})\}$ und rechnen

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \sum_\beta \chi_\beta\omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha} \rho_\alpha\chi_\beta\omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha\chi_\beta\omega.$$

Dabei benutzen wir die Eigenschaften der Zerlegung der Eins und die Additivität des Integrals. Analog ist

$$\sum_\beta \int_{V_\beta} \chi_\beta\omega = \sum_\alpha \sum_\beta \int_{U_\alpha \cap V_\beta} \rho_\alpha\chi_\beta\omega,$$

also ist das Integral wohldefiniert.

Proposition 7.3.6. *Sei M eine glatte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit, und sei $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{c}}(M)$ eine glatte n-Form mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

Übungsaufgabe 7.3.7. *Wir betrachten die 2-Form auf $\mathbb{R}^3$*

$$\omega = (z - x^2 - xy)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - \o dz \wedge \mathrm{d}x.$$

Berechnen Sie $\int_D i^*\omega$, wobei i die folgende Inklusionsabbildung ist:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Übungsaufgabe 7.3.8. *Berechnen Sie $\int_{\mathrm{S}^2} \omega$ für $\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathrm{S}^2)$.*

Übungsaufgabe 7.3.9. *Wir betrachten die Form*

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

(1) Zeige Sie $\mathrm{d}\omega = 0$.
(2) Berechnen Sie $\int_{\mathrm{S}^2} \omega$. Dafür kann die Parametrisierung

$$\tau \colon [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathrm{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \colon (u, v) \mapsto (\sin u \cdot \cos v, \sin u \cdot \sin v, \cos u).$$

(3) Welche Rollse spielt ω für den Flächeninhalt von S^2?
(4) Was kann man mit Hilfe von ω über $\mathrm{H}^2_{dR}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ sagen?

7.4. Satz von Stokes

Satz 7.4.1. *Sei M eine glatte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, sei ∂M der Rand mit der von M induzierten Orientierung. Für eine glatte $(n-1)$-Form $\omega \in \Omega^{n-1}_{\mathrm{c}}(M)$ mit kompaktem Träger gilt*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. □

Beispiel 7.4.2. *Spezialfälle aus Analysis 1 und 2*
Integral einer Funktion

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{div} a \mathrm{d}V &= \int_{\partial M} a\overrightarrow{N}\mathrm{d}F \\ \int_M \Delta f \mathrm{d}V &= \int_{\partial M} \operatorname{grad} f \overrightarrow{N}\mathrm{d}F \end{aligned}$$

□

Übungsaufgabe 7.4.3. *Berechnungen: Fläche der Ellipse, Volumenform der 2-Sphäre.*

Übungsaufgabe 7.4.4. *berechnen Sie das Integral von $\omega = (x - y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$ entlang S^1 mit Hilfe des Satzes von Stokes.*

Poincaré-Lemma

7.5. Ausblick: Perioden und iterierte Integrale

die richtige Formulierung für Integration auf Mannigfaltigkeiten benötigt dann singuläre Homologie:

$$\int\colon \mathrm{H}_k(M,\mathbb{Z}) \times \mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(M) \to \mathbb{R}\colon ([Z],\omega) \mapsto \int_Z \omega$$

ANHANG A

Grundlagen Kategorientheorie und Analysis

`chp:appendix`

`sec:cats`

A.1. Kategorien und Funktoren

Definition A.1.1. *Eine Kategorie* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}, \circ)$ *ist ein Tupel, wobei*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *eine Ansammlung von Objekten ist,*
- $(A, B) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *je zwei Objekten die Morphismen von* A *nach* B *zuordnet, und*
- $\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C)\colon (f, g) \mapsto g \circ f$ *eine Kompositionsvorschrift ist, die einem Paar von Morphismen ihre Zusammensetzung zuordnet,*

so dass gilt:

(1) Es gibt einen Identitätsmorphismus $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$ *für jedes Objekt* $A \in \mathbf{C}$*, so dass für alle* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *und alle* $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$ *gilt*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_A \circ g = g.$$

(2) Die Komposition $\circ$ *ist assoziativ.*

Bemerkung A.1.2. *Die Objekte* $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *bilden nicht notwendigerweise eine Menge. Man kann also auch von der Kategorie der Mengen sprechen.*

In der Notation wird oft $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *mit* $\mathbf{C}$ *verwechselt. Für* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *kann auch* $\mathbf{C}(A, B)$ *geschrieben werden.*

Beispiel A.1.3.

