

**Skript zu den Vorlesungen  
Topologie I+II**

Matthias Wendt



# Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Zell-Komplexe	5
2.1. Grundbegriffe	5
2.2. CW-Komplexe	8
Kapitel 3. Eilenberg–Steenrod-Axiome und Beispielrechnungen	11
3.1. Axiomatik	11
3.2. Anwendung: Brouwerscher Fixpunktsatz	15
3.3. Abbildungsgrad	18
3.4. Zelluläre Homologie	22
3.5. Euler-Charakteristik	28
Kapitel 4. Kubische Homologie	33
4.1. Kubische Mengen und Beispiele	33
4.2. Definition und erste Konsequenzen	33
4.3. Homotopieinvarianz	33
4.4. Ausschneidung	33
4.5. Produktstrukturen und Künneth-Formel	33
Kapitel 5. Singuläre Homologie	35
5.1. Simplizialkomplexe und simpliziale Mengen	35
5.2. Definition und erste Konsequenzen	39
5.3. Homotopie-Invarianz	42
5.4. Ausschneidung	43
5.5. Anwendung: Topologie des $\mathbb{R}^n$	47
5.6. Transfer und Satz von Borsuk–Ulam	49
5.7. Ausblick: diskrete Morse-Theorie	51
5.8. Simpliziale Approximation und Fixpunktsatz von Lefschetz	51
Kapitel 6. Kohomologie	53
6.1. Definition	53
6.2. Eilenberg–Steenrod-Axiome für Kohomologie	59
6.3. Cup-Produkt und Kohomologiering	63
6.4. Künneth-Formel	66
6.5. Anwendungen des Cup-Produkts	71
Kapitel 7. Homotopietheorie	77
7.1. Homotopiegruppen	77
7.2. Lange exakte Homotopiesequenzen und Faserungen	83
7.3. CW-Approximation und Kofaserungen	88
7.4. Ausschneidung und Freudenthals Einhängungssatz	96
7.5. Verbindung zur Homologie: Satz von Hurewicz und Satz von Whitehead	100
7.6. Axiomatische Homotopietheorie: Modellkategorien	102

Kapitel 8. Spezielle Kapitel: Gruppenhomologie	107
8.1. Definitionen	107
8.2. Einfache Beispielrechnungen	112
8.3. Formale Eigenschaften	118
Kapitel 9. Spezielle Kapitel: Topologie von Mannigfaltigkeiten	123
9.1. Orientierung und Fundamentalklasse	123
9.2. Cap- vs Cup-Produkt	129
9.3. Kohomologie mit kompaktem Träger	130
9.4. Poincaré-Dualität	130
9.5. Anwendungen	133
9.6. Glatte Mannigfaltigkeiten: Integration und De-Rham-Kohomologie	135
9.7. Satz von de Rham	135
Anhang A. Grundlagen: Kategorientheorie und homologische Algebra	137
A.1. Kategorien und Funktoren	137
A.2. Exakte Sequenzen	139
A.3. Homologische Algebra	141
A.4. Tor-Gruppen und universelle Koeffizienten für Homologie	144
A.5. Tensorprodukte und Künneth-Formel	150
A.6. Ext-Gruppen und Erweiterungen	150
Literatur	157

## KAPITEL 1

# Einleitung

Algebraische Topologie untersucht topologische Räume mit algebraischen Mitteln. Die Grundidee ist, topologischen Räumen algebraische Invarianten zuzuordnen. Dies können Zahlen (wie die Anzahl der Zusammenhangskomponenten oder die Eulercharakteristik) oder algebraische Strukturen (Homologiegruppen, Kohomologieringe) sein. Wenn homöomorphe oder homotopieäquivalente Räume isomorphe algebraische Invarianten haben (oder allgemeiner die Zuordnung von topologischen Räumen zu algebraischen Invarianten funktoriell ist), können wir Räume mit Hilfe ihrer algebraischen Invarianten unterscheiden. Gute Invarianten zeichnen sich dadurch aus, dass sie hinreichend leicht berechenbar sind (und damit viel von den Komplikationen topologischer Räume und stetiger Abbildungen vergessen), aber immer noch ein wenig der für das konkrete Problem relevanten Information beinhalten.

Ein gutes Beispiel für diese Situation - vielleicht der Anfangspunkt der algebraischen Topologie - ist die Eulersche Polyederformel. Für ein konvexes Polyeder mit  $V$  Eckpunkten,  $E$  Kanten und  $F$  Seitenflächen haben wir immer  $V - E + F = 2$ . Die Antwort ist immer unabhängig von der konkreten Geometrie des Polyeders, wir vergessen also viel Information (zum Beispiel über die Anzahl oder Lage der Eckpunkte etc.). Auf der anderen Seite behalten wir immer noch einen Teil der Information: die Oberfläche des Polyeders ist homöomorph zur 2-dimensionalen Sphäre  $S^2$  und die 2 in der Polyederformel ist die Eulercharakteristik von  $S^2$ . Dadurch können wir insbesondere auch Triangulierungen des 2-Torus von Triangulierungen der Sphäre anhand der Euler-Charakteristik unterscheiden.

*ÜBUNGSAUFGABE 1.0.1. Beweisen Sie die Eulersche Polyederformel: für einen zusammenhängenden planaren Graphen mit  $E$  Knoten,  $K$  Kanten und  $F$  Flächen gilt  $E - K + F = 2$ . (Dabei sind die Flächen des Graphen  $G$  die Zusammenhangskomponenten des Komplements von  $G$ .)*

- (1) *Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen konvexen Polyedern und planaren Graphen, über Projektion in die Ebene. (Gute Beispiele sind Tetraeder, Würfel und Oktaeder.)*
- (2) *Hinweis: Der Beweis kann durch Induktion geführt werden; jeder Graph kann induktiv aus dem einpunktigen Graphen konstruiert werden, indem eine neue Kante (eventuell mit freiem Ende) eingefügt wird.*

*ÜBUNGSAUFGABE 1.0.2. Die Eulersche Polyederformel kann wie folgt interpretiert werden: Wenn wir die Kugeloberfläche in Polygone aufteilen, ist die alternierende Summe  $E - K + F$  immer 2. Experimentieren Sie, was im Fall des 2-dimensionalen Torus passiert.*

*ÜBUNGSAUFGABE 1.0.3. Finden Sie die kleinste Zahl  $n$ , so dass der 2-dimensionale Torus durch  $n$  offene Teilmengen überdeckt werden kann, die homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  sind.*

Diese Übersetzung von Topologie in Algebra hat verschiedenste Anwendungen, die in der Vorlesung auch teilweise diskutiert werden. Klassischere Anwendungen sind zum Beispiel

- (1) der Brouwersche Fixpunktsatz, der über Nashs Arbeiten zur Spieltheorie und das Nash-Gleichgewicht auch Eingang in die Wirtschaftswissenschaften gefunden hat,
- (2) das Sperner-Lemma, eine kombinatorische Aussage zur Färbung von Triangulierungen, das konkret auf Fragen der fairen Teilung angewendet werden kann,
- (3) der Satz vom Igel über die Nichtexistenz nullstellenfreier Vektorfelder auf der 2-Sphäre,
- (4) der Jordansche Kurvensatz sowie die Folgerungen zur Invarianz der Dimension als wesentliche Aussagen über die Topologie des  $\mathbb{R}^n$ .

Interessante topologische Räume tauchen überall auf und führen auch zu moderneren Anwendungen. Konfigurationsräume fassen die möglichen Positionen und Bewegungen von ebenen Gelenken oder Roboterarmen als Punkte eines topologischen Raums auf, und Fragen nach der Bewegungsplanung für den Roboterarm lassen sich dann in Fragen der algebraischen Topologie übersetzen (Lusternik-Schnirelman-Kategorie und topologische Komplexität in der topologischen Robotik). Qualitative Struktur in hoch-dimensionalen Datensätzen kann ebenfalls mit Methoden der algebraischen Topologie untersucht werden (persistente Homologie) und erschließt völlig neue Möglichkeiten in Datenanalyse und Mustererkennung (topologische Datenanalyse).

Konkreter sollen in der Vorlesung Homologie und Kohomologie für topologische Räume definiert und untersucht werden. Die Grundidee dabei ist, dass wir uns hauptsächlich auf Räume konzentrieren, die aus einfachen Bestandteilen zusammengesetzt werden: CW-Komplexe werden zusammengesetzt aus Zellen, die homöomorph zu abgeschlossenen Einheitsbällen  $D^n$  sind, simpliziale Komplexe werden zusammengesetzt aus Simplizes  $\Delta^n$ . Die Komplexität der so zusammengesetzten topologischen Räume entsteht hauptsächlich durch nicht-triviales Zusammenkleben dieser einfachen Bestandteile. Homologie übersetzt dann diese Verklebe-Information in Algebra, konkret als Matrizen, deren Einträge die Grade von Anklebeabbildungen sind. Auf diese Art erhalten wir Invarianten, die uns konkrete Information über die Zusammensetzung der topologischen Räume liefern und Rückschlüsse über die Struktur der betrachteten Räume zulassen. Mit dieser Information können wir dann in geeigneten Situationen zum Beispiel die Existenz bestimmter topologischer Objekte oder Eigenschaften erzwingen oder ausschließen – manchmal erzwingt topologische Struktur die Existenz von Fixpunkten, manchmal verbietet topologische Struktur die Existenz von Gruppenwirkungen.

Die Tatsache, dass Homologie misst, wie einfache Bestandteile zu komplizierten Räumen zusammengesetzt werden, bedeutet auch, dass Homologie gut benutzt werden kann, um die Kompatibilität von lokalen Konstruktionen und deren Verklebung zu globalen Objekten zu verstehen. Für offene Teilmengen im  $\mathbb{R}^n$  können wir lokal immer Stammfunktionen finden, aber die globale Topologie einer offenen Teilmenge im  $\mathbb{R}^n$  erlaubt nicht immer, diese Stammfunktion global zu definieren (Satz von Stokes). Zum Beispiel hängt die Existenz einer 1-Form auf  $S^1$ , die nicht Differential einer Funktion ist, mit der nicht-trivialen Topologie von  $S^1$  zusammen (siehe de Rham-Kohomologie in Analysis auf Mannigfaltigkeiten). Ein gutes Beispiel, wie Kohomologie diesen Unterschied zwischen lokal möglichen, aber global unmöglichen Konstruktionen zu verstehen, ist das Penrose-Dreieck. Jede Ecke des Dreiecks kann separat als dreidimensionales Objekt realisiert werden, aber alle drei Ecken zusammen genommen ergeben eine unmögliche Figur. Die Erklärung benutzt auch hier

wieder Kohomologieklassen auf  $S^1$ , die auf der Unbestimmtheit der Entfernung einer dreidimensionalen Realisierung vom Auge basieren. In einem wiederum völlig anderen Kontext tauchen Kohomologie-Kozykel auf  $S^1$  im Condorcet-Paradox auf: im Allgemeinen gibt es keine Möglichkeit, lokal kompatible Präferenzen verschiedener Personen zu einer globalen Präferenzordnung zusammenzufassen. Hier ist der einfachste Fall von drei Wahlalternativen und drei Präferenzordnungen  $A > B > C$ ,  $B > C > A$  und  $C > A > B$ .

Dies ist der grobe Umriss dessen, was in der Vorlesung behandelt werden soll. Die Kapitel der Vorlesung folgen diesem Aufbau. Zuerst diskutieren wir in Kapitel 2 die relevanten Räume, die für die Vorlesung eine Rolle spielen werden, CW-Komplexe und Simplicialkomplexe. Außerdem umfasst dieses Kapitel eine kurze Wiederholung der topologischen Grundlagen, sowie eine Reihe relevanter Beispiele von Räumen, die in der Vorlesung immer wieder auftauchen werden, bzw. die für verschiedene Anwendungen relevant sind. Im Kapitel 3 werden die Eilenberg–Steenrod-Axiome für Homologietheorien formuliert und die ersten Konsequenzen gezogen. In der Praxis wird Kohomologietheorie meist axiomatisch (auch gern als black box) benutzt, in Form der Homotopieinvarianz und des Ausschneidungsaxioms, und die konkrete Definition bestimmter Homologietheorien (simplicialer oder singulärer Homologie) spielt nur selten eine essentielle Rolle. Aus diesem Grund erscheint die Betonung der axiomatischen Aspekte sinnvoll, und erlaubt außerdem relativ früh in der Vorlesung relevante Beispiele zu diskutieren.

Kapitel 5: simpliciale und singuläre Homologie, Beweis Eilenberg–Steenrod-Axiome, Anwendung Jordan und Borsuk–Ulam

Kapitel 6: Kohomologie, Cup-Produkt, Künneth-Formel, universelle Koeffizienten, Orientierung und Poincaré-Dualität.

Ein paar Grundlagen aus der Kategorientheorie, sowie für die Vorlesung relevante Teile der homologischen Algebra sind im Anhang A zusammengefasst.

---

*Disclaimer:* Wie üblich bei Vorlesungsmitschriften beruht nichts im folgenden Skript auf eigenen wissenschaftlichen Leistungen, Einsichten oder Ergebnissen. Sowohl Definitionen als auch Formulierungen und Beweise für Sätze sind meist das Produkt von ursprünglich vage formulierten Ideen, die durch vielfache Umformulierungen und Kontextveränderungen über Jahrzehnte zu den heute verwendeten Konzepten herangewachsen sind. Insofern können konkrete Zuschreibungen von Fragestellungen, Begriffen, Sätzen oder Beweistechniken üblicherweise nicht vorgenommen werden. (Außerdem stellt sich überraschend oft heraus, dass die üblicherweise mit Sätzen oder Begriffen verknüpften Namen nicht unbedingt die zentralen Entwicklungen des Begriffs reflektieren.)

Das Material des Vorlesungsskripts beruht überwiegend auf gängigen Lehrbüchern zur algebraischen Topologie und homologischen Algebra. Hauptsächlich verwendet wurden die Bücher von Hatcher [Hat02], Weibel [Wei94] sowie Ghrist [Ghr14], weitere Orientierung boten Vorlesungsskripten von Clara Löh und Christian Bär. Die einzige Eigenleistung beschränkt sich daher auf Tipp-, Index-, Logik- und andere Fehler, fragwürdige Anordnung des Materials sowie falsche Schwerpunktsetzungen. (Vermutlich sind allerdings viele meiner Fehler auch von anderen Leuten bereits gemacht worden; damit kann ich leben.)

Vielen Dank an Sean Tilson für den Vorschlag, die Eilenberg–Steenrod-Axiome als zentrales Rechenwerkzeug an den Anfang der Vorlesung zu stellen sowie an Herrn Jochen Herzhoff für viele hilfreiche Korrekturhinweise.



## KAPITEL 2

# Zell-Komplexe

In der algebraischen Topologie geht es hauptsächlich um topologische Räume, die aus einfachen Bestandteilen zusammengebaut werden. Interessante Topologie kommt dadurch zustande, wie die einfachen Bestandteile zusammengesetzt werden. In späteren Abschnitten werden wir sehen, wie Homologie genau dieses nicht-triviale Zusammensetzen einfacher Bausteine quantifizieren kann.

In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Konzepte kennenlernen, was einfache Bausteine sein können, und wie Räume zusammengeklebt werden können. Die wichtigsten Räume in der algebraischen Topologie sind die *CW-Komplexe*, die aus Zellen zusammengeklebt werden, die homöomorph zu  $D^n$  sind. Eher kombinatorische Konzepte sind die simplizialen Komplexe, die sehr kombinatorisch als Teilmengensysteme aufgefasst oder geometrisch realisiert aus Simplizes zusammengebaut werden können. Der Vollständigkeit halber werden wir auch noch die  $\Delta$ -Komplexe (semi-simpliziale Komplexe) definieren, die in Hatcher's Buch [Hat02] eine wichtige Rolle spielen.

Das Ziel des Kapitels ist, die wichtigsten Definitionen und Konstruktionen kennenzulernen, und gleichzeitig ein paar interessante Beispiele von Räumen zu sehen, die für spätere Anwendungen eine Rolle spielen werden.

### 2.1. Grundbegriffe

**DEFINITION 2.1.1.** *Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$ , bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Menge  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$ , den sogenannten offenen Mengen, so dass*

- (1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ ,
- (2) für eine Menge  $\{U_i\}_{i \in I}$  von offenen Mengen  $U_i \in \mathcal{O}$  ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$ , d.h. Vereinigungen von beliebig vielen offenen Mengen sind wieder offen,
- (3) für  $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$  ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ , d.h. endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind wieder offen.

Die Mengen der Form  $X \setminus U$  für  $U \in \mathcal{O}$  heißen abgeschlossene Mengen. Für einen Punkt  $x \in X$  heißen die offenen Mengen  $U \in \mathcal{O}$  mit  $x \in U$  offene Umgebungen von  $x$ .

**DEFINITION 2.1.2 (Unterraum).** *Sei  $(X, \mathcal{O}(X))$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann definiert  $\mathcal{O}(Y) = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{O}(X)\}$  eine Topologie auf  $Y$ , und  $(Y, \mathcal{O}(Y))$  heißt Unterraum von  $X$ . Wenn  $Y \in \mathcal{O}(X)$  ist, spricht man von offenem Unterraum, wenn  $X \setminus Y \in \mathcal{O}(X)$  von abgeschlossenem Unterraum.*

**DEFINITION 2.1.3 (stetige Abbildung).** *Seien  $(X, \mathcal{O}(X))$  und  $(Y, \mathcal{O}(Y))$  zwei topologische Räume. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  (von Mengen) heißt stetige Abbildung, wenn für alle offenen Mengen  $U \in \mathcal{O}(Y)$  gilt  $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)$ .*

**DEFINITION 2.1.4.** *Für topologische Räume  $X, Y$  ist die Produkttopologie auf  $X \times Y$  erzeugt durch die Menge*

$$\{U \times V \mid U \text{ offen in } X \text{ und } V \text{ offen in } Y\}$$

der “offenen Rechtecken” gegeben ist, d.h. eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Vereinigung von offenen Rechtecken ist. Alternativ ist eine Menge  $U \subseteq X \times Y$  genau dann offen, wenn jeder Punkt  $x \in U$  in einem offenen Rechteck enthalten ist, das selbst ganz in  $U$  enthalten ist.

**DEFINITION 2.1.5 (Quotiententopologie).** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\sim \subseteq X \times X$  eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen  $[x]_{\sim} = \{y \in X \mid y \sim x\}$  wird mit  $X/\sim$  bezeichnet und heißt Quotientenraum; wir haben eine natürliche surjektive Abbildung  $\pi: X \rightarrow X/\sim: x \mapsto [x]$ . Auf  $X/\sim$  wird eine Topologie, die Quotiententopologie, dadurch definiert, dass eine Menge  $U \subset X/\sim$  offen ist genau dann, wenn ihr Urbild  $\pi^{-1}(U) \subset X$  offen ist.

Ein relevanter Spezialfall: für einen Unterraum  $Z \subseteq X$  können wir die Äquivalenzrelation betrachten, für die die Äquivalenzklassen durch  $Z$  und die einelementigen Mengen  $\{x\}$  für  $x \in X \setminus Z$  gegeben sind.

**DEFINITION 2.1.6.** Eine Homotopie  $H: f \sim g$  zwischen zwei stetigen Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , so dass  $H|_{X \times \{0\}} = f$  und  $H|_{X \times \{1\}} = g$ .

Sei  $i: Z \subset X$  ein Unterraum. Eine Homotopie relativ zu  $Z$  zwischen zwei Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  mit  $f|_Z = g|_Z$  ist eine Homotopie  $H: f \sim g$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H|_{Z \times [0, 1]}} & Y \\ & \searrow \text{pr}_1 & \nearrow f|_Z = g|_Z \\ & & Z \end{array}$$

**ÜBUNGSAUFGABE 2.1.7.** Zeigen Sie, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation ist. Zeigen Sie, dass die Komposition von Homotopieäquivalenzen eine Homotopieäquivalenz ist.

**BEISPIEL 2.1.8.** Einfache Beispiele sind Wege  $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$  für den Fall  $X = \{*\}$ . In der Analysis-Vorlesung kommen Homotopien zwischen Wegen (meist in offenen Gebieten im  $\mathbb{R}^n$ ) vor, wenn die Homotopieinvarianz der Wegintegrale diskutiert wird.  $\square$

**DEFINITION 2.1.9.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt wegzusammenhängend, wenn für je zwei Punkte  $x, y \in X$  eine stetige Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  existiert, für die  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$  gilt.

**DEFINITION 2.1.10.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt zusammenziehbar, wenn die Identität homotop zu einer konstanten Abbildung ist, d.h. es gibt einen Punkt  $p \in X$  und eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(x, 0) = x$  und  $H(x, 1) = p$  für alle  $x \in X$ .

**DEFINITION 2.1.11.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $i: Z \subset X$  ein Unterraum.

- (1) Eine Retraktion ist eine stetige Abbildung  $r: X \rightarrow Z$ , so dass  $r \circ i = \text{id}_Z$  ist. In diesem Fall heißt  $Z$  Retrakt von  $X$ .
- (2) Eine Deformationsretraktion ist eine stetige Abbildung  $r: X \times [0, 1] \rightarrow X$ , so dass  $r|_{X \times \{0\}} = \text{id}_X$ ,  $r|_{Z \times [0, 1]} = i \circ \text{pr}_1$  und  $r|_{X \times \{1\}}$  eine Retraktion ist.

**BEMERKUNG 2.1.12.** Anders gesagt, eine Deformationsretraktion ist eine Homotopie relativ zu  $Z$  zwischen der Identität und einer Retraktion  $H$ .

Die Definition ist in der Literatur nicht einheitlich: manchmal wird für Deformationsretrakt nur eine Homotopie zwischen der Identität und einer Retraktion

gefordert, und die Zusatzeigenschaft der Homotopie  $\text{rel } Z$  als starker Deformationsretrakt bezeichnet. Wir folgen Hatcher.

Deformationsretrakte sind insbesondere zusammenziehbar. Die Umkehrung, d.h. dass zusammenziehbare Räume sich auf einen Punkt deformationsretrahieren lassen, gilt für die schwache Variante, aber nicht für die starke. Beispiele gibt es in Übungsaufgaben in [Hat02, Kapitel 0].

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.13. Zeigen Sie, dass ein Retrakt eines zusammenziehbaren Raums auch zusammenziehbar ist.

BEISPIEL 2.1.14. Standardbeispiele für topologische Räume sind

- die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$
- die  $n$ -dimensionale Kreisscheibe  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$
- der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum  $\mathbb{R}P^n = S^n / \{x \sim -x, x \in S^n\} \cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \{x \sim \lambda x, x \in S^n, \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$
- der  $n$ -Torus  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \cong (S^1)^{\times n}$

□

BEMERKUNG 2.1.15. Viele interessante Beispiele für topologische Räume kommen aus der Differentialgeometrie oder Differentialtopologie. Eine Mannigfaltigkeit ist ein hausdorffscher zweitabzählbarer topologischer Raum, der lokal homöomorph zu einem  $\mathbb{R}^n$  ist. Solche Räume werden in der Vorlesung "Analysis auf Mannigfaltigkeiten" diskutiert. Für den Stoff der Topologie-Vorlesung sind Mannigfaltigkeiten nicht zentral, sie werden aber immer mal wieder in Beispielen erwähnt werden.

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.16. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}$  zusammenziehbar ist. (Zur Klarstellung:  $\mathbb{R}^\infty$  soll ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum von abzählbar unendlicher Dimension sein. Wir schreiben  $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$ , und eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^\infty$  ist offen, wenn  $U \cap \mathbb{R}^n$  für alle  $n$  offen ist.)

DEFINITION 2.1.17. Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung.

- Der Abbildungszyylinder von  $f$  ist der Quotient

$$M_f = (X \times [0, 1] \sqcup Y) / \{(x, 1) \sim f(x)\}.$$

- Der Abbildungskegel einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist definiert als

$$C_f = (X \times [0, 1] \sqcup Y) / \{(x_1, 0) \sim (x_2, 0), (x, 1) \sim f(x)\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.18. Sei  $f: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^2$ , wobei  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

- (1) Zeigen Sie, dass der Abbildungszyylinder von  $f$  homöomorph zum Möbiusband ist.
- (2) Zeigen Sie, dass der Abbildungskegel von  $f$  homöomorph zu  $\mathbb{R}P^2$  ist.

BEISPIEL 2.1.19. Für einen topologischen Raum ist der Konfigurationsraum von  $n$  angeordneten Punkten in  $X$  gegeben durch

$$\text{Conf}_n(X) = X^n \setminus \{\exists i \neq j : x_i = x_j\}$$

Für  $\mathbb{R}^m$  ist dies das Komplement eines Arrangements von Hyperebenen. Der Konfigurationsraum von  $n$  ungeordneten Punkten ist dann  $\text{Conf}_n(X) / \Sigma_n$ , wobei die symmetrische Gruppe  $\Sigma_n$  auf  $\text{Conf}_n(X)$  durch Permutation der  $n$  Punkte operiert.

□

ÜBUNGSAUFGABE 2.1.20. Zeigen Sie, dass  $\text{Conf}_2(\mathbb{R}^n)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^{n+1} \times S^{n-1}$  ist.

## 2.2. CW-Komplexe

DEFINITION 2.2.1. Ein CW-Komplex ist ein topologischer Raum  $X$ , der induktiv aus  $n$ -dimensionalen Zellen wie folgt konstruiert werden kann:

- (1) Sei  $X^{(0)}$  eine diskrete Menge von 0-Zellen.
- (2) Gegeben das  $n-1$ -Skelett  $X^{(n-1)}$ , erhalten wir das  $n$ -Skelett  $X^{(n)}$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen. Das Ankleben einer  $n$ -Zelle  $D^n$  an  $X^{(n-1)}$  entlang einer Abbildung  $\phi: S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow X^{(n-1)}$  ist durch den folgenden Quotientenraum gegeben:

$$X^{(n-1)} \sqcup_{\phi} D^n := X^{(n-1)} \sqcup D^n / \{x \sim \phi(x), x \in \partial D^n\}$$

Für eine Familie  $D_{\alpha}^n$ ,  $\alpha \in I$ , von Zellen und gegebenen Anklebeabbildungen  $\phi_{\alpha}: \partial D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n-1)}$  setzen wir dann

$$X^{(n)} = \left( X^{(n-1)} \sqcup \bigsqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n \right) / \{x \sim \phi_{\alpha}(x), x \in \partial D_{\alpha}^n\}.$$

- (3)  $X = \bigcup_n X^{(n)}$  trägt die schwache Topologie, d.h. eine Menge  $U \subseteq X$  ist genau dann offen, wenn  $U \cap X^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  offen ist.

BEMERKUNG 2.2.2. Ein CW-Komplex  $X$  mit endlich vielen Zellen heißt endlich. Wenn es ein  $n$  gibt, so dass  $X = X^{(n)}$ , dann heißt  $X$  endlich-dimensional.

Für eine  $n$ -Zelle heißt die Komposition  $D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n-1)} \sqcup_{\alpha} D_{\alpha}^n \rightarrow X^{(n)} \hookrightarrow X$  charakteristische Abbildung.

BEISPIEL 2.2.3. Eine kompakte orientierte Fläche von Geschlecht  $g$  kann aus einem  $4g$ -Eck durch Randidentifikationen konstruiert werden. Dafür werden die Kanten mit  $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$  durchmarkiert. Dann identifizieren wir die Kanten  $a_i$  und  $a_i^{-1}$  durch einen Homöomorphismus, der die Kante  $a_i$  im positiven Drehsinn und die Kante  $a_i^{-1}$  im negativen Drehsinn durchläuft; analog für  $b_i$  und  $b_i^{-1}$ . Das Ergebnis ist eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle,  $2g$  1-Zellen und einer 2-Zelle.  $\square$

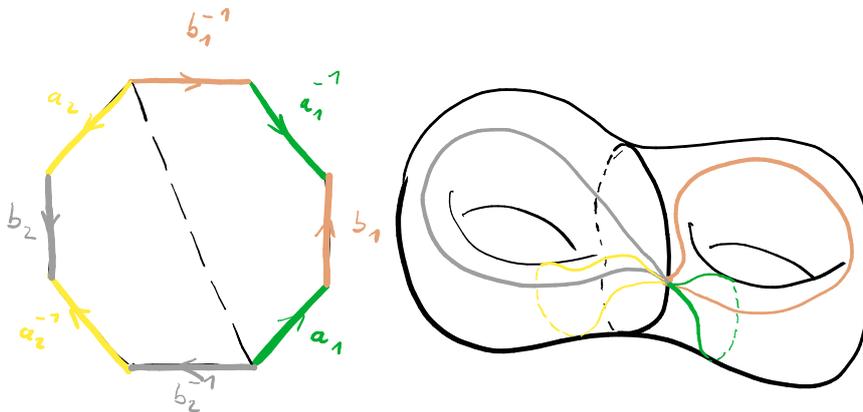


ABBILDUNG 1. Kompakte orientierte Fläche von Geschlecht 2.

BEISPIEL 2.2.4. Die  $n$ -dimensionale Sphäre hat eine CW-Struktur mit einer 0-Zelle und einer  $n$ -Zelle.  $\square$

BEISPIEL 2.2.5. Der  $n$ -dimensionale reell-projektive Raum  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  hat eine CW-Struktur mit jeweils einer  $i$ -Zelle für  $i \in [0, n]$ . Induktiv nehmen wir an, dass  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  eine CW-Struktur der behaupteten Form besitzt. Nach Definition ist  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = S^n / \{x \sim -x\}$ , so dass  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  als Quotient einer Hemisphäre  $D^n$  geschrieben werden kann, bei der auf dem Äquator  $S^{n-1}$  die Antipodenpunkte  $x, -x$  identifiziert werden. Da  $S^{n-1} / \{x \sim -x\} = \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ , erhalten wir die CW-Struktur auf  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  durch Ankleben einer  $n$ -Zelle an  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ .

Der  $n$ -dimensionale komplex-projektive Raum  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  ist als Quotient definiert durch  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^\times$ . Hierbei ist  $\mathbb{C}^\times$  die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen, dadurch kann der Quotient als Menge der komplexen Nullpunktsgersten in  $\mathbb{C}^{n+1}$  interpretiert werden. Der komplex projektive Raum  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  hat eine CW-Struktur mit jeweils einer  $2i$ -Zelle für  $i \in [0, n]$ . Analog zum reellen Fall kann die CW-Struktur von  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  induktiv konstruiert werden, indem an  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  eine  $2n$ -Zelle angeklebt wird; die Anklebeabbildung ist dabei die Komposition  $S^{2n-1} = \partial D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  der Einbettung  $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$  als Einheitsphäre (bzgl. des hermiteschen Skalarprodukts) und der kanonischen Projektion  $(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$ .  $\square$

BEISPIEL 2.2.6. Jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit hat die Struktur eines endlichen CW-Komplexes. Dies folgt aus der sogenannten Morse-Theorie, der Gradientenfluss für eine Morse-Funktionen liefert eine Zellzerlegung.  $\square$

DEFINITION 2.2.7. Ein Unterkomplex eines CW-Komplexes  $X$  ist ein abgeschlossener Unterraum  $A \subseteq X$ , der eine Vereinigung von Zellen ist. Der Unterkomplex  $A$  trägt eine induzierte CW-Struktur von  $X$ . Ein Paar  $(X, A)$  bestehend aus einem CW-Komplex  $X$  und einem Unterkomplex  $A \subseteq X$  heißt CW-Paar.

DEFINITION 2.2.8. Für CW-Komplexe  $X$  und  $Y$  hat das Produkt  $X \times Y$  eine CW-Struktur, deren Zellen die Produkte der Zellen von  $X$  und  $Y$  sind. Wenn  $X$  oder  $Y$  endlich sind, oder beide höchstens abzählbar viele Zellen haben, stimmt die CW-Topologie mit der Produkttopologie überein.

DEFINITION 2.2.9. Für ein CW-Paar  $(X, A)$  trägt der Quotientenraum  $X/A$  eine natürliche CW-Struktur, deren Zellen die Zellen von  $X \setminus A$  sind, zuzüglich einer neuen 0-Zelle, die  $A$  ersetzt. Die Anklebeabbildungen für  $X/A$  sind durch die Komposition  $S^{n-1} = \partial D_\alpha^n \rightarrow X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)}/A^{(n-1)}$  gegeben.

Ein Beispiel ist  $D^n / \partial D^n = S^n$ .

DEFINITION 2.2.10. Die (unreduzierte) Suspension/Einhängung  $\Sigma X$  von  $X$  erhalten wir aus  $X \times [0, 1]$ , indem  $X \times \{0\}$  und  $X \times \{1\}$  jeweils zu einem Punkt zusammengezogen werden. Alternativ ist der Kegel  $C(X) = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$  über  $X$  der Abbildungskegel für  $X \rightarrow \{*\}$ , und die Einhängung ergibt sich durch Zusammenkleben zweier Kegel über  $X$  entlang  $X$ .

Ein Beispiel ist  $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ .

DEFINITION 2.2.11. Für topologische Räume  $X_i$ ,  $i \in I$  mit ausgezeichneten Basispunkten  $x_i \in X_i$  ist die Wedge-Summe/Bouquet

$$\bigvee_{i \in I} X_i = \left( \bigsqcup_{i \in I} X_i \right) / \{x_i \sim x_j \forall i, j \in I\}.$$

Für einen CW-Komplex ist  $X^{(n)} / X^{(n-1)} \cong \bigvee_\alpha S^n$ .

PROPOSITION 2.2.12. Sei  $X$  ein CW-Komplex:

- (1)  $X$  ist normal, d.h. für je zwei abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subseteq X$  mit  $A \cap B = \emptyset$  gibt es offene Umgebungen  $U \supset A$  und  $V \supset B$  mit  $U \cap V = \emptyset$ .

- (2)  $X$  ist lokal zusammenziehbar, d.h. für jeden Punkt  $x$  und jede offene Umgebung  $U$  von  $x$  gibt es eine offene Umgebung  $x \in V \subseteq U$ , die zusammenziehbar ist.

BEWEIS. Für eine Teilmenge  $A \subseteq X$  und eine Abbildung  $\epsilon$  von der Menge der Zellen nach  $\mathbb{R}_{>0}$  können wir eine offene Umgebung  $N_\epsilon(A)$  durch Rekursion über  $n$ -Skelette wie folgt konstruieren. Der Anfang ist  $N_\epsilon^{(0)}(A) = A \cap X^{(0)}$ . Für den Rekursionsschritt nehmen wir an, dass wir bereits eine offene Umgebung  $N_\epsilon^{(n)}(A)$  von  $A$  in  $X^n$  konstruiert haben. Um  $N_\epsilon^{(n+1)}(A)$  zu konstruieren reicht es, für jede charakteristische Abbildung  $\Phi_\alpha: D_\alpha^{n+1} \rightarrow X$  die offene Menge  $\Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n+1)}(A)) \subseteq D^{n+1}$  anzugeben. Wir definieren  $\Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n+1)}(A))$  als Vereinigung einer offenen  $\epsilon$ -Umgebung von  $\Phi_\alpha^{-1}(A) \setminus \partial D^{n+1}$  in  $D^{n+1} \setminus \partial D^{n+1}$  und dem Produkt  $(1 - \epsilon, 1] \times \Phi_\alpha^{-1}(N_\epsilon^{(n)}(A))$  für sphärische Koordinaten  $(r, \theta) \in D^{n+1} \setminus \{0\} \cong (0, 1] \times \partial D^{n+1}$ . Die gewünschte offene Umgebung ist  $N_\epsilon(A) = \bigcup_n N_\epsilon^{(n)}(A)$ .

In dieser Konstruktion können für abgeschlossene Teilmengen  $A, B \subseteq X$  die relevanten  $\epsilon$  so gewählt werden, dass  $N_\epsilon^{(n)}(A)$  und  $N_\epsilon^{(n)}(B)$  disjunkt sind (wesentlicher Grund ist hier die Normalität bzw. Kompaktheit von  $D^n$ ). Dies zeigt die Normalität.

Für einen Punkt  $x \in X$  und eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  von  $x$  können wir für genügend kleine  $\epsilon$  ein  $N_\epsilon(x) \subseteq U$  finden. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $N_\epsilon(x)$  zusammenziehbar ist. Für  $x \in X^{(m)} \setminus X^{(m-1)}$  und  $n > m$  können wir  $N_\epsilon^{(n)}(x)$  auf  $N_\epsilon^{(n-1)}(x)$  radial auf den Rand der  $n$ -Zelle retrahieren. Diese Deformationsretraktionen können wir zusammenfassen:  $N_\epsilon(x)$  wird auf  $N_\epsilon^{(m)}(x)$  retrahiert, indem im Zeitintervall  $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$  die Retraktion von  $N_\epsilon^{(n)}(x)$  auf  $N_\epsilon^{(n-1)}(x)$  durchgeführt wird. Nach Voraussetzung  $x \in X^{(m)} \setminus X^{(m-1)}$  ist  $N_\epsilon^{(m)}(x)$  einfach ein  $\epsilon$ -Ball um  $x$  in einer  $m$ -Zelle und kann auf den Punkt  $x$  zusammengezogen werden.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 2.2.13. Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar, d.h.  $A \subset X$  ist ein Unterkomplex. Dann ist  $X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  ein Deformationsretrakt von  $X \times [0, 1]$ . (Hinweis: Betrachten Sie erst den Fall  $(D^n, \partial D^n)$ . Die Retraktionen für die  $n$ -Skelette werden dann wie im Beweis der lokalen Zusammenziehbarkeit von CW-Komplexen zusammengefasst.)

closure-finite!

## Eilenberg–Steenrod-Axiome und Beispielrechnungen

Im Kapitel zu Zellkomplexen haben wir mit den CW-Komplexen Räume betrachtet, die aus einfachen Bausteinen, den Zellen, zusammengesetzt werden. Homologie übersetzt nun die Information in den Anklebeabbildungen der Zellen bzw. Simplexes in algebraische Beschreibungen. Die grundlegenden Eigenschaften einer Homologietheorie werden durch die Eilenberg–Steenrod-Axiome formuliert. Wir wollen Invarianten, die sich unter Homotopieäquivalenz nicht ändern, das führt zum *Axiom der Homotopieinvarianz*. Ausserdem wollen wir die Invarianten berechnen können; dafür ist es praktisch, wenn sich Zerlegungen eines topologischen Raums (z.B. in Form von Überdeckungen) auch in Beschreibungen der Homologie übersetzen lassen, ähnlich dem Inklusions-Exklusions-Prinzip aus der Kombinatorik. Dies führt zu *langen exakten Sequenzen* und dem *Ausschneidungsaxiom*. Wenn wir mit unendlichen Komplexen umgehen müssen, brauchen wir auch noch eine Form der Stetigkeit, die uns erlaubt, Aussagen z.B. auf endliche Komplexe zurückzuführen, dies führt zum *Wedge-* oder *Additivitäts-Axiom*.

Homotopieinvarianz und Ausschneidung sind ganz allgemein die definierenden Kennzeichen von Homologietheorien. Beispielsweise gibt es auch in der algebraischen Geometrie Homologietheorien für algebraische Varietäten. Auch wenn in diesen Theorien Homotopieinvarianz und Ausschneidung anders formuliert werden, bilden sie dort ebenfalls die charakteristischen Eigenschaften und zentralen Berechnungsmethoden.

Im folgenden Kapitel werden wir die Eilenberg–Steenrod-Axiome formulieren und bereits ein paar beispielhafte Anwendungen betrachten. Viele Berechnungen von Homologie können direkt aus den Axiomen abgeleitet werden, ohne konkretes Wissen über die Definition einer speziellen Homologietheorie. Tatsächlich sind alle gewöhnlichen Homologietheorien auf CW-Komplexen äquivalent, was wir auch aus den Axiomen ableiten werden.

### 3.1. Axiomatik

Für die Formulierung der Axiome für Homologietheorien gibt es verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl; wir können Basispunkte ignorieren (unreduziert) oder mit einbeziehen (reduziert), wir können topologische Räume (absolut) oder Raumpaare (relativ) betrachten, wir können allgemein topologische Räume betrachten oder uns auf CW-Komplexe einschränken. Entsprechend viele Varianten der Axiome gibt es.

Homologietheorien werden immer als Funktoren von einer Kategorie topologischer Räume in eine Kategorie algebraischer Strukturen definiert. Eine kurze Diskussion der relevanten Grundlagen aus der Kategorientheorie ist in Anhang A.1 zu finden.

DEFINITION 3.1.1. *Eine (unreduzierte) Homologietheorie ist*

- eine Sequenz von Funktoren  $H_n: \mathbf{Top}^2 \rightarrow \mathbf{Ab}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , von der Kategorie der Raumpaare mit stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen,
- zusammen mit einer Sequenz natürlicher Transformationen, den Randabbildungen

$$\partial_n: H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A, \emptyset),$$

d.h. für eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A, \emptyset) \\ H_n(f) \downarrow & & \downarrow H_n(f) \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B, \emptyset) \end{array}$$

so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

**Homotopieinvarianz:** Wenn  $f \sim g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , dann  $H_n(f) = H_n(g): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ . Hierbei ist eine Homotopie  $H: f \sim g$  eine Abbildung  $H: (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$  von Raumpaaren, so dass  $H|_{(X \times \{0\}, A \times \{0\})} = f$  und  $H|_{(X \times \{1\}, A \times \{1\})} = g$ .

**Lange exakte Sequenz:** Für ein Raupaar  $(X, A)$  haben wir die folgende lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, \emptyset) \rightarrow \cdots$$

Dabei sind  $i: (A, \emptyset) \hookrightarrow (X, \emptyset)$  und  $j: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$  die entsprechenden Inklusionen von Raumpaaren.

**Ausschneidung:** Für jedes Raupaar  $(X, A)$  und einen Unterraum  $B \subset A$  mit  $\bar{B} \subset \overset{\circ}{A}$  gibt es natürliche Isomorphismen

$$H_n(X \setminus B, A \setminus B) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A).$$

**Additivität:** Für eine beliebige Indexmenge  $I$  und Raumpaare  $(X_\alpha, \emptyset)$ ,  $\alpha \in I$  induzieren die Inklusionsabbildungen  $X_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_\alpha X_\alpha$  Isomorphismen für alle  $n$

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_\alpha, \emptyset) \xrightarrow{\cong} H_n\left(\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha, \emptyset\right).$$

**BEMERKUNG 3.1.2.** Für eine stetige Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  wird die induzierte Abbildung  $H_n(f): H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$  fast immer als  $f_*$  bezeichnet. Für einen topologischen Raum erhalten wir absolute Homologiegruppen  $H_n(X) := H_n(X, \emptyset)$ . Die Homologie für Raumpaare wird auch relative Homologie genannt.

**BEMERKUNG 3.1.3.** Für den einpunktigen Raum  $\{*\}$ , auch mit  $\text{pt}$  bezeichnet, ist  $H_\bullet(\text{pt})$  eine graduierte abelsche Gruppe. Diese Gruppe nennt man die Koeffizienten der Homologietheorie.

Wir können noch eine Zusatzforderung stellen. Das Dimensionsaxiom fordert, dass die Koeffizienten möglichst einfach sind, nämlich  $H_0(\text{pt}) = A$  für eine abelsche Gruppe  $A$  und  $H_i(\text{pt}) = 0$  sonst. Eine solche Homologietheorie heißt gewöhnliche Homologietheorie, andere Homologietheorien heißen außergewöhnlich. Wir werden in Korollar 3.4.9 (fast) sehen, dass alle gewöhnlichen Homologietheorien isomorph sind.

Außergewöhnliche Homologietheorien spielen auch eine wichtige Rolle in der algebraischen Topologie sowie ihrer Verbindung zu Geometrie und Differentialtopologie. Wichtige Beispiele sind topologische  $K$ -Theorie und Kobordismus.

**LEMMA 3.1.4.** (1) Für ein Raupaar  $(X, A)$ , für das die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz ist, gilt  $H_k(X, A) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

(2) Für eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  so dass  $f: X \rightarrow Y$  und  $f|_A: A \rightarrow B$  Homotopieäquivalenzen sind, ist

$$f_*: H_k(X, A) \rightarrow H_k(Y, B)$$

ein Isomorphismus für alle  $k \in \mathbb{Z}$ .

BEWEIS. (1) folgt aus der langen exakten Sequenz

$$H_k(A) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, A) \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow H_{k-1}(X),$$

da unter der Annahme die Abbildungen  $H_k(A) \rightarrow H_k(X)$  Isomorphismen sind.

(2) folgt aus dem 5-Lemma, cf. A.2.7

$$\begin{array}{ccccccccc} H_k(A) & \longrightarrow & H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, A) & \longrightarrow & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & H_{k-1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_k(B) & \longrightarrow & H_k(Y) & \longrightarrow & H_k(Y, B) & \longrightarrow & H_{k-1}(B) & \longrightarrow & H_{k-1}(Y) \end{array}$$

□

LEMMA 3.1.5. Sei  $(X, x)$  ein punktierter Raum. Dann induziert die Inklusion  $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, \{x\})$  natürliche Isomorphismen

$$H_k(X) \cong H_k(\{x\}) \oplus H_k(X, \{x\}).$$

BEWEIS. Die Abbildung  $p: X \rightarrow \{x\}$  ist eine Retraktion zur Inklusion  $i: \{x\} \rightarrow X$ . Insbesondere spaltet  $p_*: H_k(X) \rightarrow H_k(\{x\})$  die Abbildung  $i_*: H_k(\{x\}) \rightarrow H_k(X)$ . Dadurch zerfällt die lange exakte Sequenz

$$H_k(\{x\}) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_k(X, \{x\}) \rightarrow H_{k-1}(\{x\}) \rightarrow H_{k-1}(X)$$

in spaltende kurze exakte Sequenzen wie behauptet, cf. Lemma A.2.3. □

Für eine Homologietheorie  $H_n$  können wir die reduzierte Homologie definieren

$$\tilde{H}_n(X) := \ker(H_n(X) \rightarrow H_n(\text{pt})).$$

Für einen Basispunkt  $x \in X$  ist die Komposition  $\tilde{H}_n(X) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, \{x\})$  ein Isomorphismus. Die Eilenberg–Steenrod-Axiome für  $H_n$  übersetzen sich in Axiome für die reduzierte Homologie:

DEFINITION 3.1.6. Eine reduzierte Homologietheorie ist eine Sequenz von Funktoren  $\tilde{H}_n: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , von der Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

**Homotopieinvarianz:** Für homotope Abbildungen  $f \sim g: X \rightarrow Y$  sind die induzierten Abbildungen gleich:

$$\tilde{H}_n(f) = \tilde{H}_n(g): \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y).$$

**Ausschneidungssequenz:** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in  $X$  ist (z.B. ein CW-Paar  $(X, A)$ ). Dann existieren Randabbildungen

$$\partial_n: \tilde{H}_n(X/A) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(A)$$

und eine lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{\tilde{H}_n(i)} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\tilde{H}_n(q)} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

Die Randabbildungen sind natürlich, d.h. für eine Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Paaren mit induzierter Quotientenabbildung  $\bar{f}: X/A \rightarrow Y/B$  haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(X/A) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(A) \\ \tilde{H}_n(\bar{f}) \downarrow & & \downarrow \tilde{H}_n(f) \\ \tilde{H}_n(Y/B) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(B) \end{array}$$

**Wedge-Axiom:** Für eine Wedge-Summe  $X = \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  mit Inklusionsabbildungen  $i_{\alpha}: X_{\alpha} \rightarrow X$  ist die Abbildung

$$\bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(i_{\alpha}): \bigoplus_{\alpha} \tilde{H}_n(X_{\alpha}) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$$

ein Isomorphismus für alle  $n$ .