- **Set***, die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen*
- **Grp***, die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen*
- $\mathbf{Vect}_K$*, die Kategorie der* K*-Vektorräume mit* K*-linearen Abbildungen*
- **Top***, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Modifikationen:*
  - $\mathbf{Top}_\bullet$*, die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit punktierten Abbildungen*
  - $\mathbf{Top}^2$*, die Kategorie der Raumpaare* (X, A) *mit* $A \subset X$*.*
- **Man***, die Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen.*
- *Für eine Kategorie* $\mathbf{C}$ *haben wir die Kategorie* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*, bei der einfach die Richtungen der Pfeile vertauscht werden:* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$*.*
- $\mathbf{\Delta}$*, die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen)*
- $\mathbf{Ch}(\mathbf{Mod}{-}R)$*, die Kategorie der Kettenkomplexe von Rechts-R-Moduln.*

$\square$

Definition A.1.4. *Sei* $\mathbf{C}$ *eine Kategorie. Ein Morphismus* $f\colon X \to Y$ *heißt*

- Monomorphismus*, wenn für je zwei Morphismen* $g_1, g_2\colon Z \to X$ *aus* $f \circ g_1 = f \circ g_2$ *schon* $g_1 = g_2$ *folgt,*
- Epimorphismus*, wenn für je zwei Morphismen* $g_1, g_2\colon Y \to Z$ *aus* $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ *schon* $g_1 = g_2$ *folgt,*
- Isomorphismus*, wenn es eine Abbildung* $g\colon Y \to X$ *gibt, so dass* $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ *und* $g \circ f = \mathrm{id}_X$ *gilt.*

Definition A.1.5. *Ein Funktor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ besteht aus einer Zuordnung*

$$F\colon \operatorname{Obj}(\mathbf{C}) \to \operatorname{Obj}(\mathbf{D})$$

und Abbildungen

$$F\colon \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A),F(B))$$

für alle $A, B \in \operatorname{Obj}(\mathbf{C})$, so dass gilt

(1) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ für alle $A \in \operatorname{Obj}(\mathbf{C})$, und
(2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(A,B)$ und $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(B,C)$.

Bemerkung A.1.6. *Solche Funktoren heißen* kovariant. *Funktoren $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{D}$ heißen* kontravariante *Funktoren (da die Richtungen der Pfeile umgedreht werden).*

Beispiel A.1.7.

- *für Vektorräume: Dualraum, symmetrische Potenz, äußere Potenz von Vektorräumen sind Endofunktoren von $\mathbf{Vect}_K$. Tensorprodukt ist ein Funktor $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$.*
- *Derivationen $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(-,\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$-Algebren sind ein kontravarianter Funktor $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.*
- *für Mannigfaltigkeiten: Tangentialraum an einem gewählten Punkt ist ein Funktor $\mathbf{Man}_\bullet \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ von der Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Vektorräume. Tangentialbündel ist ein Endofunktor der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. glatte Abbildungen kontravarianter Funktor von Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}$-Algebren:*

$$\mathbf{Man}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}\colon M \mapsto C^\infty(M).$$

- *Eine simpliziale Menge ist ein Funktor $\mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Allgemeiner kann man simpliziale Objekte in anderen Kategorien betrachten.*
- *Homologie ist ein Funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ von topologischen Räumen in $\mathbb{Z}$-graduierte abelsche Gruppen.*

□

Definition A.1.8 (natürliche Transformationen). *Seien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ zwei Kategorien. Eine* natürliche Transformation *$\alpha\colon F \Rightarrow G$ zwischen zwei Funktoren $F, G\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ ordnet jedem Objekt $X \in \mathbf{C}$ einen Morphismus $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ in $\mathbf{D}$ zu, so dass für alle Morphismen $f\colon X \to Y$ in $\mathbf{C}$ das folgende Diagramm kommutativ ist:*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y). \end{tikzcd}$$

Bemerkung A.1.9. *Für zwei Kategorien $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ haben wir eine Funktorkategorie $\mathbf{Fun}(\mathbf{C},\mathbf{D})$, deren Objekte Funktoren und deren Morphismen natürliche Transformationen sind. Ein* natürlicher Isomorphismus *zwischen Funktoren ist ein Isomorphismus in der Funktorkategorie.*

Beispiel A.1.10.