**BEMERKUNG 3.1.7.** Umgekehrt können wir von reduzierter Homologie zur unreduzierten Homologie übergehen. Dafür bezeichnen wir  $X_+ = X \sqcup \{y\}$  und setzen  $H_n(X) := \tilde{H}_n(X_+)$ . Für  $\emptyset \neq A \subseteq X$  haben wir  $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 3.1.8.** Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard, wobei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  ein nichtleerer abgeschlossener Unterraum ist, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung  $U$  von  $A$  in  $X$  ist. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung  $q: (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  für alle  $n$  Isomorphismen induziert:

$$q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A).$$

**ÜBUNGSAUFGABE 3.1.9.** Sei  $X$  ein topologischer Raum, und  $B \subset A \subset X$  Unterräume. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$H_{k+1}(X, A) \xrightarrow{\partial} H_k(A, B) \rightarrow H_k(X, B) \rightarrow H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A, B)$$

wobei die Randabbildung durch die Komposition

$$H_k(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(A, B)$$

von Randabbildung in der langen exakten Sequenz des Paares  $(X, A)$  sowie der Abbildung  $i_*$  für  $i: (A, \emptyset) \rightarrow (A, B)$  gegeben ist.

**ÜBUNGSAUFGABE 3.1.10.** Für eine endliche Indexmenge  $I$  seien  $(X_{\alpha}, x_{\alpha})$  punktierte topologische Räume, so dass für jedes  $\alpha$  der Punkt  $x_{\alpha} \in X_{\alpha}$  Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in  $X_{\alpha}$  ist. Wir bezeichnen mit  $\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  die Wedge-Summe. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildungen  $X_{\alpha} \hookrightarrow \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  Isomorphismen für alle  $n$  induzieren:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_n(X_{\alpha}, \{x_{\alpha}\}) \xrightarrow{\cong} H_n\left(\bigvee_{\alpha \in I} X_{\alpha}, \{x_{\alpha}\}\right)$$

Benutzen Sie dafür nur Homotopieinvarianz und Ausschneidung, nicht die Additivität bzw. das Wedge-Axiom.

**PROPOSITION 3.1.11 (Mayer–Vietoris-Sequenz).** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $U, V \subset X$  Unterräume, so dass  $\dot{U} \cup \dot{V} = X$ . Sei  $A \subset X$  ein Unterraum mit  $A \subset U \cap V$ . Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_k(U \cap V, A) \xrightarrow{((j_U)_*, -(j_V)_*)} H_k(U, A) \oplus H_k(V, A) \xrightarrow{(i_U)_* + (i_V)_*} H_k(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U \cap V, A) \rightarrow \cdots$$

BEWEIS. Wir haben eine Inklusion  $(V, U \cap V, A) \hookrightarrow (X, U, A)$  von Tripeln topologischer Räume, die ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen induziert, cf. Übung 3.1.9:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(V, U \cap V) & \longrightarrow & H_n(U \cap V, A) & \xrightarrow{(j_V)_*} & H_n(V, A) & \longrightarrow & H_n(V, U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \cong \downarrow & & (j_U)_* \downarrow & & \downarrow (i_V)_* & & \downarrow \cong & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X, U) & \longrightarrow & H_n(U, A) & \xrightarrow{(i_U)_*} & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist  $\overline{X \setminus V} = X \setminus \overset{\circ}{V} \subseteq \overset{\circ}{U}$ , was mit Ausschneidung zu den markierten Isomorphismen führt. Die Behauptung folgt aus Übungsaufgabe A.2.9.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.12. (*Einhängungsisomorphismus*) Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeigen Sie mit der Mayer-Vietoris-Sequenz, dass es natürliche Isomorphismen für alle  $k$  gibt:

$$\tilde{H}_k(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{k+1}(\Sigma X)$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.1.13. Gegeben seien endlich viele Punkte  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ . Berechnen Sie induktiv mit Hilfe der Mayer-Vietoris-Sequenz die reduzierte Homologie  $\tilde{H}_\bullet(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_m\})$ .

### 3.2. Anwendung: Brouwerscher Fixpunktsatz

BEMERKUNG 3.2.1. Caveat: An dieser Stelle wollen wir schon einmal erste Anwendungen diskutieren. Dabei ist allerdings ein wesentlicher Punkt zu beachten. In den folgenden Abschnitten zum Brouwerschen Fixpunktsatz und der Theorie des Abbildungsgrades nehmen wir an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten gibt! Die Aussagen, die wir ableiten werden, sind an dieser Stelle der Vorlesung nur unter dieser Annahme gültig. Die Diskussion der Anwendungen an dieser Stelle soll 1) weiter illustrieren, wie die Axiome angewendet werden können, 2) zeigen, dass für viele Anwendungen Homologie auch einfach als "black box" benutzt werden kann und 3) auch begründen, dass das Studium von Homologietheorien sinnvoll ist und interessante Anwendungen hat. Im Kapitel 5 werden wir dann mit der singulären Homologie eine Homologietheorie konstruieren, die die Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt und damit zeigen, dass die Existenzvoraussetzungen hier gerechtfertigt sind.

Nach der Beachtung des Warnhinweises nehmen wir nun also für den Rest des Abschnitts an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, die mit  $H_\bullet$  bezeichnet wird.

PROPOSITION 3.2.2 (Fixpunktsatz von Brouwer). (1) Es gibt keine Retraktion  $r: D^n \rightarrow \partial D^n$  für die Inklusion  $i: \partial D^n \hookrightarrow D^n$ .  
(2) Jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  hat einen Fixpunkt.

BEWEIS. (1) Wir nehmen an, dass es eine Retraktion  $r: D^n \rightarrow \partial D^n$  für die Inklusion  $i: \partial D^n \hookrightarrow D^n$  gibt. Dann ist die Komposition

$$\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n)$$

gleich der Identität auf  $\tilde{H}_{n-1}(\partial D^n) \cong \mathbb{Z}$ . Aber wegen  $\tilde{H}_{n-1}(D^n) = 0$  gilt  $i_* = r_* = 0$ , ein Widerspruch.

(2) Wir betrachten eine fixpunktfreie Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$ , d.h.  $f(x) \neq x$  für alle  $x \in D^n$ . Wir definieren eine Abbildung  $r: D^n \rightarrow \partial D^n$ : für einen Punkt  $x \in D^n$  betrachten wir den Strahl, der ausgehend von  $f(x)$  durch den Punkt  $x$  verläuft,

und bilden  $x$  auf den Schnittpunkt  $r(x)$  dieses Strahls mit  $\partial D^n$  ab. Stetigkeit von  $r(x)$  folgt aus der Stetigkeit von  $f(x)$ . Nach Konstruktion ist  $r(x) = x$  für  $x \in \partial D^n$ . Also ist  $r$  eine Retraktion, was nach (1) unmöglich ist.  $\square$

**BEISPIEL 3.2.3 (Nash-Gleichgewicht).** *Eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes auf Equilibria und Modellierung von Preisbildung in den Wirtschaftswissenschaften (Arrow–Debreu-Gleichgewichtsmodell, Econometrica 22, 1954). Es gibt  $N$  verschiedene Produkte, deren Preise im Intervall  $[0, \infty)$  liegen. Für die topologische Anwendung ersetzen wir Preise durch Preisverhältnisse, d.h. wir nehmen an, dass nicht alle Preise 0 sind und teilen immer durch die Summe der Preise aller Produkte. Die Preise liegen dann im Standardsimplex  $\Delta^{N-1} \subset [0, \infty)^N$ .*

*Für eine Menge von Kunden  $A$  haben wir jeweils preisabhängige Bedarfsfunktionen  $D_\alpha: \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\alpha \in A$ , ebenso für eine Menge von Anbietern  $B$  preisabhängige Angebotsfunktionen  $S_\beta: \Delta^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Wir betrachten die Überschuss-Mangel-Funktion*

$$Z(p) := \sum_{\alpha} D_{\alpha}(p) - \sum_{\beta} S_{\beta}(p),$$

*die für ein gegebenes Preisverhältnis die Differenz zwischen Nachfrage und Angebot beschreibt (positive Werte: Mangel, negative Werte: Überschuss). Wir nehmen an, dass  $Z$  stetig ist und dass das Walras-Gesetz gilt:  $p \cdot Z(p) = 0$  (Balance zwischen Einnahmen/Ausgaben).*

*Dann existiert ein Gleichgewichtspunkt, in dem Angebot und Nachfrage für Waren mit positivem Preis übereinstimmen, d.h.  $p \in \Delta^{N-1}$  mit  $Z(p) \leq 0$  (wegen  $p \cdot Z(p) = 0$  und  $p \geq 0$ ). Wir betrachten die Funktion*

$$f: \Delta^{N-1} \rightarrow \Delta^{N-1}: p \mapsto \frac{\max\{0, p + Z(p)\}}{C}$$

*mit  $C(p) = \sum_i \max\{0, p + Z(p)\}$  (die Summe der Komponenten von  $\max\{0, p + Z(p)\}$ ). Diese Funktion beschreibt Preisänderungen: wenn (eine Komponente von)  $Z(p)$  positiv ist, haben wir einen Mangel, also steigen die Preise; wenn  $Z(p)$  negativ ist, fallen Preise. Die Funktion  $f$  ist wohldefiniert, da wir mit  $p \cdot Z(p) = 0$  auch  $p \cdot (p + Z(p)) = \|p\|^2 > 0$  haben. Da die Komponenten von  $p$  nicht-negativ sind, muss es positive Komponenten von  $p + Z(p)$  geben, also ist  $C(p) > 0$ . Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz, cf. Proposition 3.2.2, existiert ein Fixpunkt  $P$  von  $f$ , für den dann gilt*

$$P = \frac{\max\{0, P + Z(P)\}}{C(P)}.$$

*Wenn alle Preiskomponenten von  $P$  positiv sind, folgt aus  $P = \frac{P+Z(P)}{C(P)}$  und dem Walras-Gesetz  $P \cdot Z(P) = 0$  schon*

$$P \cdot P = \frac{P \cdot P + P \cdot Z(P)}{C(P)} = \frac{P \cdot P}{C(P)},$$

*also ist  $C(P) = 1$  und damit  $Z(P) = 0$ . Für Waren mit Preis  $P_i = 0$  im Fixpunkt folgt aus der Definition von  $f$ , dass  $P_i + Z_i(P) \leq 0$ , und damit haben wir  $Z_i(P) \leq 0$ . Dann können wir auf den Teilraum der positiven Preise projizieren und das obige Argument anwenden.*

*Es gibt verschiedene Varianten, Verallgemeinerungen etc. für Spiele mit gemischten Strategien...  $\square$*

Das Spiel Hex wurde unabhängig von Piet Hein und John Nash entwickelt, siehe z.B. [https://de.wikipedia.org/wiki/Hex\\_\(Spiel\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Hex_(Spiel)) Es wird auf einem rhombenförmigen Spielbrett aus  $n \times n$  hexagonalen Feldern gespielt. Die Randseiten des Spielfelds sind schwarz und weiß eingefärbt, je zwei gegenüberliegende Seiten haben

die gleiche Farbe. Die zwei Spieler setzen abwechselnd Steine ihrer Farbe auf das Spielbrett. Ziel ist es, die Ränder der eigenen Farbe durch eine durchgehende Kette von Spielsteinen der eigenen Farbe zu verbinden. Der folgende Beweis ist dem Buch von Ghrist entnommen, [Ghr14, Theorem 5.20].

PROPOSITION 3.2.4. *Im Spiel Hex gibt es genau einen Gewinner.*

BEWEIS. Hier arbeiten wir mit einer gewöhnlichen Homologietheorie mit Koeffizienten in einem Körper  $K$ .

Eine topologische Umformulierung des Spielbretts: Wir betrachten den Raum  $D = [0, 1]^2$  mit einer endlichen polygonalen Zellzerlegung, so dass die folgenden Aussagen gelten:

- (1) es gibt ein Paar disjunkter schwarzer 2-Zellen  $B_0$ , die die obere und untere Kante enthalten; ebenso ein Paar disjunkter weißer 2-Zellen,  $W_0$ , die die rechte und linke Kante enthalten,
- (2) jede 0-Zelle der Zerlegung ist in genau drei 1-Zellen enthalten.

In jedem Spielzug wird eine 2-Zelle ausgewählt und schwarz bzw. weiß gefärbt, je nachdem, wer am Zug ist. Am Ende des Spiels haben alle Zellen eine Farbe.

Sei  $B$  eine  $\epsilon$ -Umgebung vom Abschluss der Vereinigung aller schwarzer Zellen, die diesen Abschluss als Deformationsretrakt enthält; analog sei  $W$  eine  $\epsilon$ -Umgebung vom Abschluss der Vereinigung aller weißer Zellen. Die Behauptung des Satzes ist, dass *entweder* ein Pfad in  $B$  existiert, der die beiden Komponenten von  $B_0$  verbindet, *oder* ein Pfad in  $W$  existiert, der die beiden Komponenten von  $W_0$  verbindet.

Wir haben eine offene Überdeckung  $B \cup W = D$ , und es gibt eine Deformationsretraktion der Randzellen  $S = B_0 \cup W_0$  auf  $\partial D$ . Wir betrachten ein Diagramm relevanter exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2(D, S) & \longrightarrow & H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0) & \longrightarrow & H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0) & \longrightarrow & H_1(D, S) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H_2(D) & \longrightarrow & H_1(B \cap W) & \longrightarrow & H_1(B) \oplus H_1(W) & \longrightarrow & H_1(D) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & H_1(B_0 \cap W_0) = 0 & & H_1(B_0) \oplus H_1(W_0) = 0 & & 
 \end{array}$$

Die Zeilen sind (relative) Mayer–Vietoris-Sequenzen für die offene Überdeckung, die Spalten lange exakte Sequenzen für relative Homologie. Die rechte Spalte und  $H_2(D)$  sind 0. Die vertikalen Abbildungen sind wegen Exaktheit alle injektiv. In der rechten oberen Ecke haben wir  $H_2(D, S) \cong H_2(D/S) = H_2(S^2) = K$ .

Ein Pfad in  $B$ , der die Komponenten von  $B_0$  verbindet, ist eine relative Homologieklass in  $H_1(B, B_0) = H_1(B/B_0)$ , analog für  $W$ . Wir wollen also zeigen, dass der Kokern von  $H_1(B) \oplus H_1(W) \rightarrow H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0)$  eindimensional ist – dann existiert genau ein Gewinner.

Der Durchschnitt  $B \cap W$  enthält als Deformationsretrakt den Durchschnitt vom Abschluss der schwarzen Zellen und vom Abschluss der weißen Zellen. Dies ist ein ein-dimensionaler Simplicialkomplex. Zusätzlich ist außer den 4 Randpunkten jeder 0-Simplex in genau zwei 1-Simplizes enthalten: jeder solche 0-Simplex in  $B \cap W$  hat Grad 3 in der Zellzerlegung und zwei der angrenzenden 2-Zellen haben die selbe Farbe. Bis auf Homöomorphismus besteht  $B \cap W$  also aus  $N$  Kopien von  $S^1$  und zwei abgeschlossenen Intervallen. Aus der Berechnung der Homologie von  $S^1$  und dem Wedge-Axiom folgt  $H_1(B \cap W) = K^N$  und  $H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0) = H_1(B \cap W) \oplus K^2$ , da die abgeschlossenen Intervalle echte relative Homologieklassen induzieren.

Wegen  $H_2(D) = 0$  und  $H_3(D) = 0$  haben wir auch einen Isomorphismus  $H_2(B \cap W) \cong H_2(B) \oplus H_2(W)$ . Mit der langen exakten Sequenz für die Paare  $(B, B_0)$  und  $(W, W_0)$  haben wir

$$0 = H_2(B) \oplus H_2(W) \rightarrow H_2(B, B_0) \oplus H_2(W, W_0) \rightarrow H_1(B_0) \oplus H_1(W_0) = 0,$$

damit verschwindet der Term in der Mitte, so dass in der oberen relativen Mayer–Vietoris-Sequenz die Abbildung  $H_2(D, S) \rightarrow H_1(B \cap W, B_0 \cap W_0)$  injektiv ist. Die Exaktheit der Zeilen und Spalten im großen Diagramm liefert

$$\dim H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0) = N + 1.$$

Insbesondere ist  $\dim(H_1(B, B_0) \oplus H_1(W, W_0)) = \dim(H_1(B) \oplus H_1(W)) + 1$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**BEMERKUNG 3.2.5.** *Die Aussage, dass Hex in beliebigen Dimensionen immer genau einen Gewinner hat, ist äquivalent zum Brouwerschen Fixpunktsatz [Gal79].*

### 3.3. Abbildungsgrad

Die Theorie des Abbildungsgrades entsteht aus der Beobachtung, dass eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  einen Gruppenhomomorphismus  $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  induziert. Aus der Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 haben wir  $H_{\bullet+n}(S^n) \cong H_{\bullet}(\text{pt})$ . Im ganzen Abschnitt nehmen wir wieder an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie  $H_{\bullet}$  mit Koeffizienten  $H_{\bullet}(\text{pt}) = \mathbb{Z}$  gibt.

**DEFINITION 3.3.1** (Abbildungsgrad). *Der induzierte Gruppenhomomorphismus*

$$f_*: \mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

*ist notwendig von der Form  $f_*(m) = \deg(f) \cdot m$  für eine Zahl  $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ , den Abbildungsgrad von  $f$ .*

**LEMMA 3.3.2** (grundlegende Eigenschaften). *(1) Es gelten  $\deg(\text{id}) = 1$*

*und  $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$ .*

*(2) Wenn  $f \sim g$ , dann  $\deg(f) = \deg(g)$ .*

*(3) Insbesondere haben Homotopieäquivalenzen  $f: S^n \rightarrow S^n$  Grad  $\pm 1$ .*

*(4) Wenn  $f$  nicht surjektiv ist, dann ist  $\deg(f) = 0$ .*

**BEWEIS.** (1) ist die Funktorialität, (2) ist die Homotopieinvarianz. (3) folgt aus (1) und (2).

(4) Wenn  $f$  nicht surjektiv ist, faktorisiert  $f$  durch  $S^n \setminus \{x\} \hookrightarrow S^n$  für einen Punkt  $x \in S^n$ . Da  $S^n \setminus \{x\}$  zusammenziehbar ist, folgt  $H_n(S^n \setminus \{x\}) = 0$  und  $f_* = 0$ .  $\square$

Für die weitere Diskussion des Abbildungsgrades beweisen wir die folgende geometrische Interpretation der Addition von Homologieklassen.

**PROPOSITION 3.3.3.** *Wir betrachten die Abbildung (in der englischen Literatur “pinch map”), die den Äquator in  $S^n$  zu einem Punkt zusammenzieht:*

$$p: S^n \rightarrow S^n \vee S^n: \alpha_x(t) \mapsto \begin{cases} i_1(\alpha_x(2t)) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ i_2(\alpha_x(2t-1)) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

*Dabei sind  $i_1, i_2: S^n \hookrightarrow S^n \vee S^n$  die Inklusionen der Wedge-Summanden, und  $\alpha_x: [0, 1] \rightarrow S^n$  für  $x \in S^{n-1} \times \{0\} \setminus \{e_1\}$  parametrisiert den Kreis auf  $S^n$ , der in der Ebene durch  $x$ ,  $e_1$  und  $e_1 + e_{n+1}$  liegt (in konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, beginnend bei  $e_1$  in Richtung  $e_{n+1}$ ).*

*Für jeden topologischen Raum  $X$  und alle Abbildungen  $f, g: S^n \rightarrow X$  mit  $f(e_1) = g(e_1)$  gilt*

$$((f \vee g) \circ p)_* = f_* + g_*$$

*als Abbildungen  $H_n(S^n) \rightarrow H_n(X)$ .*

BEWEIS. Wir bezeichnen mit  $\text{pr}_i: S^n \vee S^n \rightarrow S^n$  die Abbildung, die den jeweils anderen Wedge-Summanden auf den Basispunkt schickt. Es gilt  $\text{pr}_1 \circ p \sim \text{id}_{S^n} \sim \text{pr}_2 \circ p$ , und die Abbildungen  $i_1 \circ \text{pr}_2$  und  $i_2 \circ \text{pr}_1$  sind konstant. Dann gilt

$$\begin{aligned} ((f \vee g) \circ p)_* &= (f \vee g)_* \circ (i_1)_* \circ (\text{pr}_1)_* \circ (p)_* \\ &\quad + (f \vee g)_* \circ (i_2)_* \circ (\text{pr}_2)_* \circ (p)_* \\ &= ((f \vee g) \circ i_1)_* \circ (\text{pr}_1 \circ p)_* \\ &\quad + ((f \vee g) \circ i_2)_* \circ (\text{pr}_2 \circ p)_* \\ &= (f)_* + (g)_*. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird das Wedge-Axiom angewendet, dann die Funktorialität und zum Schluss die Homotopieinvarianz.  $\square$

KOROLLAR 3.3.4. *Sei*

$$r_j: S^n \rightarrow S^n: (x_1, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$$

die Spiegelung an der  $j$ -ten Koordinatenhyperebene in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dann ist  $\deg(r_j) = -1$ . Insbesondere ist der Grad der Antipodenabbildung  $\deg(-\text{id}_{S^n}) = (-1)^{n+1}$ .