- *Die Identifikation von $\mathrm{T}_p M$ und $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty_p(M),\mathbb{R})$ ist ein Beispiel für eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren $\mathbf{Man}_\bullet \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.*

□

adjungierte Funktoren und universelle Eigenschaften: Beispiele Produkte, Quotienten, Kern

A.2. Taylor-Approximation

Wir nennen eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *sternförmig um den Punkt* $p \in U$, wenn für jeden Punkt $x \in U$ die Verbindungsstrecke zwischen x und p in U liegt.

prop:taylor-cinf

PROPOSITION A.2.1. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die sternförmig um den Punkt p ist, und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existieren glatte Funktionen $g_1, \ldots, g_n \in C^\infty(U)$ so dass*

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - p^i) g_i(x), \qquad g_i(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p).$$

BEWEIS. Für $x \in U$ wird die Verbindungsstrecke zwischen x und p beschrieben durch $p + t(x-p)$ für $0 \le t \le 1$. Da f auf dem sternförmigen Bereich U definiert ist, ist $f(p + t(x-p))$ für $x \in U$ und $0 \le t \le 1$ definiert. Die Kettenregel liefert

$$\frac{\mathrm{d} f(p + t(x-p))}{\mathrm{d}t} = \sum (x^i - p^i) \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x-p)).$$

Integration über $t \in [0,1]$ liefert

$$f(x) - f(p) = \sum (x^i - p^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x-p)) \mathrm{d}t.$$

Die Funktionen $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p + t(x-p))\mathrm{d}t$ sind glatt, und wegen

$$g_i(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial r^i}(p) = \frac{\partial f}{\partial r^i}(p)$$

sind alle Behauptungen erfüllt. □

Diese Variante des Satzes von Taylor ist notwendig, da C^∞-Funktionen nicht notwendigerweise mit ihren Taylor-Reihen übereinstimmen.

Ein Beispiel hierfür ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Alle Ableitungen am Punkt 0 verschwinden, also ist die Taylor-Reihe 0, aber die Funktion ist von 0 verschieden.

A.3. Satz von der Umkehrfunktion

hm:inverse-function-rn

SATZ A.3.1 (Satz von der Umkehrabbildung für $\mathbb{R}^n$). *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Die Abbildung f ist genau dann ein lokaler Diffeomorphismus am Punkt p, wenn für die Jacobi-Determinante gilt* $\det(\partial f^i / \partial r^j)(p) \neq 0$.

BEWEIS. □

A.4. Satz von der impliziten Funktion

A.5. Constant rank theorem

SATZ A.5.1. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine glatte Abbildung. Sei $p \in U$ ein Punkt, so dass f in einer Umgebung von p konstanten Rang k hat. Dann existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von p und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^m$ von $f(p)$, und Diffeomorphismen $\phi\colon W \to \tilde{W}$, $\psi\colon V \to \tilde{V}$ mit $\phi(p) = 0$ und $\psi(f(p)) = 0$, so dass*

$$(\psi \circ f \circ \phi)^{-1}(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0).$$

BEWEIS. □

A.6. Zerlegung der Eins

Definition A.6.1. *Für eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ auf einer Mannigfaltigkeit M definieren wir den* Träger von f *durch*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}$$

Zum Zerlegen und Zusammenkleben von Objekten auf Mannigfaltigkeiten (z.B. Schnitten in Vektorbündel, oder Einbettungen in $\mathbb{R}^N$) benötigen wir glatte Funktionen, die auf vorgegebenen Teilmengen U und V in M mit disjunktem Abschluss die Werte 0 bzw. 1 annehmen.