BEWEIS. Das Austauschen der zweiten und  $n$ -ten Koordinate ist ein Homöomorphismus. Nach Lemma 3.3.2 reicht es also zu zeigen, dass  $r_2$  Grad  $-1$  hat. Beweis durch Induktion über  $n$ . Auf  $S^1$  ist die Komposition  $(\text{id}_{S^1} \vee r_2) \circ p$  der Pinch-Abbildung  $p$  aus Proposition 3.3.3 und der Wedge-Summe aus Identität und Spiegelung null-homotop. Also haben wir, zusammen mit Proposition 3.3.3

$$((\text{id}_{S^1} \vee r_2) \circ p)_* = (\text{id}_{S^1})_* + (r_2)_* = 0$$

als Abbildungen  $H_1(S^1) \rightarrow H_1(X)$ . Im Induktionsschritt nehmen wir jetzt an, dass die Behauptung für  $r_2$  auf  $S^{n-1}$  gilt. Die Einhängung von  $r_2$  auf  $S^{n-1}$  ist  $r_2$  auf  $S^n$ . Die Behauptung, dass der Grad von  $r_2$  auf  $S^n$  gilt, folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}, e_1) & \xrightarrow[\cong]{\Sigma} & H_n(S^n, e_1) & \xleftarrow[\cong]{} & H_n(S^n) \\ H_{n-1}(r_2) \downarrow & & H_{n-1}(r_2) \downarrow & & \downarrow H_n(r_2) & & \downarrow H_n(r_2) \\ H_{n-1}(S^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(S^{n-1}, e_1) & \xrightarrow[\cong]{\Sigma} & H_n(S^n, e_1) & \xleftarrow[\cong]{} & H_n(S^n) \end{array}$$

Die Kommutativität dieses Diagramms folgt aus der Natürlichkeit der Einhängungs-isomorphismen bzw. des Vergleichs zwischen unreduzierter und reduzierter Kohomologie.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.5. (1) *Wir realisieren  $S^1$  als  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .*

*Zeigen Sie, dass der Grad der Abbildung  $f_d: S^1 \rightarrow S^1: z \mapsto z^d$  gleich  $d$  ist.*

(2) *Wir bezeichnen mit  $\Sigma^{n-1} f_d: S^n \rightarrow S^n$  die  $n-1$ -te Einhängung von  $f_d$ . Zeigen Sie:  $\deg(\Sigma^{n-1} f_d) = d$ .*

(3) *Folgern Sie, dass die Gradabbildung  $\deg: [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$  surjektiv ist. Dabei bezeichnet  $[S^n, S^n]$  die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^n$ .*

PROPOSITION 3.3.6 (Satz vom Igel). *Auf der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $S^n$  gibt es genau dann ein nullstellenfreies stetiges Vektorfeld, wenn  $n$  ungerade ist.*

BEWEIS. Wir betrachten  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Ein Vektorfeld ist eine stetige Abbildung, die jedem Punkt  $x \in S^n$  einen Tangentialvektor  $v(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $v(x) \perp x$  zuordnet. Wenn das Vektorfeld nullstellenfrei ist, haben wir  $v(x) \neq 0$  für alle  $x \in S^n$  und wir können alle Vektoren durch  $\frac{v(x)}{|v(x)|}$  auf Länge 1 normieren. Wegen  $x \perp v(x)$  spannen die beiden Vektoren eine Ebene auf. In dieser Ebene ist  $x \cdot \cos t + v(x) \cdot \sin t$  ein

Einheitskreis, auf dem  $x$  und  $v(x)$  liegen. Wir erhalten eine Homotopie  $H_t(x) = x \cdot \cos(\pi t) + v(x) \cdot \sin(\pi t)$  zwischen der Identität und der Antipodenabbildung  $-\text{id}$ . Nach Lemma 3.3.2 folgt  $1 = \deg(\text{id}) = \deg(-\text{id})$ . Nach Proposition 3.3.4 ist  $\deg(-\text{id}) = (-1)^{n+1}$ . Also muss  $n$  ungerade sein.

Für  $n = 2k - 1$  ungerade schreiben wir einfach ein Vektorfeld hin:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass  $x \perp v(x)$  und  $|v(x)| = 1$ .  $\square$

LEMMA 3.3.7. *Eine fixpunktfreie Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  hat Grad  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ .*

BEWEIS. Wenn  $f(x) \neq x$ , dann geht die Strecke (im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) zwischen  $f(x)$  und  $-x$ , parametrisiert durch  $(1-t)f(x) - tx$ ,  $t \in [0, 1]$ , nicht durch den Ursprung. Insbesondere definiert

$$H(x) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$$

für eine fixpunktfreie Abbildung  $f$  eine Homotopie zwischen  $f$  und der Antipodenabbildung. Die Aussage folgt aus Korollar 3.3.4.  $\square$

KOROLLAR 3.3.8. *Wenn  $G$  eine (nichttriviale) Gruppe ist, die frei auf  $S^{2n}$  wirkt, dann ist  $G = C_2$ .*

BEWEIS. Der Grad eines Homöomorphismus ist  $\pm 1$ , also induziert eine Gruppenwirkung allgemein einen Homomorphismus  $\deg: G \rightarrow C_2$ , cf. Lemma 3.3.2 (1). Eine fixpunktfreie Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  erfüllt  $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ . Wenn  $n$  gerade ist, ist also der Gradhomomorphismus injektiv.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.9. *Sei  $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es einen Punkt  $x \in S^{2n}$  gibt, so dass  $f(x) = x$  oder  $f(x) = -x$  gilt ( $f$  und  $-f$  können nicht gleichzeitig fixpunktfrei sein). Folgern Sie, dass jede Abbildung  $f: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$  einen Fixpunkt hat. Geben Sie ein Beispiel für eine fixpunktfreie Abbildung  $\mathbb{R}P^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n-1}$  an (Hinweis: lineare Abbildungen ohne Eigenvektoren).*

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.10. *Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine invertierbare lineare Abbildung mit darstellender Matrix  $M_f$ . Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung  $f_*$  auf  $\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  genau*

- $\text{id}_{\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$  ist, wenn  $\det M_f > 0$  ist, und
- $-\text{id}_{\tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$  ist, wenn  $\det M_f < 0$  ist.

(Hinweis: Gauß-Algorithmus)

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.11. *Für ungerades  $n$  ist  $\mathbb{R}^n$  nicht homöomorph zu einem Produkt  $X \times X$ . (Argument nach R. Fokkink, in Hatcher's "More exercises in algebraic topology") Ergänzen Sie die fehlenden Argumente.*

*Wir erweitern den Gradbegriff auf Homöomorphismen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  und definieren  $\deg f$  als Grad der Erweiterung von  $f$  auf  $\bar{f}: S^n \rightarrow S^n$  mit  $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ .*

*Wenn  $\mathbb{R}^n \cong X \times X$ , dann erhalten wir durch*

$$X^{\times 4} \rightarrow X^{\times 4}: (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_1)$$

*einen Homöomorphismus auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Da  $f^2$  die beiden Faktoren vertauscht, ist  $\deg f = -1$ , wenn  $n$  ungerade ist. Aber  $\deg(f^2) = (\deg f)^2 = 1$ .*

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.12. *Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}^{2n+1}$  für  $n > 0$  nicht die Struktur einer Divisionsalgebra haben kann. (Hinweis: Betrachten Sie für  $a \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$  die Abbildungsgrade für  $x \mapsto ax$  und  $x \mapsto -ax$ , und benutzen Sie, dass  $\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$  wegzusammenhängend ist.)*

DEFINITION 3.3.13. Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung und  $q \in f^{-1}(p)$  ein isolierter Punkt. Sei  $U$  eine Umgebung von  $q$  und  $V$  eine Umgebung von  $p$ , so dass  $f(U) \subset V$ . Die Abbildung  $f$  induziert einen Homomorphismus

$$\mathbb{Z} \cong H_n(U, U \setminus \{q\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$$

von lokalen Homologiegruppen. Dieser Homomorphismus ist Multiplikation mit einer ganzen Zahl  $\deg(f; q)$ , diese heißt der lokale Grad von  $f$  am Punkt  $q$ .

PROPOSITION 3.3.14. Sei  $f: S^n \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung und sei  $p \in S^n$  ein Punkt, so dass  $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$  eine diskrete Menge endlicher isolierter Punkte ist. Dann gilt

$$\deg f = \sum_i \deg(f; q_i).$$

BEWEIS. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm langer exakter Sequenzen (für Raumpaare)

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S^n \setminus f^{-1}(p)) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^n \setminus f^{-1}(p)) \\ f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(S^n \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H_n(S^n) & \xrightarrow{j_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{p\}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(S^n \setminus \{p\}) \end{array}$$

In der rechten Spalte haben wir  $H_{n-1}(S^n \setminus \{p\}) = 0$ , da  $S^n \setminus \{p\}$  zusammenziehbar ist. In der linken Spalte verschwindet der untere Eintrag aus demselben Grund, und  $H_n(S^n \setminus f^{-1}(p)) = 0$ , da  $S^n \setminus f^{-1}(p)$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n \setminus \{q_1, \dots, q_{m-1}\}$  ist und wir die Rechnungen aus Übungsaufgabe 3.1.13 anwenden können. Insbesondere ist dadurch  $j_*$  in der unteren Zeile ein Isomorphismus. Wir können  $\deg f$  am zweiten vertikalen Morphismus ablesen, der nach Kommutativität mit der Komposition

$$H_n(S^n) \xrightarrow{j_*} H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n \setminus \{p\})$$

übereinstimmt. Wir wählen eine offene zusammenziehbare Umgebung  $V$  von  $p$ , so dass  $f^{-1}(V) = \sqcup_{i=1}^m U_i$ . Mit Ausschneidung und Additivität identifizieren wir

$$H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(p)) \cong \bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus \{q_i\}).$$

Der lokale Grad kann aus  $H_n(U_i, U_i \setminus \{q_i\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\})$  abgelesen werden, und die Behauptung folgt aus Additivität.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.3.15 (Fundamentalsatz der Algebra). Zeigen Sie in folgenden Schritten, dass jedes reelle Polynom  $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$  eine komplexe Nullstelle hat.

- (1) Wenn  $f$  keine komplexe Nullstelle hat, dann definiert  $f$  eine Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .
- (2) Sei  $R > |a_1| + \dots + |a_{n-1}|$ . Zeigen Sie, dass  $g_s: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}: \exp 2\pi i t \mapsto f(sR \exp 2\pi i t)$  eine Homotopie zwischen  $f|_{\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}}$  und einer konstanten Abbildung definiert.
- (3) Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen  $f|_{\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}}$  und  $z \mapsto z^n$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=R\}$ .
- (4) Folgern Sie, dass  $n = 0$  gelten muss.

BEMERKUNG 3.3.16. In der Knotentheorie werden Einbettungen  $\iota: S^1 \hookrightarrow S^3$  untersucht. Wichtige Invarianten kann man z.B. aus der Fundamentalgruppe des Komplements  $S^3 \setminus \iota(S^1)$  erhalten. Allerdings sehen wir aus dem verallgemeinerten Jordanschen Kurvensatz (s. Proposition 5.5.1), dass die Homologie des Komplements isomorph zur Homologie von  $S^1$  ist, unabhängig vom Knoten. Mit Homologie

können wir dann aber einfache Invarianten erhalten, um Schlingen zu unterscheiden. Eine Schlinge mit zwei Komponenten ist eine Einbettung  $\iota: S^1 \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$ , wir bezeichnen die beiden Schleifen mit  $\iota_1$  und  $\iota_2$ . Da  $H_\bullet(S^3 \setminus \iota_1(S^1)) \cong H_\bullet(S^1)$ , induziert  $\iota_2$  eine Abbildung

$$(\iota_2)_*: \mathbb{Z} \cong H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^3 \setminus \iota_1(S^1)) \cong \mathbb{Z},$$

wir haben also wieder einen Abbildungsgrad. In der konkreten Situation heißt dieser Grad Verschlingungszahl. Die Verschlingungszahl für die Hopf-Schlinge ist  $\pm 1$  (je nach Orientierung), also ist die Hopf-Schlinge nicht isotop zur trivialen Verschlingung. Ein Beispiel für eine nicht-triviale Verschlingung mit Verschlingungszahl 0 ist die Whitehead-Verschlingung.

Sperner-Lemma und Fairteilung (fair division)

### 3.4. Zelluläre Homologie

BEISPIEL 3.4.1. Wir betrachten eine gewöhnliche Homologietheorie  $H_\bullet$  mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten und wollen die Homologie  $H_\bullet(\mathbb{T}^2)$  des 2-Torus berechnen. Dazu benutzen wir die Mayer-Vietoris-Sequenz und den Abbildungsgrad. Wir benutzen die CW-Struktur von  $\mathbb{T}^2$  aus Beispiel 2.2.3, mit einer 0-Zelle, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle.

Wir überdecken den Torus durch eine Kreisscheibe  $U$  und das Komplement  $V$  einer in  $U$  enthaltenen Kreisscheibe. Dann ist  $U$  zusammenziehbar,  $V$  enthält das 1-Skelett  $S^1 \vee S^1$  als Deformationsretrakt und  $U \cap V$  ist homotopieäquivalent zu  $S^1$  (z.B. realisiert als Rand der Kreisscheibe  $U$ ). Nach Übungsaufgabe 3.1.12 und dem Wedge-Axiom haben wir

$$\begin{aligned} H_i(U) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ H_i(U \cap V) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ H_i(V) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Homologie von  $U$ ,  $V$  und  $U \cap V$  nur in Graden 0 und 1 konzentriert ist, reduziert sich die Mayer-Vietoris-Sequenz für die Überdeckung  $\mathbb{T}^2 = U \cup V$  auf die folgende Form:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & 0 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & H_2(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{\partial} & H_1(U \cap V) & \xrightarrow{i} & H_1(U) \oplus H_1(V) \longrightarrow H_1(\mathbb{T}^2) \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & H_0(U \cap V) & \xrightarrow{j} & H_0(U) \oplus H_0(V) & \longrightarrow & H_0(\mathbb{T}^2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Um die Homologie von  $\mathbb{T}^2$  auszurechnen, müssen wir die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} j: \mathbb{Z} \cong H_0(U \cap V) &\rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ i: \mathbb{Z} \cong H_1(U \cap V) &\rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

verstehen.

- Die Abbildung  $j$  ist einfacher: Wir wählen einen Basispunkt  $x \in U \cap V$ . Die Inklusion  $\{x\} \rightarrow U \cap V$  bzw.  $\{x\} \rightarrow U$  induziert die Isomorphismen  $\mathbb{Z} \cong H_0(U \cap V)$  und  $\mathbb{Z} \cong H_0(U)$ , cf. Lemma 3.1.5 und Übungsaufgabe 3.1.12. Mit diesen Identifikationen ist die Komposition

$$\mathbb{Z} \cong H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \cong \mathbb{Z}$$

die Identität. Dasselbe gilt für  $V$ , sodass die Komposition

$$j: \mathbb{Z} \rightarrow H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

genau die durch  $1 \mapsto (1, 1)$  gegebene Diagonaleinbettung ist.

- Um die Abbildung  $i: \mathbb{Z} \cong H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  zu identifizieren, benötigen wir den Abbildungsgrad. Die Abbildung  $f: S^1 \sim U \cap V \rightarrow V \sim S^1 \vee S^1$  können wir wie folgt beschreiben: wenn wir die beiden Schleifen von  $S^1 \vee S^1$  mit  $a$  bzw.  $b$  bezeichnen, ist die Abbildung durch  $aba^{-1}b^{-1}$  gegeben. Die Kompositionen  $S^1 \xrightarrow{f} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\text{pr}_i} S^1$  mit den Projektionen aus Proposition 3.3.3 haben dann Grad 0, da die relevante Schleife ( $a$  für  $i = 1$ ,  $b$  für  $i = 2$ ) jeweils einmal in positiver und einmal in negativer Richtung durchlaufen wird. Also ist

$$i: H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(U) \oplus H_1(V)$$

die Nullabbildung.

Aus der Mayer–Vietoris-Sequenz erhalten wir dann die folgenden Aussagen. Die Abbildung  $j$  ist injektiv, also ist der Kokern  $\mathbb{Z}$  und die Abbildung  $H_1(\mathbb{T}^2) \xrightarrow{\partial} H_0(U \cap V)$  ist die Nullabbildung. Damit ist  $H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$  surjektiv. Da  $i: H_1(U \cap V) \rightarrow H_1(V)$  die Nullabbildung ist, sind die Abbildungen  $H_1(U) \oplus H_1(V) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2)$  und  $\partial: H_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_1(U \cap V)$  Isomorphismen. Wir erhalten also die Homologie des Torus:

$$H_i(\mathbb{T}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

**ÜBUNGSAUFGABE 3.4.2.** Berechnen Sie für eine gewöhnliche Homologietheorie  $H_\bullet$  mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten die Homologie von  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , der Kleinschen Flasche und einer kompakten orientierten Fläche von Geschlecht  $g$  (Bsp. 2.2.3 der Vorlesung) mit der Mayer–Vietoris-Sequenz (analog zum Beispiel  $\mathbb{T}^2$  aus der Vorlesung).

(Hinweis: Wir erhalten die Kleinsche Flasche durch Ankleben einer 2-Zelle an  $S^1 \vee S^1$ , im Gegensatz zum Torus benutzen wir aber statt der Schleife  $aba^{-1}b^{-1}$  die Schleife  $aba^{-1}b$  als Anklebeabbildung.)

Wir wollen die Methode aus Beispiel 3.4.1 auf CW-Komplexe verallgemeinern.

**LEMMA 3.4.3.** Sei  $X$  ein CW-Komplex.

(1)

$$H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \begin{cases} 0 & k \neq n \\ \mathbb{Z}\{n\text{-Zellen von } X\} & k = n \end{cases}$$

(2) Für  $k > n$  gilt  $H_k(X^{(n)}) = 0$ .

(3) Für  $k < n$  induziert die Inklusion  $\iota: X^{(n)} \hookrightarrow X$  Isomorphismen

$$\iota_*: H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X).$$

**BEWEIS.** (1) Nach Proposition 2.2.12 können wir für ein CW-Paar  $(X, A)$  eine Umgebung von  $A$  in  $X$  konstruieren, die auf  $A$  retrahiert. Nach Bemerkung 3.1.7 ist  $H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)}) = \tilde{H}_k(X^{(n)}/X^{(n-1)})$ . Wegen  $X^{(n)}/X^{(n-1)} \cong \bigvee_{n\text{-Zellen von } X} S^n$ ,

folgt die Behauptung aus dem Wedge-Axiom und dem Einhängungsisomorphismus 3.1.12.

Wir betrachten die lange exakte Sequenz für das Paar  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ :

$$H_{k+1}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n-1)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}) \rightarrow H_k(X^{(n)}, X^{(n-1)})$$

Für  $k \notin \{n, n-1\}$  verschwinden die äußeren Gruppen und wir haben Isomorphismen  $H_k(X^{(n-1)}) \cong H_k(X^{(n)})$ . Daraus folgt (2), ebenso (3) wenn  $X$  endlich-dimensional ist.

Zu diskutieren bleibt der allgemeine Fall in (3). Nach der langen exakten Sequenz für das Paar  $(X, X^{(n)})$  reicht es,  $H_k(X, X^{(n)}) \cong H_k(X/X^{(n)}) = 0$  für  $k \leq n$  zu zeigen. Dafür zeigen wir, dass  $\tilde{H}_k(X) = 0$  für  $k \leq n$  und einen CW-Komplex, dessen  $n$ -Skelett ein Punkt ist.

Wir betrachten den Produktkomplex  $X \times [0, \infty)$  mit der Produkt-CW-Struktur, wobei  $[0, \infty)$  die CW-Struktur mit natürlichen Zahlen als 0-Zellen trägt. Wir betrachten den Unterkomplex  $T = \bigcup_i X^{(i)} \times [i, \infty)$  und wollen zeigen, dass  $T$  ein Deformationsretrakt von  $X \times [0, \infty)$  ist. Dafür setzen wir  $Y_i = T \cup (X \times [i, \infty))$ . Da  $X \times [i, i+1]$  auf  $X^{(i)} \times [i, i+1] \cup X \times \{i+1\}$  deformationsretrahiert werden kann, kann  $Y_i$  auf  $Y_{i+1}$  deformationsretrahiert werden, cf. Übungsaufgabe 2.2.13. Nun können wir diese Deformationsretraktionen zusammenfassen: die Retraktion von  $Y_i$  auf  $Y_{i+1}$  wird im Zeitintervall  $[1 - \frac{1}{2^i}, 1 - \frac{1}{2^{i+1}}]$  durchgeführt. Dies liefert eine Deformationsretraktion von  $X \times [0, \infty)$  auf  $T$ , die ab dem Zeitpunkt  $1 - \frac{1}{2^{i+1}}$  konstant auf  $X^{(i)} \times [0, \infty)$  ist. (Stetigkeit!) Damit sind  $X$  und  $T$  homotopieäquivalent, und wir müssen noch  $\tilde{H}_k(T) = 0$  für  $k \leq n$  zeigen.

Nach Annahme ist  $X^{(0)}$  ein Punkt. Wir betrachten  $R = X^{(0)} \times [0, \infty) \subset T$  und definieren

$$Z := R \cup \bigcup_i X^{(i)} \times \{i\}.$$

Dann ist  $Z/R \cong \bigvee_i X^{(i)}$ . Aus dem bereits diskutierten endlich-dimensionalen Fall und dem Wedge-Axiom folgt  $\tilde{H}_k(Z/R) = 0$  für  $k \leq n$ . Da  $R$  zusammenziehbar ist, folgt aus der langen exakten Sequenz  $\tilde{H}_k(Z) = 0$  für  $k \leq n$ . Der Quotient  $T/Z \cong \bigvee_i (\Sigma X^{(i)}/X^{(0)} \times [i, i+1])$  ist eine Wedge-Summe endlich-dimensionaler Komplexe, deren  $(n+1)$ -Skelett jeweils ein Punkt ist. Also folgt  $\tilde{H}_k(T/Z) = 0$  für  $k \leq n+1$ , und aus der langen exakten Sequenz folgt die Behauptung  $\tilde{H}_k(T) = 0$  für  $k \leq n$ .  $\square$

DEFINITION 3.4.4 (zellulärer Komplex, zelluläre Homologie). *Sei  $X$  ein CW-Komplex. Aus Lemma 3.4.3 haben wir ein Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n+1)}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n)}) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \\
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \nearrow \\
 & & & & & & H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \\
 & & & & & & \nearrow \\
 \dots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

in dem die aufsteigende Sequenz ein Teil der langen exakten Sequenz für das Paar  $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$  ist und die absteigende Sequenz ein Teil der langen exakten Sequenz

für das Paar  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  ist. Wir definieren allgemein Abbildungen

$$d_{n+1} := j_n \circ \partial_{n+1}: H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \rightarrow H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}).$$

Aus der langen exakten Sequenz für das Paar  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  folgt, dass die Komposition

$$H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)})$$

gleich Null ist, und damit haben wir

$$d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ \partial_n \circ j_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Wenn wir eine gewöhnliche Homologietheorie  $H_n$  mit Koeffizientenring  $R = H_0(\text{pt})$  einsetzen, erhalten wir also einen Komplex von  $R$ -Moduln, den zellulären Komplex von  $X$ . Wir definieren die zelluläre Homologie von  $X$ , Notation  $H_n^{\text{CW}}(X)$ , als die Homologie dieses Komplexes (s. Anhang A.3)

**ÜBUNGSAUFGABE 3.4.5.** Sei  $H_\bullet$  eine gewöhnliche Homologietheorie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten und  $X$  ein endlicher CW-Komplex. Zeigen Sie, dass  $H_0(X)$  isomorph zur freien abelschen Gruppe auf der Menge der Zusammenhangskomponenten von  $X$  ist.

**BEISPIEL 3.4.6.** Wir betrachten nochmal das Beispiel  $X = \mathbb{T}^2$ . Der zelluläre Komplex hat die Form

$$\begin{array}{ccccc} H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) & \xrightarrow{d_2} & H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) & \xrightarrow{d_1} & H_0(X^{(0)}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Die Abbildung  $\mathbb{Z} \rightarrow H_2(X^{(2)}, X^{(1)}) \rightarrow H_1(X^{(1)}, X^{(0)})$  ist direkt induziert von der Abbildung  $S^1 \cong \partial D^2 \rightarrow X^{(1)} \sim S^1 \vee S^1$ . Aus Beispiel 3.4.1 folgt dann  $d_2 = 0$ . Die Abbildung  $d_1$  ist nichts anderes als die Randabbildung  $\partial_1: H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \rightarrow H_0(X^{(0)})$ . In unserem Fall haben sowohl  $X^{(0)}$  als auch  $X^{(1)}$  als 0-Skelett einen einzelnen Punkt, aus Lemma 3.4.3 folgt  $\tilde{H}_0(X^{(0)}) = \tilde{H}_0(X^{(1)}) = 0$ , oder äquivalent  $H_0(X^{(0)}) \cong H_0(X^{(1)}) \cong \mathbb{Z}$  (wobei der Isomorphismus durch die Inklusion  $X^{(0)} \hookrightarrow X^{(1)}$  induziert wird). Nach der langen exakten Sequenz

$$H_1(X^{(1)}, X^{(0)}) \xrightarrow{\partial_1} H_0(X^{(0)}) \xrightarrow{\cong} H_0(X^{(1)})$$

ist also auch  $d_1 = 0$ . Wir sehen, dass  $H_\bullet^{\text{CW}}(\mathbb{T}^2) \cong H_\bullet(\mathbb{T}^2)$  für eine beliebige gewöhnliche Homologietheorie.  $\square$

**SATZ 3.4.7.** Es gibt Isomorphismen  $H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{CW}}(X)$ .

**BEWEIS.** Wir betrachten die lange exakte Sequenz für das Paar  $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ :

$$H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X^{(n)}) \rightarrow H_n(X^{(n+1)}) \rightarrow 0$$

Mit Lemma 3.4.3 folgt  $H_n(X) \cong H_n(X^{(n+1)}) \cong H_n(X^{(n)}) / \text{Im}(\partial_{n+1})$ . Analog können wir die lange exakte Sequenz für das Paar  $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  betrachten:

$$0 \rightarrow H_n(X^{(n)}) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{(n-1)})$$

Da  $j_n$  injektiv ist, haben wir induzierte Isomorphismen  $j_n: \text{Im}(\partial_{n+1}) \rightarrow \text{Im}(j_n \circ \partial_{n+1}) = \text{Im}(d_{n+1})$  und  $j_n: H_n(X^{(n)}) \rightarrow \text{Im}(j_n) = \ker(\partial_n)$ . Zuletzt folgt aus der langen exakten Sequenz für das Paar  $(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  und Lemma 3.4.3, dass  $j_{n-1}$  injektiv ist und damit  $\ker \partial_n = \ker d_n$ . Wir bekommen zusammenfassend einen induzierten Isomorphismus

$$j_n: H_n(X) \cong H_n(X^{(n)}) / \text{Im}(\partial_{n+1}) \xrightarrow{\cong} \ker d_n / \text{Im} d_{n+1}. \quad \square$$

PROPOSITION 3.4.8. *Sei  $X$  ein CW-Komplex. Die Randabbildung  $d_n$  im zellulären Komplex für  $X$  ist wie folgt gegeben:*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} \deg(\Delta_{\alpha,\beta}) e_\beta^{n-1},$$

wobei

$$\Delta_{\alpha,\beta}: S_\alpha^{n-1} \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{(n-1)} \xrightarrow{q} X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \xrightarrow{q_\beta} S_\beta^{n-1}$$

die Komposition der Anklebeabbildung  $\phi_\alpha: S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$  sowie der Quotientenabbildungen  $q: X^{(n-1)} \rightarrow X^{(n-1)}/X^{(n-2)}$  sowie

$$q_\beta: X^{(n-1)}/X^{(n-2)} \rightarrow X^{(n-1)}/(X^{(n-1)} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1}$$

ist.

BEWEIS. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & \tilde{H}_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{(\Delta_{\alpha,\beta})_*} & \tilde{H}_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ (\Phi_\alpha)_* \downarrow & & \downarrow (\phi_\alpha)_* & & \uparrow (q_\beta)_* \\ H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & \tilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)}) & \longrightarrow & \underline{H}_{n-1}(X^{(n-1)}/X^{(n-2)}, X^{(n-2)}/X^{(n-2)}) \end{array}$$

Hier ist  $\Phi_\alpha$  die charakteristische Abbildung der Zelle  $D_\alpha^n$ . Das linke obere Quadrat kommutiert wegen Natürlichkeit der langen exakten Sequenz für Paare, das Dreieck links unten nach Definition von  $d_n$ . Das rechte obere Quadrat kommutiert nach Definition von  $\Delta_{\alpha,\beta}$ , und das rechte untere Quadrat nach Natürlichkeit der Identifikationen  $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ , cf. Bemerkung 3.1.7.

In  $H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  wählen wir die Basis von Zellen  $e_\alpha^n$  als Bild (unter  $(\Phi_\alpha)_*$ ) eines gewählten Erzeugers  $[D_\alpha^n] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \cong \mathbb{Z}$ . Die Kommutativität der linken Hälfte des Diagramms bedeutet

$$d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \circ (\phi_\alpha)_* \circ \partial[D_\alpha^n].$$

Nach Wahl der Basis in  $H_{n-1}(X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$  ist die Abbildung  $(q_\beta)_*$  einfach die Projektion auf den Summanden, der von  $e_\beta^{n-1}$  erzeugt wird. Die Kommutativität der rechten Hälfte des Diagramms impliziert die Behauptung.  $\square$

KOROLLAR 3.4.9. *Sei  $\psi: H_\bullet \rightarrow K_\bullet$  eine natürliche Transformation von un-reduzierten gewöhnlichen Homologietheorien (mit Koeffizienten in einem Ring  $R$ ). Wenn  $\psi: H_0(\text{pt}) \rightarrow K_0(\text{pt})$  ein Isomorphismus ist, dann ist  $\psi: H_\bullet(X) \rightarrow K_\bullet(X)$  ein Isomorphismus für alle CW-Komplexe  $X$ .*

BEWEIS. Nach Satz 3.4.7 haben wir für einen CW-Komplex  $X$  Isomorphismen  $H_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} H_\bullet^{\text{CW}}(X)$  und  $K_\bullet(X) \xrightarrow{\cong} K_\bullet^{\text{CW}}(X)$ . Es bleibt zu zeigen, dass die zellulären Komplexe für beide Theorien natürlich isomorph sind. Nach Definition 3.4.4 sind die Einträge der Komplexe direkte Summen von Kopien von  $R$ , deren Indexmenge die Zellen von  $X$  sind, insbesondere unabhängig von der Kohomologietheorie. Nach 3.1.12 induziert der Isomorphismus  $\psi: H_0(\text{pt}) \cong K_0(\text{pt})$  einen Isomorphismus  $\psi: H_n(S^n) \rightarrow K_n(S^n)$ . Insbesondere induziert  $\psi$  für alle  $n$  Isomorphismen

$$\bigoplus_{n\text{-Zellen von } X} R \cong H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\cong} K_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \bigoplus_{n\text{-Zellen von } X} R.$$

Die Differentiale für die zellulären Komplexe können wir mit Proposition 3.4.8 durch Abbildungsgrade für Anklebeabbildungen bestimmen. Die Natürlichkeit von  $\psi$  impliziert die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ K_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & K_n(S^n) \end{array}$$

für jede Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$ . Dies bedeutet, dass die Abbildungsgrade in beiden Theorien übereinstimmen, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**BEMERKUNG 3.4.10.** *Tatsächlich ist eine deutlich stärkere Aussage wahr: Bis auf natürlichen Isomorphismus gibt es nur eine unreduzierte Homologietheorie mit  $H_0(\text{pt}) \cong A$ . Die natürliche Transformation wird nicht gebraucht. Für den Beweis der stärkeren Aussage werden allerdings zwei wichtige Zutaten benötigt, die im Moment noch nicht verfügbar sind:*

- Auf der einen Seite würden wir gern für beliebige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen auch natürliche Homomorphismen auf den zellulären Komplexen definieren. Das geht allerdings nur für zelluläre Abbildungen, d.h.  $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ . Nach dem Satz über zelluläre Approximation ist jede stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen homotop zu einer zellulären Abbildung, der Beweis dieses Satzes ist allerdings etwas umfangreicher, s. Satz 7.3.14.
- Auf der anderen Seite haben wir die Transformation benutzt, um den Abbildungsgrad in beiden Theorien zu identifizieren. Tatsächlich folgt aus dem Einhängungssatz von Freudenthal oder dem Satz von Hurewicz  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , so dass die Homotopieklasse einer Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  schon durch den Grad eindeutig bestimmt ist. Die Identifikation der Abbildungsgrade in beiden Theorien folgt dann aus den Rechnungen in Abschnitt 3.3. Beide Sätze benötigen aber auch wieder etwas mehr an Homotopietheorie, s. Satz 7.4.1 und Korollar 7.4.3 sowie Satz 7.5.1.

**BEISPIEL 3.4.11.** *Wir berechnen die Homologie der projektiven Räume. Der Fall  $X = \mathbb{C}P^n$  ist einfach: aus Beispiel 2.2.5 haben wir eine CW-Struktur mit je einer  $2k$ -Zelle für  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Damit ist  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = 0$  für  $k$  ungerade, also können die Randabbildungen nur 0 sein und wir haben*

$$H_k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k \in \{0, \dots, 2n\} \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den reell-projektiven Raum  $X = \mathbb{R}P^n$  müssen wir etwas mehr arbeiten. Hier haben wir je eine  $k$ -Zelle für  $k \in \{0, \dots, n\}$ , also ist in diesen Dimensionen  $H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = \mathbb{Z}$ . Die Anklebeabbildung für die  $k$ -Zelle ist die Projektion  $S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}$ . Wir berechnen den Grad der Komposition

$$S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \cong S^{k-1}.$$

Die Einschränkung dieser Abbildung auf die offene Nord- bzw. Südhälfte ist ein Homöomorphismus, und beide Homöomorphismen unterscheiden sich genau durch die Antipodenabbildung. Nach Korollar 3.3.4 ist der Grad der Antipodenabbildung  $(-1)^k$ , und damit ist der Grad der Komposition  $1 + (-1)^k$ . Damit ist der zelluläre Komplex für  $\mathbb{R}P^n$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{?} \mathbb{Z} \rightarrow \dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

wobei ? für ungerades  $n$  die Nullabbildung und für gerades  $n$  Multiplikation mit 2 ist. Wir erhalten

$$H_k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0 \text{ und } k = n \text{ ungerade} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & 0 < k < n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

□

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.12. Eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  heißt gerade, wenn für alle  $x \in S^n$  gilt  $f(x) = f(-x)$ . Zeigen Sie, dass eine gerade Abbildung geraden Grad hat. Wenn  $n$  gerade ist, ist der Grad 0. (Hinweis: Benutzen Sie die Berechnung der Homologie von  $\mathbb{R}P^n$ .)

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.13. Berechnen Sie die zelluläre Homologie des  $n$ -Torus  $T^n \cong (S^1)^{\times n}$ .

ÜBUNGSAUFGABE 3.4.14. Berechnen Sie die zelluläre Homologie einer orientierten geschlossenen Fläche aus Beispiel 2.2.3.

BEISPIEL 3.4.15. Linsenraum? □

BEMERKUNG 3.4.16. Beispiel inverse Kinematik aus [Ghr14, Abschnitt 4.11]. Wir betrachten einen idealisierten Roboterarm mit  $n$  Drehgelenken, die jeweils um eine feste Achse gedreht werden können. Für jedes der  $n$  Drehgelenke haben wir also einen Konfigurationsraum  $S^1$ , gegeben durch die Winkelkoordinate. Der Konfigurationsraum des gesamten Roboterarms ist dann  $T^n$ . Zu jedem Punkt  $x \in T^n$  des Konfigurationsraums, also zu jedem vorgegebenen Tupel von Drehwinkeln für die  $n$  Gelenke, haben wir eine zugeordnete Drehung des vom Roboterarm gehaltenen Bauteils. Dies liefert die kinematische Abbildung  $\kappa: T^n \rightarrow \text{SO}(3)$ , hierbei bezeichnet  $\text{SO}(3)$  die spezielle orthogonale Gruppe der orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen des  $\mathbb{R}^3$ . Die Frage, ob eine vorgegebene Orientierung des Bauteils im Raum durch eine Sequenz von Drehungen der Gelenke realisierbar ist, ist die Frage nach einem stetigen Schnitt der kinematischen Abbildung  $\kappa$ .

Wir können mit Homologie begründen, warum ein solcher stetiger Schnitt  $\kappa$  nicht existieren kann. Zuerst konstruieren wir einen Homöomorphismus  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ . Die Abbildung  $\phi: D^3 \rightarrow \text{SO}(3)$  bildet einen Punkt  $x$  auf die Rotation um den Winkel  $|x|\pi$  um die durch  $x$  aufgespannte Rotationsachse ab. Diese Abbildung schickt den Ursprung auf die Identität und bildet Antipodenpunkte  $x$  und  $-x$  in  $\partial D^3$  auf die gleiche Rotation ab. Insbesondere induziert  $\phi$  eine Abbildung  $\bar{\phi}: \mathbb{R}P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ , siehe Beispiel 2.2.5 für die Zellstruktur von  $\mathbb{R}P^3$  aus. Es ist nicht schwer zu sehen, dass  $\bar{\phi}$  ein Homöomorphismus ist. Damit kennen wir jetzt auch die Homologie von  $\text{SO}(3)$ .

Wir nehmen nun an, dass ein stetiger Schnitt  $\sigma: \text{SO}(3) \rightarrow T^n$  existiert, d.h.  $\kappa \circ \sigma = \text{id}_{\text{SO}(3)}$ . Der Schnitt induziert dann insbesondere eine injektive Abbildung

$$\sigma_*: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1(\text{SO}(3)) \rightarrow H_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n,$$

Die Identifikationen der Homologie folgen dabei aus Beispiel 3.4.13 sowie aus Beispiel 3.4.11 zusammen mit  $\text{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$ . Eine solche injektive Abbildung kann es aber nicht geben.

### 3.5. Euler-Charakteristik

Wir nehmen auch hier wieder an, dass es eine gewöhnliche Homologietheorie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten gibt.

DEFINITION 3.5.1. Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex. Wir bezeichnen mit  $z_i$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Zellen von  $X$ . Dann ist die geometrische Euler-Charakteristik definiert als

$$\chi_{\text{geom}}(X) = \sum_i (-1)^i z_i.$$

DEFINITION 3.5.2. Wir betrachten wieder eine Homologietheorie mit  $H_\bullet(\text{pt}) = \mathbb{Z}$ . Sei  $X$  ein topologischer Raum, so dass  $H_\bullet(X)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul ist. Die topologische Euler-Charakteristik von  $X$  ist definiert als

$$\chi_{\text{top}}(X) = \sum_i (-1)^i \text{rk } H_i(X).$$

BEMERKUNG 3.5.3. Mit dieser Definition ist die Euler-Charakteristik offensichtlich invariant unter Homotopieäquivalenzen.

PROPOSITION 3.5.4. Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex. Dann stimmen topologische und geometrische Euler-Charakteristik überein:  $\chi_{\text{geom}}(X) = \chi_{\text{top}}(X)$ .

BEWEIS. Sei  $0 \rightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0$  ein Komplex von endlich erzeugten abelschen Gruppen. Wir bezeichnen  $Z_n = \ker d_n$ ,  $B_n = \text{Im } d_{n+1}$  und  $H_n = Z_n/B_n$ . Dann haben wir exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad 0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0.$$

Aus der Dimensionformel folgt

$$\begin{aligned} \text{rk } C_n &= \text{rk } Z_n + \text{rk } B_{n-1} \\ &= \text{rk } B_n + \text{rk } H_n + \text{rk } B_{n-1}. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\sum_n (-1)^n \text{rk } C_n = \sum_n (-1)^n (\text{rk } B_n + \text{rk } H_n + \text{rk } B_{n-1}) = \sum_n (-1)^n \text{rk } H_n.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir die Aussage auf den zellulären Komplex mit  $C_n = H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$  anwenden.  $\square$

BEISPIEL 3.5.5. Aus unseren Berechnungen für  $S^n$  haben wir dann

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 2 & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$\square$

PROPOSITION 3.5.6 (Inklusion–Exklusion). Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex, und  $U$  und  $V$  zwei Unterkomplexe mit  $U \cup V = X$ . Dann gilt

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

BEWEIS. Hier benutzen wir die topologische Euler-Charakteristik. Nach Voraussetzung haben wir eine Mayer–Vietoris-Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n(U \cap V) \rightarrow H_n(U) \oplus H_n(V) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots,$$

in der nur endlich viele Einträge von Null verschieden sind. Aus der Exaktheit folgt, dass die alternierende Summe der Terme in der Mayer–Vietoris-Sequenz auch Null ist:

$$\sum_n (-1)^n \text{rk } H_n(U \cap V) + \sum_n (-1)^n \text{rk } H_n(X) = \sum_n (-1)^n (\text{rk } H_n(U) + \text{rk } H_n(V))$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.7. Sei  $X$  ein endlicher CW-Komplex, und  $U_1, \dots, U_m$  eine endliche Überdeckung von  $X$  durch Unterkomplexe. Wir nehmen an, dass für alle  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  der Durchschnitt  $\bigcap_{i \in I} U_i$  entweder leer ist oder Euler-Charakteristik 1 hat. Dann ist

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \# \left\{ J \subseteq \{1, \dots, m\} \mid \#J = i + 1 \text{ und } \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset \right\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 3.5.8. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Polyederformel von Euler: Für eine beliebige Triangulierung einer kompakten orientierten Fläche von Geschlecht  $g$  mit  $F$  Seitenflächen,  $E$  Kanten und  $V$  Eckpunkten gilt

$$F - E + V = 2 - 2g.$$

PROPOSITION 3.5.9. Seien  $X$  und  $Y$  zwei endliche CW-Komplexe. Dann gilt

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

BEWEIS. Hier benutzen wir die geometrische Euler-Charakteristik. Das Produkt ist ein endlicher CW-Komplex, dessen Zellen genau die Produkte der Zellen von  $X$  und  $Y$  sind. Seien  $z_{X,n}$  und  $z_{Y,n}$  die Anzahl der  $n$ -Zellen von  $X$  bzw.  $Y$ . Dann ist  $z_{X \times Y, n} = \sum_{i+j=n} z_{X,i} \cdot z_{Y,j}$  die Anzahl der  $n$ -Zellen von  $X \times Y$ . Dann haben wir

$$\begin{aligned} \chi(X) \cdot \chi(Y) &= \left( \sum_i (-1)^i z_{X,i} \right) \left( \sum_j (-1)^j z_{Y,j} \right) \\ &= \sum_n \left( \sum_{i+j=n} (-1)^i z_{X,i} \cdot (-1)^j z_{Y,j} \right) \\ &= \sum_n (-1)^n z_{X \times Y, n} = \chi(X \times Y). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 3.5.10. Für den  $n$ -Torus  $T^n = (S^1)^{\times n}$  haben wir dann  $\chi(T^n) = \chi(S^1)^n = 0$ . Induktiv können wir auch einfach sehen, dass die Anzahl der  $i$ -Zellen in der Produkt-CW-Struktur für  $T^n$  genau  $\binom{n}{i}$  ist. Die Aussage über die Euler-Charakteristik ist dann die wohlbekannte Formel über alternierende Binomialkoeffizienten:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0.$$

□

BEMERKUNG 3.5.11. Obwohl die Euler-Charakteristik nur eine einfache Zahl ist, enthält sie sehr viel Information über einen topologischen Raum und mögliche geometrische Strukturen. Ein Beispiel für diese Interaktion von globalen topologischen Invarianten und geometrischen Strukturen ist der Satz von Gauß-Bonnet: für eine kompakte orientierte glatte Fläche  $\Sigma$  (ohne Rand) im  $\mathbb{R}^3$  gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} K dA = \chi(\Sigma)$$

Auf der linken Seite steht dabei das Integral der Gauß-Krümmung bezüglich der Flächenform (alles lokale Informationen über die Geometrie der Fläche), die rechte Seite ist einfach die Euler-Charakteristik (rein topologische Information).

*Etwas allgemeiner kann die Euler-Charakteristik einer glatten orientierten und kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  mit dem Integral der Euler-Klasse des Tangentialbündels über  $M$  identifiziert werden. Kombinieren wir dies mit der Interpretation der Euler-Klasse als Hindernis für nullstellenfreie Schnitte, führt dies (nach deutlich mehr Arbeit) zur Aussage, dass auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  (ohne Rand) genau dann ein nullstellenfreies Vektorfeld existiert, wenn  $\chi(M) = 0$  – eine ziemlich weitreichende Verallgemeinerung des Satzes vom Igel 3.3.6. Mehr Information zu Euler-Charakteristik, Gauß–Bonnet und den Zusammenhang zum Krümmung und Messung von Oberfläche bzw. Inhalt, siehe [Ghr14, Kapitel 3] und [Sch86].*



## KAPITEL 4

# Kubische Homologie

4.1. Kubische Mengen und Beispiele

4.2. Definition und erste Konsequenzen

4.3. Homotopieinvarianz

4.4. Ausschneidung

4.5. Produktstrukturen und Künneth-Formel



## Singuläre Homologie

Bisher haben wir nur eine axiomatische Definition von Homologie betrachtet, in der Homologie im Wesentlichen durch Homotopieinvarianz und Ausschneidung charakterisiert ist. Aus den Axiomen folgt direkt die Berechnung der Homologie der Sphären (bzw. allgemeiner der Einhängungsisomorphismus) und mit etwas mehr Arbeit eine Beschreibung der von stetigen Abbildungen  $f: S^n \rightarrow S^n$  induzierten Abbildungen auf der Homologie (Gradtheorie). Das reicht bereits aus, um Homologie für alle CW-Komplexe zu berechnen (zelluläre Homologie) und ein paar einfache Anwendungen abzuleiten.

Alle bisherigen Ergebnisse (z.B. Brouwer-Fixpunktsatz, Satz vom Igel) gelten bisher nur unter der Annahme, dass eine gewöhnliche Homologietheorie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten existiert. Hauptziel des folgenden Kapitels ist es nun, eine solche Homologietheorie zu konstruieren und die Eilenberg–Steenrod-Axiome zu beweisen. Für die Definition der singulären Homologie eines topologischen Raums  $X$  benutzen wir die simpliziale Menge der Abbildungen von Standard-Simplizes nach  $X$ , und betrachten einen dazugehörigen algebraischen Kettenkomplex.

Außerdem werden wir einige weitere Anwendungen diskutieren: den Jordanschen Kurvensatz (zur Topologie des  $\mathbb{R}^n$ ) und Borsuk–Ulam-Sätze. Da gewöhnliche Homologietheorien durch die Eilenberg–Steenrod-Axiome bis auf natürlichen Isomorphismus eindeutig bestimmt sind, folgen zwar *alle* Homologieberechnungen irgendwie aus den Axiomen. Allerdings ist es natürlich auch gut, singuläre Homologie in Aktion zu sehen, und die axiomatischen Beweise der beiden Anwendungen sind etwas aufwendiger. Zum Beispiel benötigen wir für den Jordanschen Kurvensatz die Tatsache, dass Homologie mit gerichteten Kolimits vertauscht, und für Borsuk–Ulam die Existenz von Transfers für endliche Überlagerungen; beides sind Eigenschaften, die für singuläre Homologie relativ direkt zu sehen sind.