Wir beginnen mit der Funktion

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \mathrm{e}^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

Wir betrachten die Funktion

$$\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \alpha(1-x)}.$$

Für den Nenner gilt

$$\alpha(x) + \alpha(1-x) \geq \begin{cases} \alpha(x) & x > 0 \\ \alpha(1-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

und auf den angegebenen Bereichen sind die entsprechenden Werte größer als 0. Insbesondere ist β eine glatte Funktion, die konstant 0 für $x \leq 0$ und konstant 1 für $x \geq 1$ ist.

Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ haben wir eine lineare Koordinatentransformation

$$x \mapsto \frac{x - a^2}{b^2 - a^2},$$

die $[a^2, b^2]$ auf $[0, 1]$ abbildet. Die Funktion

$$\gamma(x) = \beta\left(\frac{x - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

ist dann eine C^∞-Funktion, die auf $(-\infty, a^2)$ den Wert 0 und auf (b^2, ∞) den Wert 1 annimmt. Die C^∞-Funktion $\delta(x) = \gamma(x^2)$ nimmt dann auf $[-a, a]$ den Wert 0 und auf $(-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ den Wert 1 an.

Zuletzt haben wir mit

$$\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon 1 - \beta\left(\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}\right)$$

eine glatte Funktion konstruiert, die auf $[-a, a]$ den Wert 1 und auf $(-\infty, -b) \cup (b, \infty)$ den Wert 0 annimmt. Analog können wir durch $\sigma(x) = \lambda(\|x\|)$ eine Funktion $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren, die auf dem abgeschlossenen Ball von Radius a um 0 den Wert 1 hat und außerhalb des abgeschlossenen Balls vom Radius b um 0 den Wert 0 hat. Wir formulieren dieses Ergebnis:

prop:bump

Proposition A.6.2. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von K. Dann existiert eine glatte Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, so dass $f|_K \equiv 1$ und $\operatorname{supp} f \subset U$.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in K$ existiert ein ϵ mit $\overline{\mathrm{B}}(x, \epsilon) \subseteq U$ und wir können eine Funktion σ_x finden, die auf $\mathrm{B}(x, \epsilon)$ strikt positiv ist und außerhalb $\overline{\mathrm{B}}(x, \epsilon)$ verschwindet. Da K kompakt ist, können wir K mit endlich vielen solchen Bällen $\mathrm{B}(x_i, \epsilon_i)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ überdecken. Die Funktion $\phi = \sum_{i=1}^m \sigma_i$ ist strikt positiv auf K, glatt auf $\mathbb{R}^n$ und hat Träger $\operatorname{supp} \phi = \bigcup_{i=1}^m \mathrm{B}(x_i, \epsilon_i) \subset U$. Da K kompakt ist, hat ϕ ein Minimum μ auf K. Wir benutzen dann die oben definierte

Funktion γ mit $a = 0$ und $b^2 = \mu$. Dann ist $\gamma \circ \phi \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ glatt, konstant 1 auf K und $\operatorname{supp}(\gamma \circ \phi) \subset U$. □

Mit diesen Funktionen können wir verschiedene lokal definierte Objekte auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Das einfachste Beispiel für Funktionen ist die folgende Aussage:

prop:extension

PROPOSITION A.6.3. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $U \subseteq M$ eine offene Umgebung eines Punktes p und $f \colon U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann existiert eine glatte Funktion $\tilde{f} \colon M \to \mathbb{R}$ und eine offene Umgebung $V \subset U$ von p, so dass $\tilde{f} = f|_V$.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit existiert eine Karte (U, ϕ), so dass $\operatorname{supp} \sigma \subset \phi(U)$ (skalieren!). Dann betrachten wir die Funktion $\sigma \circ \phi \colon U \to \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}$. Das Produkt $(\sigma \circ \phi) \cdot f$ ist identisch f in einer Umgebung von p, nämlich auf dem Urbild $\phi^{-1}(\mathrm{B}(0,1))$. Da $\operatorname{supp} f \subset \phi(U)$, können wir die Funktion auf $M \setminus U$ durch 0 fortsetzen und erhalten die behauptete Erweiterung $\tilde{f}$ von f. □