### 5.1. Simplizialkomplexe und simpliziale Mengen

DEFINITION 5.1.1 (Simplizialkomplex). *Sei  $M$  eine Menge. Ein abstrakter Simplizialkomplex  $X$  ist eine Menge  $X = \{U \mid U \subset M, U \text{ endlich}\}$  von endlichen Teilmengen, so dass für  $U \in X$  und  $V \subset U$  auch  $V \in X$  gilt. Eine solche Teilmenge  $U \in X$  mit  $\#U = n + 1$  heißt  $n$ -Simplex.*

*Die Mengen  $U \in X$  heißen Facetten oder Seiten von  $X$ .*

*Wir bezeichnen mit  $X_n = \{U \subset M \mid U \in X, \#U = n + 1\}$  die Menge der  $n$ -Simplizes von  $X$ .*

DEFINITION 5.1.2. *Eine simpliziale Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen zwei Simplizialkomplexen  $X$  und  $Y$  ist eine Abbildung der zugrundeliegenden Mengen, so dass für jedes Simplex  $\sigma \in X$  das Bild  $f(\sigma)$  auch wieder ein Simplex in  $Y$  ist.*

*Sei  $X = \{U \mid U \subset M\}$  ein Simplizialkomplex auf der Menge  $M$ . Ein Simplizialkomplex  $Z \subseteq X$  heißt Unterkomplex.*

DEFINITION 5.1.3. *Ein geometrisches  $n$ -Simplex ist die konvexe Hülle von  $n+1$  Punkten in  $\mathbb{R}^n$  in allgemeiner Lage (d.h. jede Teilmenge von Punkten ist affin unabhängig).*

Als Standard- $n$ -Simplex wird die konvexe Hülle der Einheitsvektoren in  $\mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnet:

$$\Delta^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \right\}$$

BEMERKUNG 5.1.4. Die Punkte des von den Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n$  aufgespannten  $n$ -Simplex sind nach Definition 5.1.3 genau die konvexen Linearkombinationen  $\sum_i t_i v_i$  mit  $\sum_i t_i = 1$  und  $t_i \geq 0$  für alle  $i$ . Die Koeffizienten  $t_i$  heißen auch normierte baryzentrische Koordinaten des Punktes  $p = \sum_i t_i v_i$ . Der Schwerpunkt (auch Baryzentrum) des Simplex ist der Punkt  $b = \sum_i t_i v_i$ , an dem alle baryzentrischen Koordinaten gleich sind, also  $t_i = \frac{1}{n+1}$ .

BEMERKUNG 5.1.5. Die Seitenflächen des Standardsimplex  $\Delta^n$  sind genau die Schnittmengen von  $\Delta^n$  mit Koordinatenebenen  $x_{i_1} = \dots = x_{i_m} = 0$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Diese sind wieder Standardsimplizes.

DEFINITION 5.1.6. Für einen abstrakten Simplizialkomplex  $X$  (mit zugrundeliegender Menge  $M$ ) definieren wir die geometrische Realisierung  $|X|$ . Wir wählen eine totale Ordnung auf  $M$ ; dadurch wird für jede Teilmenge  $\{x_0 < x_1 < \dots < x_n\} \subset M$  eine Bijektion auf die Eckpunkte  $e_0 < e_1 < \dots < e_n$  des Standardsimplex  $\Delta^n$  eindeutig festgelegt. Für jede Teilmenge  $\tau \subset \sigma \subseteq M$  wird dadurch auch eine eindeutige affine Abbildung  $\iota_{\tau \subset \sigma}: \Delta^{\#\tau-1} \rightarrow \Delta^{\#\sigma-1}$  festgelegt, die die Ordnung der Simplizes bewahrt.

Dann definieren wir

$$|X| = \left( \bigsqcup_n X_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation für jede Inklusion  $\tau \subset \sigma$  von abstrakten Simplizes in  $X$  den Simplex  $\{\tau\} \times \Delta^{\#\tau-1}$  als Seite des Simplex  $\{\sigma\} \times \Delta^{\#\sigma-1}$  mittels  $t \sim \iota_{\tau \subset \sigma}(t)$ ,  $t \in \Delta^{\#\tau-1}$ , identifiziert.

Eine Triangulierung eines topologischen Raumes  $X$  ist ein abstrakter Simplizialkomplex  $Y$  zusammen mit einem Homöomorphismus  $|Y| \xrightarrow{\cong} X$ .

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.7. Die geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes ist ein CW-Komplex.

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.8. Finden Sie eine Triangulierung für den 2-Torus. (Anspruchsvoller Zusatz: Wie viele Eckpunkte muss der Simplizialkomplex einer solchen Triangulierung mindestens haben?)

BEISPIEL 5.1.9. Für die Menge  $[n] = \{0, \dots, n\}$  ist  $\Delta^n := \mathcal{P}([n])$  ein simplizialer Komplex, dessen Realisierung ein  $n$ -Simplex ist. Der Rand  $\partial \Delta^n := \{U \in \Delta^n \mid \#U \leq n\}$  liefert eine Triangulierung  $\partial \Delta^n \cong S^{n-1}$ .  $\square$

BEISPIEL 5.1.10. Ein anderer Begriff für abstrakte Simplizialkomplexe ist Unabhängigkeitssystem. Für einen Körper  $F$ , einen  $F$ -Vektorraum  $V$  und eine Menge  $M \subseteq V$  von Vektoren haben wir ein Unabhängigkeitssystem

$$\Delta = \{U \subseteq M \mid U \text{ linear unabhängig}\}.$$

Allgemeiner sind Matroide Beispiele für abstrakte Simplizialkomplexe. Ein anderes Beispiel: für eine Menge  $M$  von Zufallsvariablen haben wir ein Unabhängigkeitssystem, das eine Teilmenge  $U \subseteq M$  genau dann enthält, wenn die entsprechenden Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. In beiden Fällen kodiert die Topologie des Simplizialkomplexes Abhängigkeiten (zwischen Vektoren bzw. Zufallsvariablen).  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.11. Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  und eine Menge  $X \subseteq V$  von Vektoren ist der Unabhängigkeitskomplex für  $X$  ein Simplizialkomplex. Geben Sie einen Simplizialkomplex an, der nicht von dieser Form ist.

BEISPIEL 5.1.12 (Fahnenkomplex). Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Eine Fahne in  $V$  ist eine Kette von echt ineinander enthaltenen Untervektorräumen  $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{l-1} \subset V_l = V$ . Eine vollständige Fahne ist eine Fahne maximaler Länge  $l = n$  mit  $\dim V_i = i$ .

Die Menge aller echten Untervektorräume von  $V$  hat die Struktur eines Simplizialkomplexes. Ein Tupel  $(V_1, \dots, V_l)$  von Vektorräumen spannt genau dann einen  $(l-1)$ -Simplex auf, wenn die  $V_i$  eine Fahne  $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_l \subset V$  bilden. Dieser Komplex heißt Fahnenkomplex für  $V$ .  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.13. Bestimmen Sie den Fahnenkomplex für den Vektorraum  $\mathbb{F}_2^3$ .

BEISPIEL 5.1.14. Sei  $\Gamma = (V, E)$  ein Graph. Darunter verstehen wir hier einen eindimensionalen Simplizialkomplex, d.h. wir haben eine Menge  $V$  von Knoten und eine Menge  $E$  von 2-elementigen Teilmengen von  $V$ , den Kanten. Der Clique-Komplex für  $\Gamma$  ist definiert als der Simplizialkomplex

$$X(\Gamma) = \{\sigma \subseteq V \mid \forall x, y \in \sigma : \{x, y\} \in E\}.$$

Der Clique-Komplex enthält ein Simplex  $\sigma$  genau dann, wenn die Eckpunkte des Simplex eine Clique im Graphen  $\Gamma$  bilden.

Umgekehrt gibt es auch den Unabhängigkeitskomplex des Graphen, in dem die Punkte  $v_0, \dots, v_n$  genau dann ein Simplex aufspannen, wenn keine zwei Punkte  $v_i$  und  $v_j$  durch eine Kante verbunden sind. Dies ist der Clique-Komplex des komplementären Graphen.  $\square$

BEISPIEL 5.1.15. Sei  $X$  ein topologischer Raum, und  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung. Der Čech-Komplex/Nerv  $\check{C}(\{U_i\}_{i \in I})$  für die Überdeckung ist ein Simplizialkomplex auf der Menge  $I$ , bei dem Indizes  $i_0, \dots, i_n$  ein  $n$ -Simplex aufspannen, wenn  $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset$ .  $\square$

BEISPIEL 5.1.16. Sei  $(X, \leq)$  eine partiell geordnete Menge. Der Ordnungskomplex zu  $X$  ist der Simplizialkomplex auf  $X$ , bei dem eine Teilmenge  $x_0, \dots, x_n$  genau dann einen  $n$ -Simplex aufspannt, wenn sie bezüglich  $\leq$  total geordnet ist (oBdA  $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ ).  $\square$

BEISPIEL 5.1.17. Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine diskrete Menge von Punkten und sei  $\epsilon > 0$ . Der Vietoris–Rips-Komplex  $\text{VR}_\epsilon(Q)$  ist ein Simplizialkomplex auf der Menge  $Q$ , bei dem Punkte  $q_0, \dots, q_n$  ein  $n$ -Simplex aufspannen, wenn  $|q_i - q_j| < \epsilon$  für alle  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  ist.  $\square$

Weitere Beispiele wie Strategiekomplexe und Konfigurationsräume von Roboterarmen sind in [Ghr14] zu finden.

DEFINITION 5.1.18. Sei  $X$  ein Simplizialkomplex und  $\sigma \in X$  ein Simplex. Der Link von  $\sigma$  in  $X$  ist der Unterkomplex

$$\text{Lk}_X(\sigma) := \{\tau \in X \mid \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in X\}.$$

ÜBUNGSAUFGABE 5.1.19. Finden Sie eine endliche offene Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  der 2-Sphäre, so dass gilt

$$2 = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \# \left\{ J \subseteq I \mid \#J = i + 1 \text{ und } \bigcap_{j \in J} U_j \neq \emptyset \right\}.$$

Können Sie eine allgemeine hinreichende Bedingung für Überdeckungen der 2-Sphäre formulieren, so dass die obige Formel gilt?

**BEMERKUNG 5.1.20.** Der Begriff des  $\Delta$ -Komplexes (semi-simpliziale Menge) ist eine Verallgemeinerung der Simplizialkomplexe. Ein abstrakter  $\Delta$ -Komplex ist eine Folge  $K_0, K_1, \dots$  von Mengen und Randabbildungen  $d_i: K_n \rightarrow K_{n-1}$  für  $n > 0$  und  $0 \leq i \leq n$ , so dass für  $n \geq 2$  und  $i < j$  gilt  $d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i$ . Im Unterschied zu Simplizialkomplexen merken wir uns hier, welche Simplizes als Facette eines anderen Simplex auftauchen.

Eine geometrische Realisierung kann wieder genau wie im Fall von Simplizialkomplexen konstruiert werden:

$$|X| = \left( \bigsqcup_n X_n \times \Delta^n \right) / \sim,$$

wobei die Relation durch  $(\sigma, d^i t) \sim (d_i \sigma, t)$  für  $\sigma \in X_n$  und  $t \in \Delta^{n-1}$  gegeben ist. Dabei ist die Abbildung  $d^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  die affine Einbettung, die das  $(n-1)$ -Simplex  $\Delta^{n-1}$  als  $i$ -te Seitenfläche des  $n$ -Simplex realisiert: die Einheitsvektoren  $e_j$  mit  $j < i$  werden auf  $e_j$  abgebildet, die Einheitsvektoren  $e_j$  mit  $j \geq i$  auf  $e_{j+1}$ , und die Abbildung ist die dadurch festgelegte affine Transformation.

Der Vorteil von  $\Delta$ -Komplexen ist, dass allgemeinere Verklebungen erlaubt sind als für Simplizialkomplexe. Dadurch kommen  $\Delta$ -Komplex-Strukturen mit deutlich weniger Simplizes aus als Triangulierungen (Beispiel Torus).

**BEMERKUNG 5.1.21.** Ein noch allgemeinerer Begriff ist der der simplizialen Menge. Mit  $\Delta$  bezeichnen wir die Kategorie der endlichen Ordinalzahlen: Objekte sind endliche linear geordnete Mengen  $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$  und Morphismen sind monotone Abbildungen. Diese Kategorie wird erzeugt von speziellen Abbildungen:

- Die Randabbildung  $\delta^{n,i}: [n-1] \rightarrow [n]$ ,  $0 \leq i \leq n$  ist die Injektion, für die  $i$  nicht im Bild liegt.
- Die Ausartungsabbildung  $\sigma^{n,i}: [n+1] \rightarrow [n]$ ,  $0 \leq i \leq n$  ist die Surjektion, die  $i$  zweimal trifft.

Jede Abbildung in  $\Delta$  ist eine Komposition solcher Abbildungen. Die Abbildungen erfüllen die kosimplizialen Identitäten (die alle geometrische Interpretationen im Standardsimplex haben).

Eine simpliziale Menge ist ein kontravarianter Funktor  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ . Konkret ist eine simpliziale Menge  $X_\bullet$  eine Folge von Mengen  $X_n$  und Randabbildungen  $d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}$  und Ausartungsabbildungen  $s_j: X_{n-1} \rightarrow X_n$ , die die folgenden simplizialen Identitäten erfüllen:

$$\begin{aligned} d_i \circ d_j &= d_{j-1} \circ d_i && \text{wenn } i < j \\ d_i \circ s_j &= s_{j-1} \circ d_i && \text{wenn } i < j \\ d_j \circ s_j &= \text{id} = d_{j+1} \circ s_j \\ d_i \circ s_j &= s_j \circ d_{i-1} && \text{wenn } i > j + 1 \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i && \text{wenn } i \leq j \end{aligned}$$

Es gibt ebenfalls wieder eine geometrische Realisierung wie für semisimpliziale Komplexe.

**ÜBUNGSAUFGABE 5.1.22.** Sei  $\Delta$  die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen), mit den Randabbildungen  $\delta^i: [n-1] \rightarrow [n]$  (Injektion, die  $i$  nicht trifft) und Ausartungsabbildungen  $\sigma^i: [n+1] \rightarrow [n]$  (Surjektion, die  $i$  zweimal trifft). Zeigen Sie, dass jede Abbildung in  $\Delta$  eine Komposition von Rand- und Ausartungsabbildungen ist. Beweisen Sie, dass diese Abbildungen

die folgenden kosimplizialen Identitäten erfüllen:

$$\begin{aligned} \delta^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \delta^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^i \circ \sigma^{j-1} && \text{wenn } i < j \\ \sigma^j \circ \delta^j &= \text{id} = \sigma^j \circ \delta^{j+1} \\ \sigma^j \circ \delta^i &= \delta^{i-1} \circ \sigma^j && \text{wenn } i > j + 1 \\ \sigma^j \circ \sigma^i &= \sigma^i \circ \sigma^{j+1} && \text{wenn } i \leq j \end{aligned}$$

## 5.2. Definition und erste Konsequenzen

DEFINITION 5.2.1. Sei  $X: \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  eine simpliziale Menge und sei  $R$  ein Ring. Wir definieren einen Kettenkomplex  $(C_\bullet(X), d)$  von  $R$ -Moduln wie folgt: für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $C_n(X) = R[X_n]$  der freie  $R$ -Modul auf der Menge der  $n$ -Simplizes von  $X$ , und die Randabbildung wird definiert durch

$$d: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X): [\sigma] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [d_i(\sigma)].$$

Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von simplizialen Mengen erhalten wir induzierte Abbildungen

$$f: (C_\bullet(X), d) \rightarrow (C_\bullet(Y), d): [\sigma] \mapsto [f(\sigma)].$$

Insgesamt erhalten wir einen Funktor  $C_\bullet: \Delta^{\text{op}}\text{-Set} \rightarrow \mathbf{Ch}(R\text{-mod})$  von simplizialen Mengen in Komplexe von  $R$ -Moduln.

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.2. Zeigen Sie:

- $(C_\bullet(X), d)$  aus Definition 5.2.1 ist tatsächlich ein Komplex.
- Die induzierten Abbildungen in Definition 5.2.1 sind Homomorphismen von Komplexen, und kompatibel mit Komposition.

BEMERKUNG 5.2.3. Dold-Kan-Korrespondenz zwischen simplizialen  $R$ -Moduln und Kettenkomplexen von  $R$ -Moduln. normalisierter Kettenkomplex bzw. Moore-Komplex vs. Kettenkomplex modulo ausgeartete Simplizes

DEFINITION 5.2.4. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir definieren eine simpliziale Menge  $\text{Sing}_\bullet(X)$  wie folgt:

- Die Menge der  $n$ -Simplizes  $\text{Sing}_n(X) := \mathbf{Top}(\Delta^n, X)$  ist die Menge der stetigen Abbildungen  $\Delta^n \rightarrow X$  vom Standard- $n$ -Simplex in  $X$ .
- Die Rand- und Ausartungsabbildungen für  $\text{Sing}_n(X)$  sind durch Komposition mit den geometrischen Rand- und Ausartungsabbildungen

$$\delta^i: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \text{ bzw. } \sigma^i: \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$$

gegeben.

Für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  erhalten wir eine induzierte Abbildung  $f: \text{Sing}_\bullet(X) \rightarrow \text{Sing}_\bullet(Y)$  von simplizialen Mengen.

Insgesamt erhalten wir dadurch einen Funktor  $\text{Sing}_\bullet: \mathbf{Top} \rightarrow \Delta^{\text{op}}\text{-Set}$  von topologischen Räumen in simpliziale Mengen.

DEFINITION 5.2.5. Sei  $X$  ein topologischer Raum, und sei  $R$  ein Ring. Der singuläre Kettenkomplex ist definiert als  $C_\bullet^{\text{sing}}(X) := C_\bullet(\text{Sing}_\bullet(X))$ . Die singuläre Homologie von  $X$  ist definiert durch

$$H_n^{\text{sing}}(X, R) := H_n(C_\bullet^{\text{sing}}(X)).$$

LEMMA 5.2.6. Singuläre Homologie ist ein Funktor

$$H_n^{\text{sing}}(-, R): \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-mod}.$$

BEWEIS. Folgt direkt aus den Funktorialitätsaussagen in Definitionen 5.2.1 und 5.2.4 sowie Übungsaufgabe A.3.3.  $\square$

BEMERKUNG 5.2.7. Wir sehen direkt aus der Definition, dass  $H_n^{\text{sing}}(X, R) = 0$  für  $n < 0$  gilt. Für den Spezialfall  $X = \emptyset$  können wir auch direkt sehen, dass  $H_n^{\text{sing}}(\emptyset) = 0$  ist. Wir werden aber im folgenden immer implizit annehmen, dass die Räume, die wir betrachten, nicht-leer sind.

BEMERKUNG 5.2.8. Eine für verschiedene Anwendungen interessante Modifikation ist die Homologie mit lokalen Koeffizienten. Sei  $(X, x)$  ein zusammenhängender punktierter topologischer Raum (lokal weg-zusammenhängend, semi-lokal einfach zusammenhängend) mit Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$ . Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  wirkt auf der universellen Überlagerung  $\tilde{X}$  durch Decktransformationen. Diese Wirkung induziert eine  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ -Modulstruktur auf  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(\tilde{X})$ . Für einen  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$ -Modul  $M$  können wir dann Homologie mit lokalen Koeffizienten in  $M$  definieren:

$$H_n^{\text{sing}}(X, M) := H_n(C_{\bullet}^{\text{sing}}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]} M).$$

Ein wesentliches Anwendungsbeispiel ist in der Knotentheorie der Alexander-Modul. Dabei betrachtet man für einen Knoten  $\iota: S^1 \hookrightarrow S^3$  die Homologie des Knotenkomplements  $X = S^3 \setminus \iota(S^1)$  mit Koeffizienten in dem Modul  $\mathbb{Z}[\pi_1(X)] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ , der durch die Abelianisierung der Knotengruppe  $\pi_1(X)$  gegeben ist.

PROPOSITION 5.2.9. Seien  $X_i$ ,  $i \in I$  topologische Räume,  $I$  eine beliebige Indexmenge. Dann gilt

$$H_n^{\text{sing}}(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n^{\text{sing}}(X_i, R).$$

Dies gilt insbesondere für die Zerlegung eines Raums  $X$  in Wegzusammenhangskomponenten.

BEWEIS. Die Standard- $n$ -Simplizes  $\Delta^n$  sind zusammenhängend, also ist das Bild einer Abbildung  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  immer zusammenhängend. Insbesondere gibt es für jedes singuläre Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$  ein  $i \in I$ , so dass das Bild von  $\sigma$  in  $X_i$  enthalten ist. Wir erhalten eine Zerlegung

$$C_{\bullet}^{\text{sing}}(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R) \cong \bigoplus_{i \in I} C_{\bullet}^{\text{sing}}(X_i, R)$$

von Kettenkomplexen. Dies induziert die behauptete Zerlegung der Homologie.  $\square$

PROPOSITION 5.2.10. Sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum und  $R$  ein Ring. Dann gilt  $H_0^{\text{sing}}(X, R) \cong R$ . Für einen beliebigen Raum  $X$  ist  $H_0^{\text{sing}}(X, R)$  isomorph zum freien  $R$ -Modul auf der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ .

BEWEIS. Nach Definition ist

$$H_0^{\text{sing}}(X, R) = \text{coker} \left( d_1: C_1^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_0^{\text{sing}}(X) \right).$$

Dabei ist  $C_0^{\text{sing}}(X)$  der freie  $R$ -Modul auf der Menge der Punkte  $x \in X$ , und  $C_1^{\text{sing}}(X)$  der freie  $R$ -Modul auf der Menge der Abbildungen  $\gamma: [0, 1] \cong \Delta^1 \rightarrow X$ . Die Randabbildung  $d_1$  bildet einen Weg  $\gamma$  auf die formale Differenz  $\gamma(1) - \gamma(0)$  ab.

Wir definieren eine Abbildung

$$\epsilon: C_0^{\text{sing}}(X) \rightarrow R: \sum_i n_i [x_i] \mapsto \sum_i n_i.$$

Mit dieser Definition ist  $\text{Im } d_1 \subset \ker \epsilon$ , da  $\epsilon([\gamma(1)] - [\gamma(0)]) = 1 - 1 = 0$  ist. Um zu zeigen, dass  $\ker \epsilon \subseteq \text{Im } d_1$  ist, sei  $\sum_i n_i [x_i]$  so dass  $\sum_i n_i = 0$ . Wir wählen einen

Punkt  $y \in X$  und Wege  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $\gamma_i(0) = y$  und  $\gamma_i(1) = x_i$ . Für diese Wege gilt  $d_1(\gamma_i) = [x_i] - [y]$ . Dann haben wir

$$d_1\left(\sum_i n_i[\gamma_i]\right) = \sum_i n_i[x_i] - \sum_i n_i[y] = \sum_i n_i[x_i],$$

also liegt  $\sum_i n_i[x_i]$  im Bild von  $d_1$ .