DEFINITION A.6.4. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine lokal endliche Überdeckung. Eine* glatte Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ *ist eine Menge von glatten Funktionen $\{\lambda_i \colon M \to \mathbb{R}_{\geq 0}\}_{i \in I}$, so dass $\operatorname{supp} \lambda_i \subset U_i$ und*

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

prop:partition-unity

PROPOSITION A.6.5. *Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung. Dann existiert eine glatte Zerlegung der Eins $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ zu $\{U_i\}_{i\in I}$.*

BEWEIS. Für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine offene Umgebung U_i von p und eine glatte Funktion $\lambda_i \colon M \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{supp} \lambda_i \subset U_i$ und λ_i konstant 1 auf einer Umgebung W_p von p ist. Dann ist $\{W_p \mid p \in M\}$ eine Überdeckung von M und hat, da M kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung $\{W_{p_1}, \ldots, W_{p_m}\}$. Wir bezeichnen die dazugehörigen Funktionen mit $\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_m}$. Die Funktion $\lambda = \sum \lambda_{p_j}$ ist überall positiv, und wir definieren $\phi_j = \frac{\lambda_{p_j}}{\lambda}$. Dann haben wir $\sum \phi_j = 1$. Da $\lambda > 0$ ist auch $\operatorname{supp} \lambda_{p_j} = \operatorname{supp} \phi_j \subseteq U_i$; also haben wir eine Zerlegung der Eins $\{\phi_j\}_{j \in J}$ und für jeden Index $j \in J$ einen Index $i \in I$ mit $\operatorname{supp} \phi_j \subset U_i$.

Zuletzt müssen noch die Indexmengen übereinstimmen. Wir wählen für jeden Index $j \in J$ einen Index $\tau(j) \in I$ so dass $\operatorname{supp} \phi_j \subset U_{\tau(j)}$. Dann definieren wir für jedes $i \in I$

$$\rho_i = \sum_{\tau(j) = i} \phi_j$$

mit der Konvention, dass $\rho_i = 0$, wenn kein j mit $\tau(j) = i$ existiert. Dann ist

$$\sum_{i \in I} \rho_i = \sum_{i \in I} \sum_{\tau(j)=i} \phi_j = \sum_{i=1}^{m} \phi_j = 1.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass

$$\operatorname{supp} \sum_{\tau(j)=i} \phi_j \subseteq \bigcup_{\tau(j)=i} \operatorname{supp} \phi_j$$

und damit haben wir $\operatorname{supp} \rho_i \subset \bigcup_{\tau(j)=i} \phi_j \subseteq U_i$. Also ist $\{\rho_i\}_{i \in I}$ eine zu $\{U_i\}_{i\in I}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. □

BEMERKUNG A.6.6. *Allgemeiner kann man die Existenz von stetigen Zerlegungen der Eins auf parakompakten Räumen zeigen. Da Mannigfaltigkeiten insbesondere parakompakt sind, existieren Zerlegungen der Eins auf allen Mannigfaltigkeiten. Der Beweis ist aber etwas komplizierter...*

Literatur

conlon [Con01] Lawrence Conlon. *Differentiable manifolds*. Second. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001, S. xiv+418. ISBN: 0-8176-4134-3. DOI: `10.1007/978-0-8176-4767-4`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4767-4`.

hirsch [Hir94] Morris W. Hirsch. *Differential topology*. Bd. 33. Graduate Texts in Mathematics. Corrected reprint of the 1976 original. Springer-Verlag, New York, 1994, S. x+222. ISBN: 0-387-90148-5.

milnor [Mil97] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997, S. xii+64. ISBN: 0-691-04833-9.

tu [Tu11] Loring W. Tu. *An introduction to manifolds*. Second. Universitext. Springer, New York, 2011, S. xviii+411. ISBN: 978-1-4419-7399-3. DOI: `10.1007/978-1-4419-7400-6`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7400-6`.