Die zweite Behauptung folgt mit Proposition 5.2.9.  $\square$

PROPOSITION 5.2.11. *Es gilt  $H_n^{\text{sing}}(\text{pt}, R) = 0$  für  $n > 0$ .*

BEWEIS. In  $\text{Sing}_\bullet(\text{pt})$  gibt es in jedem simplizialen Grad  $n \geq 0$  immer genau ein (ausgeartetes) Simplex, und alle simplizialen Randabbildungen sind die Identität. Der singuläre Komplex  $C_\bullet(\text{Sing}(\text{pt}))$  hat dann die Form

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

da  $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{id}$ . Daraus folgt direkt die Behauptung.  $\square$

DEFINITION 5.2.12. *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subseteq X$  ein Unterraum. Dann ist  $C_n(\text{Sing}_\bullet(A))$  ein Untermodul in  $C_n(\text{Sing}_\bullet(X))$ , bestehend genau aus den Linearkombinationen von  $n$ -Simplizes, deren Bild in  $A$  liegt. Wir definieren den relativen Kettenkomplex für das Paar  $(X, A)$*

$$C_n^{\text{sing}}(X, A) := C_n^{\text{sing}}(X) / C_n^{\text{sing}}(A).$$

Die relative singuläre Homologie für das Paar  $(X, A)$  ist definiert durch

$$H_n^{\text{sing}}(X, A; R) := H_n(C_n^{\text{sing}}(X, A))$$

BEMERKUNG 5.2.13. *Insbesondere können wir damit auch (wie nach Lemma 3.1.5) reduzierte Homologie definieren:*

$$\tilde{H}_\bullet^{\text{sing}}(X, R) := \ker(H_\bullet^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow H_\bullet(\text{pt}))$$

definieren und mit relativer Homologie  $H_\bullet^{\text{sing}}(X, \{x\})$  identifizieren.

PROPOSITION 5.2.14. *Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow \cdots$$

Für einen Morphismus  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  gibt es ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}^{\text{sing}}(X, A; R) & \xrightarrow{\partial} & H_n^{\text{sing}}(A; R) & \xrightarrow{i_*} & H_n^{\text{sing}}(X; R) & \xrightarrow{j_*} & H_n^{\text{sing}}(X, A; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}^{\text{sing}}(Y, B; R) & \xrightarrow{\partial} & H_n^{\text{sing}}(B; R) & \xrightarrow{i_*} & H_n^{\text{sing}}(Y; R) & \xrightarrow{j_*} & H_n^{\text{sing}}(Y, B; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

BEWEIS. Die lange exakte Sequenz folgt direkt aus Definition 5.2.12 und Proposition A.3.13.

Für die Natürlichkeit sehen wir erst, dass  $f$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen induziert

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & C_\bullet^{\text{sing}}(A) & \xrightarrow{i_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(X) & \xrightarrow{j_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ 0 & \rightarrow & C_\bullet^{\text{sing}}(B) & \xrightarrow{i_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(Y) & \xrightarrow{j_*} & C_\bullet^{\text{sing}}(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Konstruktion der Randabbildung in Proposition A.3.13 ist natürlich.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.15. Sei  $(X, A, B)$  ein Tripel von topologischen Räumen, d.h., wir haben Inklusionen von Unterräumen  $B \subseteq A \subseteq X$ . Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz von singulären Homologiegruppen gibt

$$\cdots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(A, B; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, B; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}^{\text{sing}}(A, B; R) \rightarrow \cdots$$

ÜBUNGSAUFGABE 5.2.16. Zeigen Sie, dass Homologie mit gerichteten Kolimiten vertauscht. Sei  $X$  ein topologischer Raum, und  $X_i, i \in I$  eine Folge von Unterräumen von  $X$ , so dass  $X = \bigcup_{i \in I} X_i$  gilt und eine Menge  $U \subset X$  genau dann offen in  $X$  ist, wenn für alle  $i$  der Durchschnitt  $U \cap X_i$  offen in  $X_i$  ist. Dann haben wir für jeden Koeffizientenring  $R$  einen natürlichen Isomorphismus

$$H_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \cong \text{colim}_i H_{\bullet}^{\text{sing}}(X_i, R).$$

(Hinweis: Benutzen Sie die Kompaktheit der Standardsimplizes  $\Delta^n$ .)

### 5.3. Homotopie-Invarianz

Der Beweis der Homotopieinvarianz ist eine Kombination eines geometrischen Arguments (Zerlegung von  $\Delta^n \times [0, 1]$  in Simplizes) und eines algebraischen Arguments (Zerlegung induziert Kettenhomotopie auf singulärem Kettenkomplex).

DEFINITION 5.3.1. Wir zerlegen das Produkt  $\Delta^n \times [0, 1]$  eines  $n$ -Simplex mit einem Intervall in  $(n+1)$ -Simplizes. Die Eckpunkte des Produkts sind in den beiden Seiten  $\Delta^n \times \{0\}$  und  $\Delta^n \times \{1\}$  enthalten. Wir bezeichnen die Eckpunkte von  $\Delta^n \times \{0\}$  mit  $v_0, \dots, v_n$ , und die Eckpunkte von  $\Delta^n \times \{1\}$  mit  $w_0, \dots, w_n$ . Dabei sind die Indizes so gewählt, dass  $v_i$  und  $w_i$  das gleiche Bild unter der Projektion  $\Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$  haben.

Das  $n$ -Simplex  $[v_0, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n]$  ist gegeben als Graph der linearen Abbildung

$$\phi_i: \Delta^n \rightarrow [0, 1]: (t_0, \dots, t_n) \mapsto \sum_{j=i+1}^n t_j.$$

Es gilt  $\phi_i \leq \phi_{i-1}$ , und der Bereich zwischen zwei  $n$ -Simplizes für aufeinanderfolgende Indizes ist das  $n+1$ -Simplex  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ . Wegen  $0 = \phi_n \leq \phi_{n-1} \leq \dots \leq \phi_0 \leq \phi_{-1} = 1$  erhalten wir eine Zerlegung von  $\Delta^n \times [0, 1]$  in die  $(n+1)$ -Simplizes  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ .

DEFINITION 5.3.2. Sei  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Für ein Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  erhalten wir eine Abbildung  $F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}): \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1] \rightarrow Y$ . Wir definieren die Prismen-Operatoren

$$P: C_n^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(Y, R): \sigma \mapsto \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}.$$

PROPOSITION 5.3.3. Sei  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$ . Die Prismen-Operatoren  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{\bullet+1}^{\text{sing}}(Y, R)$  bilden eine Kettenhomotopie zwischen den von  $f$  und  $g$  induzierten Abbildungen.

BEWEIS. Zu zeigen ist  $g_n - f_n = d \circ P_n + P_{n-1} \circ d$ . Dabei stehen die Terme  $g_n$  und  $f_n$  für  $\Delta^n \times \{0\}$  und  $\Delta^n \times \{1\}$ , und die beiden anderen Terme für den Rand des Prisma bzw.  $\partial \Delta^n \times [0, 1]$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d \circ P_n(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite haben wir

$$\begin{aligned} P_{n-1} \circ d(\sigma) &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \\ &+ \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Durch die Vorzeichen bleiben von den Termen mit  $i = j$  nur

$$\begin{aligned} F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]} &= g_n(\sigma) \\ F \circ (\sigma \times \text{id}_{[0,1]})|_{[v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]} &= -f_n(\sigma) \end{aligned}$$

übrig.  $\square$

**SATZ 5.3.4 (Homotopieinvarianz).** *Sei  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$ . Dann gilt für die induzierten Abbildungen  $f_* = g_*: H_\bullet^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow H_\bullet^{\text{sing}}(Y, R)$ .*

**BEWEIS.** Folgt direkt aus Proposition 5.3.3 und Proposition A.3.16.  $\square$

**ÜBUNGSAUFGABE 5.3.5.** *Seien  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  zwei Abbildungen, so dass eine Homotopie durch Abbildungen von Raumpaaren zwischen  $f$  und  $g$  existiert. Dann sind die beiden induzierten Abbildungen gleich:*

$$f_* = g_*: H_n^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y, B; R).$$

## 5.4. Ausschneidung

**SATZ 5.4.1 (Ausschneidung).** *Für einen topologischen Raum  $X$  gelten die beiden folgenden äquivalenten Aussagen.*

- Für Unterräume  $Z \subseteq A \subseteq X$  mit  $\bar{Z} \subseteq \mathring{A}$  induziert die Inklusion  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  von Raumpaaren für alle  $n$  Isomorphismen

$$H_n^{\text{sing}}(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X, A).$$

- Für Unterräume  $A, B \subseteq X$  mit  $\mathring{A} \cup \mathring{B} = X$  induziert die Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  von Raumpaaren für alle  $n$  Isomorphismen

$$H_n^{\text{sing}}(B, A \cap B) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X, A)$$

Für den Beweis werden Simplizes in "kleinere" Simplizes (bezüglich einer offenen Überdeckung von  $X$ ) zerlegt, um die Teilmenge  $Z$  ausschneiden zu können.

**DEFINITION 5.4.2.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  eine Menge von Unterräumen mit  $\bigcup_{i \in I} \mathring{U}_i = X$ . Wir bezeichnen mit  $C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_n^{\text{sing}}(X)$  die Untergruppe der Ketten  $\sum_j n_j \sigma_j$ , so dass für jedes Simplex  $\sigma_j: \Delta^n \rightarrow X$  das Bild in einem der  $U_i$  enthalten ist. Es ist leicht zu sehen, dass die Randabbildung*

$$d: C_n^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n-1}^{\text{sing}}(X)$$

wieder in  $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$  landet und wir damit einen Unterkomplex  $C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X) \subseteq C_\bullet^{\text{sing}}(X)$  erhalten. Die Homologiegruppen dieses Kettenkomplexes bezeichnen wir mit  $H_n^{\mathfrak{U}}(X)$ .

**BEWEIS VON THEOREM 5.4.1:** Die beiden Varianten sind äquivalent, mit  $B = X \setminus Z$  bzw.  $Z = X \setminus B$ . Wir beweisen die zweite Variante. Für  $\mathfrak{U} = \{A, B\}$  betrachten wir  $C_\bullet^{\mathfrak{U}}(X)$ , dieser Kettenkomplex wird mit  $C_\bullet(A + B)$  bezeichnet (da Elemente Summen von Ketten in  $A$  und Ketten in  $B$  sind). Die von der Inklusion  $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$  induzierte Abbildung  $C_\bullet^{\text{sing}}(B)/C_\bullet^{\text{sing}}(A \cap B) \rightarrow C_\bullet(A + B)/C_\bullet^{\text{sing}}(A)$  ist offensichtlich ein Isomorphismus, da die entsprechenden Kettengruppen frei von den Simplizes in  $B$ , die nicht vollständig in  $A \cap B$  liegen, erzeugt werden. Es bleibt also

zu zeigen, dass die Inklusion  $C_n(A+B)/C_n^{\text{sing}}(A) \hookrightarrow C_n^{\text{sing}}(X)/C_n^{\text{sing}}(A)$  einen Isomorphismus auf der Homologie induziert. Dies wird in Proposition 5.4.7 bewiesen. ■

**DEFINITION 5.4.3 (baryzentrische Unterteilung).** Die baryzentrische Unterteilung von  $n$ -Simplizes wird induktiv definiert: Für das von den Eckpunkten  $v_0, \dots, v_n$  aufgespannte  $n$ -Simplex (im  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) besteht die baryzentrische Unterteilung aus den  $n$ -Simplizes  $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ , wobei  $b = \frac{1}{n+1} \sum_i v_i$  das Baryzentrum des Simplex  $[v_0, \dots, v_n]$  ist, und  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$  ein  $n-1$ -Simplex in der baryzentrischen Unterteilung einer Seitenfläche  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 5.4.4.** Zeigen Sie, dass die zweifache baryzentrische Unterteilung eines  $\Delta$ -Komplexes ein Simplicialkomplex ist.

Die baryzentrische Unterteilung kann alternativ mit simplizialen Mengen definiert werden: für das  $n$ -Simplex  $\Delta^n = \text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$  betrachten wir die Menge aller nicht-ausgearteten Simplizes von  $\Delta^n$ . Diese Menge ist vermittle der Inklusion von Simplizes eine partiell geordnete Menge. Wir bezeichnen den Ordnungskomplex dieser partielle geordneten Menge, s. Beispiel 5.1.16, mit  $\text{sd } \Delta^n$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 5.4.5.** Zeigen Sie, dass die affine Abbildung

$$h: |\text{sd } \Delta^n| \xrightarrow{\cong} |\Delta^n|,$$

die einen Eckpunkt  $\{w_0, \dots, w_k\}$  von  $\text{sd } \Delta^n$  auf das Baryzentrum  $\frac{1}{k+1} \sum_i w_i$  des von  $w_0, \dots, w_k$  aufgespannten Simplex abbildet, ein Homöomorphismus ist.

Insbesondere ist die geometrische Realisierung von  $\text{sd } \Delta^n$  genau die oben beschriebene baryzentrische Unterteilung.

**ÜBUNGSAUFGABE 5.4.6.** Für ein Simplex  $[v_0, \dots, v_n]$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  definieren wir den Durchmesser als

$$\max \{ \|x - y\| \mid x, y \in [v_0, \dots, v_n] \}.$$

- (1) Zeigen Sie, dass der Durchmesser gleich dem maximalen Abstand zweier Eckpunkte ist. (Dreiecksungleichung!)
- (2) Sei  $D$  der Durchmesser des gegebenen Simplex  $[v_0, \dots, v_n]$ . Zeigen Sie (durch Induktion über  $n$ ), dass der Durchmesser eines Simplex in der baryzentrischen Unterteilung von  $[v_0, \dots, v_n]$  maximal  $\frac{n}{n+1} \cdot D$  ist.

Wir diskutieren zuerst die *Baryzentrische Unterteilung linearer Ketten*: Sei  $Y \subseteq \mathbb{R}^m$  eine konvexe Teilmenge. Wir definieren  $LC_n^{\text{sing}}(Y) \subseteq C_n^{\text{sing}}(Y)$  als die Untergruppe, die von linearen Simplizes  $\sigma: \Delta^n \rightarrow Y$  erzeugt wird. Lineare Simplizes sind durch die Bilder  $w_0, \dots, w_n$  der Eckpunkte eindeutig bestimmt. Die  $LC_n^{\text{sing}}(Y)$  bilden einen Unterkomplex von  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(Y)$ , dessen Randabbildung wir mit  $\partial$  bezeichnen. Wir augmentieren diesen Komplex durch

$$\partial: LC_0^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{-1}(Y) = R: [w_0] \mapsto 1,$$

wobei  $R$  der gegebene Koeffizientenring ist. Auf diesem Komplex von linearen Simplizes wollen wir einen Unterteilungsoperator  $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$  definieren, der durch baryzentrische Unterteilung gegeben ist, und außerdem zeigen, dass dieser Unterteilungsoperator kettenhomotop zur Identität ist.

Zuerst definieren wir für einen gegebenen Punkt  $p \in Y$  einen Kegel-Operator

$$p: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{n+1}^{\text{sing}}(Y): [w_0, \dots, w_n] \mapsto [p, w_0, \dots, w_n],$$

der ein  $n$ -Simplex auf den Kegel über diesem Simplex mit Spitze  $p$  abbildet. Der Rand dieses Kegels ist

$$\partial p([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - p(\partial[w_0, \dots, w_n]),$$

bestehend aus der Basis und den Kegeln über den Seitenflächen von  $[w_0, \dots, w_n]$ . Daraus folgt  $\partial \circ p + p \circ \partial = \text{id}$ , d.h.  $b$  ist eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung auf  $LC_{\bullet}^{\text{sing}}(Y)$ .

Der Unterteilungsoperator  $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$  wird nun durch Rekursion über  $n$  definiert. Der Rekursionsanfang ist  $S = \text{id}$  auf  $LC_{-1}^{\text{sing}}(Y)$  und  $LC_0^{\text{sing}}(Y)$ . Für  $n \geq 1$  und ein lineares  $n$ -Simplex  $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$  sei  $b_\lambda$  das Bild des Baryzentrums von  $\Delta^n$  unter der Abbildung  $\lambda$ .<sup>1</sup> Wir definieren  $S(\lambda) := b_\lambda(S(\partial\lambda))$ , wobei hier  $b_\lambda: LC_{n-1}^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$  der eben definierte Kegel-Operator für den Punkt  $b_\lambda$  ist. Geometrisch ist  $S(\lambda)$  eine Linearkombination der Simplizes der baryzentrischen Unterteilung von  $\lambda$ . Durch Induktion über  $n$  sehen wir, dass der so definierte Unterteilungsoperator  $S: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_n^{\text{sing}}(Y)$  mit den Randabbildungen kompatibel ist. Der Induktionsanfang auf  $LC_0^{\text{sing}}(Y)$  ist direkt zu sehen, und für den Induktionsschritt haben wir für ein lineares  $n$ -Simplex  $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$

$$\partial S\lambda = \partial(b_\lambda(S\partial\lambda)) = S\partial\lambda - b_\lambda(\partial S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda.$$

Die erste Gleichung ist dabei die Definition von  $S$ , die zweite folgt aus  $\partial \circ b_\lambda + b_\lambda \circ \partial = \text{id}$ , in der dritten benutzen wir die Induktionsvoraussetzung, und die vierte folgt aus  $\partial^2 = 0$ .

Zum Schluss müssen wir noch rekursiv eine Kettenhomotopie  $T: LC_n^{\text{sing}}(Y) \rightarrow LC_{n+1}^{\text{sing}}(Y)$  zwischen dem Unterteilungsoperator  $S$  und der Identität konstruieren. Auf  $LC_{-1}(Y)$  setzen wir  $T = 0$ , und für  $n \geq 0$  definieren wir  $T(\lambda) = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$ . Geometrisch betrachten wir hier eine Unterteilung von  $\Delta^n \times [0, 1]$  durch Kegel über Simplizes in  $\Delta^n \times \{0\} \cup \partial\Delta^n \times [0, 1]$ , deren Spitze das Baryzentrum von  $\Delta^n \times \{1\}$  ist. Die Kettenhomotopie  $T(\lambda)$  für ein lineares  $n$ -Simplex  $\lambda: \Delta^n \rightarrow Y$  ist das Bild dieser Unterteilung unter der Projektion  $\Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$ . Wir zeigen  $\partial \circ T + T \circ \partial = \text{id} - S$  durch Induktion über  $n$ . Der Basisfall  $n = -1$  ist klar, da  $T = 0$  und  $S = \text{id}$ . Für den Induktionsschritt haben wir

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial(b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(\partial(\lambda - T\partial\lambda)) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda(S\partial\lambda + T\partial\partial\lambda) \\ &= \lambda - T\partial\lambda - S\lambda. \end{aligned}$$

**PROPOSITION 5.4.7.** *In der Situation von Definition 5.4.2 ist die Inklusion  $\iota: C_{\bullet}^{\text{alt}}(X) \hookrightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$  eine Kettenhomotopieäquivalenz, d.h. es gibt eine Abbildung  $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{alt}}(X)$ , so dass  $\iota \circ \rho$  und  $\rho \circ \iota$  kettenhomotop zur jeweiligen Identitätsabbildung sind. Insbesondere induziert  $\iota$  Isomorphismen  $H_n^{\text{alt}}(X) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X)$ .*

**BEWEIS.** Um die Abbildung  $\rho$  mit den gewünschten Eigenschaften zu definieren, benutzen wir die zuvor diskutierte baryzentrische Unterteilung linearer Simplizes.

Zuerst definieren wir den allgemeinen Unterteilungsoperator für singuläre Ketten:

$$S: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X): (\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \mapsto \sigma_*(S\Delta^n)$$

als Bild des Unterteilungsoperators in  $\Delta^n$  unter  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ , im Prinzip eine baryzentrische Unterteilung des Bildes von  $\sigma$ . Der Unterteilungsoperator ist kompatibel

<sup>1</sup>Alternativ können wir auch den Fall  $n = 0$  so behandeln, wenn wir vereinbaren, dass der Kegel mit Spitze  $p$  und leerer Grundfläche genau aus der Spitze besteht.

mit den Randabbildungen in  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$ :

$$\begin{aligned}\partial S\sigma &= \partial\sigma_*(S\Delta^n) = \sigma_*\partial S\Delta^n = \sigma_*S\partial\Delta^n = \sigma_*S\left(\sum_i(-1)^i\Delta_i^n\right) \\ &= \sum_i(-1)^i\sigma_*(S\Delta_i^n) = \sum_i(-1)^iS(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S\left(\sum_i(-1)^i\sigma|_{\Delta_i^n}\right) = S(\partial\sigma).\end{aligned}$$

An dieser Stelle wird insbesondere benutzt, dass die Unterteilung für lineare Simplizes im Komplex der linearen Ketten mit der Randabbildung kompatibel ist.

Wir definieren die Abbildung

$$T: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(X): \sigma \mapsto \sigma_*(T\Delta^n)$$

und zeigen, dass diese eine Kettenhomotopie zwischen dem Unterteilungsoperator und der Identität ist:

$$\begin{aligned}\partial T\sigma &= \partial\sigma_*(T\Delta^n) = \sigma_*\partial T\Delta^n = \sigma_*(\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) \\ &= \sigma - S\sigma - \sigma_*T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma).\end{aligned}$$

Auch hier ist der entscheidende Schritt wieder die Kettenhomotopie für lineare Simplizes.

Wir können nun den Unterteilungsoperator mehrfach anwenden, und  $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$  liefert eine Kettenhomotopie zwischen  $S^m$  und der Identität:

$$\begin{aligned}\partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (\text{id} - S)S^i \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = \text{id} - S^m.\end{aligned}$$

Nun wenden wir das Lemma von Lebesgue (s. 5.4.8) an: das Standard  $n$ -Simplex  $\Delta^n$  ist mit der von  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzierten Metrik ein kompakter metrischer Raum, und für ein singuläres Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  erhalten wir eine offene Überdeckung  $\sigma^{-1}(U_i)$  aus der gegebenen Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $X$ . Nach dem Lemma von Lebesgue 5.4.8 und Übungsaufgabe 5.4.6 existiert dann für das gegebene Simplex  $\sigma$  ein  $m(\sigma)$ , sodass  $S^{m(\sigma)}(\sigma)$  in  $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$  liegt (der Durchmesser der Simplizes der iterierten baryzentrischen Unterteilung muss unter der Lebesgue-Zahl der Überdeckung von  $\Delta^n$  liegen).

Wir definieren nun

$$D: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{n+1}^{\text{sing}}(X): (\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \mapsto D_{m(\sigma)}\sigma.$$

Das Ziel ist,  $D$  als Kettenhomotopie zwischen der Identität auf  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$  und einer Abbildung  $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  (zusammengesetzt mit der Inklusion  $\iota: C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X)$ ) zu verstehen. Wir benutzen dazu die Kettenhomotopie-Gleichung

$$\partial D + D\partial = \text{id} - \rho$$

als Definition für  $\rho := \text{id} - \partial D - D\partial$ . Das so definierte  $\rho$  ist kompatibel mit Randabbildungen

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \rho(\partial\sigma).$$

Wegen  $\partial D_{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)}\partial = \text{id} - S^{m(\sigma)}$  folgt

$$\rho\sigma = \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D(\partial\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma).$$

Der erste Term  $S^{m(\sigma)}\sigma$  liegt in  $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$  nach Definition von  $m(\sigma)$ . Der zweite Term  $D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)$  ist eine Linearkombination von Termen der Form  $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$ , wobei  $\sigma_j$  die entsprechende Seite von  $\sigma$  ist. Damit ist  $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$  und sind die Terme  $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$  Linearkombinationen von  $TS^i(\sigma_j)$  mit  $i \geq m(\sigma_j)$ , und diese liegen in  $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$ , da  $T$  die Gruppe  $C_{n-1}^{\mathfrak{U}}(X)$  nach  $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$  abbildet. Damit haben wir gezeigt, dass  $D$  eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Komposition  $\iota\rho$  für eine Kettenabbildung  $\rho: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  ist. Außerdem gilt  $\rho\iota = \text{id}$ , da für alle Simplizes in  $C_n^{\mathfrak{U}}(X)$  gilt  $m(\sigma) = 0$ , was bedeutet, dass  $D$  auf  $C_{\bullet}^{\mathfrak{U}}(X)$  gleich null ist. Insbesondere ist  $\rho$  ein Kettenhomotopie-Inverses für  $\iota$ .  $\square$

LEMMA 5.4.8 (Lebesgue). *Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum mit Metrik  $d$  und sei  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung. Dann existiert eine Zahl  $\delta > 0$ , so dass jede Menge  $A \subseteq X$  mit Durchmesser*

$$\text{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \delta$$

*in einer Teilmenge  $U_i$  der Überdeckung enthalten ist.*

### 5.5. Anwendung: Topologie des $\mathbb{R}^n$

PROPOSITION 5.5.1. (1) *Für eine Einbettung  $\iota: D^k \hookrightarrow S^n$  gilt  $\tilde{H}_i(S^n \setminus D^k) = 0$  für alle  $i$ .*

(2) *Für eine Einbettung  $S^k \hookrightarrow S^n$  mit  $0 \leq k < n$  gilt*

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus S^k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n - k - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

BEWEIS. (a) Beweis durch Induktion über  $k$ . Für  $k = 0$  haben wir einen Homöomorphismus  $S^n \setminus \iota(D^0) \cong \mathbb{R}^n$ . Für den Induktionsschritt benutzen wir, dass  $D^k$  und  $[0, 1]^k$  homöomorph sind. Wir überdecken  $S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{\frac{1}{2}\})$  durch  $A = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times [0, \frac{1}{2}])$  und  $B = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times [\frac{1}{2}, 1])$ , und haben  $A \cap B = S^n \setminus \iota([0, 1]^k)$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt  $\tilde{H}_i(A \cup B) = 0$  für alle  $i$ , und die Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 liefert Isomorphismen

$$\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^k)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$$

für alle  $i$ . Eine nicht-triviale Homologiekategorie  $\alpha \in \tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^k))$  liefert dann eine nicht-triviale Homologiekategorie in  $A$  oder  $B$ . Wiederholung dieses Arguments liefert eine Sequenz von Intervallen  $[0, 1] = I_0 \supset I_1 \supset \dots$  (wobei das Intervall  $I_j$  die Länge  $2^{-j}$  hat), so dass die nicht-triviale Homologiekategorie  $\alpha$  für alle  $m$  in  $S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times I_m)$  nicht-trivial ist. Auf der anderen Seite haben wir

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times I_m) = S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{t\}),$$

wobei  $t \in [0, 1]$  der Konvergenzpunkt der Intervallschachtelung  $I_m$  ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist aber  $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota([0, 1]^{k-1} \times \{t\})) = 0$ . Dies widerspricht aber der Tatsache, dass Homologie mit gefilterten Kolimits vertauscht, cf. Übungsaufgabe 5.2.16.

(2) Induktion über  $k$ . Für den Fall  $k = 0$  haben wir einen Homöomorphismus  $S^n \setminus \iota(S^0) \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$ . Für den Induktionsschritt überdecken wir  $S^k$  durch zwei Hemisphären  $D_+^k$  und  $D_-^k$ , die sich im Äquator  $S^{k-1}$  schneiden. Wir wenden wieder die Mayer–Vietoris-Sequenz 3.1.11 auf die Überdeckung von  $S^n \setminus \iota(S^k)$  durch  $S^n \setminus \iota(D_+^k)$  und  $S^n \setminus \iota(D_-^k)$  an. Nach (1) ist  $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota(D_{\pm}^k)) = 0$ , und wir erhalten Isomorphismen  $\tilde{H}_i(S^n \setminus \iota(S^k)) \cong \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus \iota(S^{k-1}))$ .  $\square$

**BEMERKUNG 5.5.2.** Der Spezialfall  $n = 1$ ,  $k = 2$  in (b) ist der Jordansche Kurvensatz. Eine einfache Kurve ist eine injektive stetige Abbildung  $\gamma: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ . Der Jordansche Kurvensatz besagt, dass das Komplement einer einfachen stetigen Kurve genau zwei (Weg-)Zusammenhangskomponenten hat, eine beschränkte (das Innere) und eine unbeschränkte (das Äußere).

**BEMERKUNG 5.5.3.** Im Beweis von Proposition 5.5.1 wird (im Kompaktheitsargument) eine Aussage speziell über singuläre Homologie genutzt. Tatsächlich folgt die entsprechende Stetigkeitsaussage, dass Homologietheorien mit gefilterten Kolimits von CW-Komplexen vertauschen, schon aus dem Wedge-Axiom (allerdings brauchen wir wirklich das Wedge-Axiom für beliebige Indexmengen). Eine verwandte Aussage für abzählbare gefilterte Kolimits von CW-Komplexen findet sich in [Hat02, Übungsaufgabe 4.F.1], s. auch MathOverflow Frage 229612 "A homology theory which satisfies Milnor's additivity axiom but not the direct limit axiom". Die Argumente dafür gehen aber über den Stoff der Vorlesung hinaus.

**ÜBUNGSAUFGABE 5.5.4.** Berechnen Sie  $H^{\text{sing}}(S^n \setminus X)$  für einen Unterraum  $X \subset S^n$ , der homöomorph zu  $S^k \vee S^l$ .

**PROPOSITION 5.5.5** (Invarianz der Dimension). (1) Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen. Wenn  $U$  und  $V$  homöomorph sind, gilt  $n = m$ .  
 (2) Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive stetige Abbildung. Dann ist  $f(U)$  offen und  $f$  ist ein Homöomorphismus auf  $f(U)$ .

**BEWEIS.** (1) Für einen Punkt  $x \in U$  haben wir mit dem Ausschneidungsaxiom  $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\})$ . Die lange exakte Sequenz (zusammen mit der Homotopieinvarianz für  $H_i(\mathbb{R}^m)$ ) liefert Isomorphismen

$$H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}).$$

Die Sphäre  $S^{m-1}$  ist Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^m \setminus \{x\}$ , also ist

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entsprechend ist  $H_n(V, V \setminus \{y\}) \cong \mathbb{Z}$  die einzige nicht-triviale relative Homologiegruppe von  $(V, V \setminus \{y\})$ . Ein Homöomorphismus  $h: U \rightarrow V$  induziert für alle  $i$  Isomorphismen

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_i(V, V \setminus \{h(x)\}),$$

also muss  $m = n$  gelten.

(2) Wir identifizieren  $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{p\}$  und zeigen, dass  $f(U) \subseteq S^n \setminus \{p\}$  offen ist. Für jeden Punkt  $x \in U$  existiert eine Kreisscheibe  $x \in D^n \subset U$ , und es reicht zu zeigen, dass  $f(D^n \setminus \partial D^n) \subset S^n$  offen ist. Die Abbildung  $f$  induziert eine Einbettung  $f: \partial D^n \hookrightarrow S^n$  (Homöomorphismus auf das Bild). Nach Proposition 5.5.1 hat  $S^n \setminus f(\partial D^n)$  zwei Wegzusammenhangskomponenten  $f(D^n \setminus \partial D^n)$  und  $S^n \setminus f(D^n)$  (Wegzusammenhang von  $S^n \setminus f(D^n)$  folgt auch aus Proposition 5.5.1). Da  $S^n \setminus f(\partial D^n)$  offen ist, sind die Wegzusammenhangskomponenten die Zusammenhangskomponenten. Für einen Raum mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten sind die einzelnen Komponenten offen, also ist  $f(D^n \setminus \partial D^n)$  offen in  $S^n \setminus f(\partial D^n)$  und damit offen in  $S^n$ .  $\square$

**BEMERKUNG 5.5.6.** Allgemein können wir für einen topologischen Raum  $X$  und einen Punkt  $x \in X$  die lokalen Homologiegruppen definieren:

$$H_{i,\{x\}}(X) := H_i(X, X \setminus \{x\})$$

Mit dem Ausschneidungsaxiom hängen diese lokalen Homologiegruppen nur von der Topologie in einer Umgebung von  $x$  ab, daher der Name. Für Mannigfaltigkeiten

sind die lokalen Homologiegruppen in einem Grad konzentriert, und dieser Grad ist genau die Dimension der Mannigfaltigkeit. Mit lokalen Homologiegruppen können Singularitäten studiert werden (Stichwort Milnor-Faser). Mit der lokalen Homologie können wir ausserdem einen topologischen Begriff von Orientierung definieren: für einen Punkt  $x \in X$  einer topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ist eine topologische Orientierung die Wahl eines Erzeugers der lokalen Homologiegruppe  $H_n(X, X \setminus \{x\})$ , s. Definition 9.1.1.

ÜBUNGSAUFGABE 5.5.7. Sei  $X$  ein Simplicialkomplex und  $\sigma$  ein Simplex. Dann gibt es Isomorphismen

$$H_i(|X|, |X| \setminus |\sigma|) \cong \tilde{H}_{i-1}(|\text{Lk}_X(\sigma)|).$$

### 5.6. Transfer und Satz von Borsuk-Ulam

Definition Überlagerung.

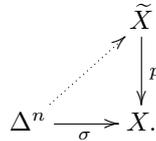
PROPOSITION 5.6.1. Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine zweifache Überlagerung. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau_*} H_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{n-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow \dots$$

BEWEIS. Die behauptete lange exakte Sequenz gehört zu einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen von  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräumen:

$$0 \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau} C_{\bullet}^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p} C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0.$$

Da  $\Delta^n$  einfach zusammenhängend ist, ist für jede stetige Abbildung  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  die zweifache Überlagerung  $p': \Delta^n \times_X \tilde{X} \rightarrow \Delta^n$  trivial. Damit gibt es für alle singulären Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  immer genau zwei Anhebungen



Das bedeutet zum Einen, dass die Abbildung  $p: C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2)$  surjektiv ist. Andererseits, da jedes singuläre Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  genau zwei Anhebungen  $\tilde{\sigma}_1$  und  $\tilde{\sigma}_2$  hat und wir  $\mathbb{F}_2$ -Koeffizienten benutzen, wird der Kern der Abbildung  $p: C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2)$  erzeugt von den Summen  $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$  der Anhebungen von Simplex  $\sigma$ . Wir definieren

$$\tau: C_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{F}_2) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(\tilde{X}, \mathbb{F}_2): \sigma \mapsto \tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2$$

und erhalten damit die behauptete kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen.  $\square$

mehr zu Transfer-Homomorphismen?

Eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  heißt *ungerade*, wenn  $f(-x) = -f(x)$  gilt.

PROPOSITION 5.6.2 (Satz von Borsuk-Ulam). Wenn eine Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  ungerade ist, hat sie ungeraden Abbildungsgrad.

BEWEIS. Wir benutzen die Transfer-Sequenz aus Proposition 5.6.1 für die Überlagerung  $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Da die Homologie von  $S^n$  nur in zwei Graden nichttrivial ist, zerlegt sich die Transfer-Sequenz in viele kurze exakte Sequenzen:

Für  $1 < i < n$  haben wir

$$0 = H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{i-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{i-1}^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) = 0$$

Für  $i = n$  haben wir

$$0 \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{p_* = 0} H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

Hierbei ist  $\tau_*$  ein Isomorphismus, da sowohl  $H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$  als auch  $H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$  beide  $\mathbb{F}_2$ -Dimension 1 haben (s. Berechnungen in Übungsaufgabe 3.1.12 und Beispiel 3.4.11) und  $\tau_*$  injektiv ist. Analog folgt, dass die Randabbildung

$$\partial: H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$$

ein Isomorphismus ist.

Ebenfalls analog erhalten wir für  $i = 1$

$$0 \rightarrow H_1^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_0^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\tau_* = 0} H_0^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_0^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

Eine ungerade Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$  induziert eine Quotientenabbildung  $\bar{f}: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ . Die Abbildungen  $f$  und  $\bar{f}$  induzieren ein kommutatives Diagramm von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{p} & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \bar{f} \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \bar{f} & & \\ 0 & \longrightarrow & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\tau} & C_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{p} & C_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Das rechte Quadrat kommutiert wegen Funktorialität der singulären Kettenkomplexe. Da  $f$  Antipodenpunkte auf Antipodenpunkte abbildet, sind die Lifts von  $\bar{f}(\sigma)$  die Bilder unter  $f$  der Lifts für  $\sigma$ , also kommutiert auch das linke Quadrat. Aus dem kommutativen Diagramm von Kettenkomplexen erhalten wir eine kommutative Leiter von langen exakten Transfer-Sequenzen. Mit dieser Leiter und einer Induktion über  $i$  sehen wir, dass alle Abbildungen  $f_*: H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$  und  $\bar{f}_*: H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$  Isomorphismen sind. Insbesondere ist die Abbildung  $f_*: H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(S^n, \mathbb{F}_2)$  ein Isomorphismus. Aus der Theorie vom Abbildungsgrad folgt, dass der Abbildungsgrad von  $f$  ungerade ist.  $\square$

**ÜBUNGSAUFGABE 5.6.3.** Berechnen Sie  $H_n(\mathbb{R}\mathbb{P}^\infty, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  mit der Transfersequenz für die Überlagerung  $S^\infty \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^\infty$ .

**KOROLLAR 5.6.4.** Für jede Abbildung  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt es einen Punkt  $x \in S^n$  mit  $g(x) = g(-x)$ .

**BEWEIS.** Die Abbildung  $f(x) := g(x) - g(-x)$  ist nach Definition ungerade, und wir wollen zeigen, dass ein  $x \in S^n$  mit  $f(x) = 0$  existiert. Falls keine Nullstelle existiert, können wir die Funktion

$$h: S^n \rightarrow S^{n-1}: x \mapsto h(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}$$

betrachten. Diese Funktion (und ihre Einschränkung auf den Äquator  $S^{n-1}$ ) ist ungerade, hat also nach einem ungeraden Abbildungsgrad. Da  $h$  aber auf ganz  $S^n$ , insbesondere auf einer ganzen Hemisphäre definiert ist, muss  $h$  nullhomotop sein, ein Widerspruch. Die ursprüngliche Funktion  $f$  muss also eine Nullstelle haben.  $\square$

**PROPOSITION 5.6.5** (Stone–Tukey, Banach–Steinhaus, ham sandwich theorem). Seien  $A_1, \dots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$  messbare beschränkte Teilmengen. Dann existiert eine Hyperebene in  $\mathbb{R}^n$ , die alle  $A_i$  gleichzeitig halbiert (d.h. so dass je die Hälfte des Volumens auf jeder Seite der Hyperebene liegt).

**BEWEIS.** Wir betrachten die Einheitskugel  $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ . Für jeden Punkt  $p \in S^{n-1}$  haben wir die affinen Hyperebenen, die senkrecht auf dem Ortsvektor von  $p$  stehen. Diese Hyperebenen haben eine Orientierung, indem wir festlegen, dass der Ortsvektor zur +-Seite zeigt. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es für jeden solchen Ortsvektor eine dazu senkrechte Hyperebene, die  $A_n$  halbiert. Wenn es mehrere solche Hyperebenen gibt, die  $A_n$  halbieren, bilden die Schnittpunkte mit

der Nullpunktsgerten zum Ortsvektor  $p$  aus Monotoniegründen ein Intervall, und wir wählen als Schnittebene diejenige, die zum Mittelpunkt des Intervalls gehört. Auf diese Art erhalten wir für jeden Punkt  $p \in S^{n-1}$  genau eine Hyperebene  $E(p)$ , die senkrecht auf  $p$  steht und  $A_n$  halbiert.

Wir definieren nun  $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , indem die  $i$ -te Komponente von  $f(p)$  genau durch das Volumen von  $A_i$  auf der  $+$ -Seite von  $E(p)$  gegeben ist. Diese Abbildung ist stetig (im Wesentlichen liegt das daran, dass der Schnitt einer messbaren Menge mit der Hyperebene Volumen 0 hat).

Nach dem Satz von Borsuk–Ulam bzw. Korollar 5.6.4 gibt es einen Punkt  $p$  mit  $f(p) = f(-p)$ . Die Hyperebenen zu  $p$  und  $-p$  sind gleich, sie unterscheiden sich nur in der Orientierung. Die Aussage  $f(p) = f(-p)$  bedeutet dann, dass für jede der Teilmengen  $A_i$  das Volumen auf beiden Seiten der relevanten Hyperebene zu  $p$  gleich ist, wir haben also eine geeignete Schnitthyperebene gefunden.  $\square$

Radon, Lusternik–Schnirelman als Korollare bzw. Fairteilung

### 5.7. Ausblick: diskrete Morse-Theorie

### 5.8. Simpliciale Approximation und Fixpunktsatz von Lefschetz



## Kohomologie

Die Grundidee der Kohomologie ist, statt eines Kettenkomplexes den dualen Kokettenkomplex zu betrachten.

Dadurch, dass “nur” dualisiert wird, hängt Kohomologie immer noch eng mit Homologie zusammen, was durch den Satz über universelle Koeffizienten präzisiert wird. Das Dualisieren hat allerdings zur Folge, dass die Elemente in Kohomologie als Funktionen auf Ketten interpretiert werden können, wodurch Kohomologie in verschiedenen Zusammenhängen (Kozykel-Beschreibung des Übertrags bei der Addition, Kozykel-Hindernis für Exaktheit geschlossener 1-Formen, Kozykel-Hindernis für die Realisierbarkeit des Penrose-Dreiecks) natürlich auftaucht. Weiterhin gibt es auf der Kohomologie eine neue Struktur, die auf der Homologie so nicht zu sehen ist: das Cup-Produkt. Durch das Cup-Produkt wird die Kohomologie zu einem Ring, und diese Zusatzstruktur liefert dann feinere Information als nur die abelsche Gruppenstruktur der Kohomologie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten. Diese Ringstruktur kann zum Beispiel benutzt werden, um zu sehen, dass die Dimension von reellen Divisionsalgebren eine Potenz von 2 sein muss (Satz von Hopf), oder um charakteristische Klassen für Vektorbündel zu definieren und verstehen.

### 6.1. Definition

DEFINITION 6.1.1. Sei  $X$  ein topologischer Raum und sei  $R$  ein Ring. Wir definieren den singulären Kokettenkomplex

$$C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R) := \text{Hom}_R(C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R), R)$$

als dualen Komplex, cf. Beispiel A.3.5, zum singulären Kettenkomplex  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R)$  aus Definition 5.2.4.

Die singuläre Kohomologie ist die Kohomologie dieses Kokettenkomplexes

$$H_{\text{sing}}^n(X, R) := H^n(C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R)).$$

BEMERKUNG 6.1.2. Nach Definition ist  $C_n^{\text{sing}}(X, R)$  der freie  $R$ -Modul, der von den singulären Simplizes  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  erzeugt wird. Der duale Modul  $C_{\text{sing}}^n(X, R)$  ist dann einfach der  $R$ -Modul der Mengen-Abbildungen von singulären Simplizes nach  $R$ :

$$C_{\text{sing}}^n(X, R) := \text{Hom}_{\text{Set}}(\text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X), R).$$

Eine simpliziale Kokette ordnet also jedem Simplex ein Element aus  $R$  zu.

Auch die Korandabbildung  $d_n: C_{\text{sing}}^n(X, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{n+1}(X, R)$  kann genauer beschrieben werden. Der Korand einer Abbildung  $\phi: \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X) \rightarrow R$  ordnet einem  $n+1$ -Simplex  $\sigma$  die alternierende Summe der Werte von  $\phi$  auf dem Rand von  $\sigma$  zu:

$$d_n(\phi)(\sigma) = \sum_i (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{n+1}]}) .$$

In dieser Interpretation sind Kozykel, also Elemente

$$\phi \in \ker \left( d_n: C_{\text{sing}}^n(X, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{n+1}(X, R) \right),$$

genau die Abbildungen  $\phi: C_n^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow R$ , die auf Rändern, also dem Bild von  $\partial: C_{n+1}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X, R)$ , verschwinden.

**BEMERKUNG 6.1.3.** Ein wesentlicher Unterschied zwischen singulären Ketten und Koketten ist, dass singuläre Ketten immer endliche Linearkombinationen von Simplizes sind, wohingegen singuläre Koketten Abbildungen sind, die auf möglicherweise unendlich vielen Simplizes von 0 verschiedene Werte annehmen.

Der folgende Satz sagt, dass wir in geeigneten Fällen die Kohomologie verstehen können, wenn wir die Homologie verstehen:

**PROPOSITION 6.1.4** (Universelle Koeffizienten Kohomologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $G$  eine abelsche Gruppe. Dann gibt es eine (nicht-kanonisch) spaltende kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), G) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0.$$

**BEWEIS.** Folgt direkt aus Satz A.6.14 und Definition 6.1.1 der singulären Kohomologie.  $\square$

**BEMERKUNG 6.1.5.** Analoge Aussagen gelten allgemeiner statt für  $R = \mathbb{Z}$  auch für  $R = K$  ein Körper oder  $R$  ein Hauptidealring. Für den speziellen Fall eines Körpers  $K$  vereinfacht sich durch das Verschwinden der Ext-Gruppen die universelle Koeffizientenformel zu

$$H_{\text{sing}}^n(X, K) \cong \text{Hom}_K(H_n^{\text{sing}}(X, K), K).$$

Für Körper ist also die Kohomologie einfach der duale  $K$ -Vektorraum zur Homologie.

**Beispiele.** Im Rest des Abschnitts diskutieren wir ein paar Beispiele, in denen wir konkrete Interpretationen für Kohomologiegruppen geben können.

**BEISPIEL 6.1.6.** Die nullte singuläre Kohomologie kann direkt aus der Definition ermittelt werden:  $C_{\text{sing}}^0(X, R)$  sind genau die Mengen-Abbildungen  $\phi: X \rightarrow R$ . Kozykel sind dann diejenigen Abbildungen  $\phi: X \rightarrow R$ , die für jedes singuläre 1-Simplex  $\gamma: \Delta^1 \rightarrow X$  die Gleichung  $\phi(\gamma(v_1)) - \phi(\gamma(v_0)) = 0$  erfüllen, die also am Anfangs- und Endpunkt des Weges  $\gamma$  den gleichen Wert haben. Kozykel sind also genau die Abbildungen, die auf Wegzusammenhangskomponenten konstant sind. Insbesondere ist  $H_{\text{sing}}^0(X, R)$  der  $R$ -Modul der  $R$ -wertigen Abbildungen auf den Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ , und wir haben

$$H_{\text{sing}}^0(X, R) \cong \text{Hom}_R(H_0^{\text{sing}}(X, R), R).$$

$\square$

**BEISPIEL 6.1.7** (Kirchhoff-Regeln). Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk, modelliert als endlichen Graphen  $\Gamma = (V, E)$ , bei dem die elektrischen Bauelemente auf den Kanten  $E$  sitzen. Wir wollen die Kirchhoff-Regeln (ko)homologisch interpretieren und betrachten dafür den Graphen  $\Gamma$  als eindimensionalen CW-Komplex.

Eine homologische Interpretation der Knotenregel:

In einem Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerkes ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme.

Wir modellieren die Ströme im Netzwerk als  $\mathbb{R}$ -Linearkombination  $\sum_k I_k e_k$ , wobei  $I_k \in \mathbb{R}$  der Strom ist, der durch die Kante  $e_k$  fließt. Um das sinnvoll interpretieren zu können, haben wir für jede Kante eine Orientierung, eine Richtung, gewählt, und das Vorzeichen von  $I_k$  gibt dann an, ob der Strom in die für die Kante gewählte

Richtung fließt oder nicht. Die Knotenregel besagt dann, dass für jeden Knotenpunkt  $v$  des Netzwerks gilt

$$\sum_{k:q(e_k)=v} I_k - \sum_{k:z(e_k)=v} I_k = 0$$

Die erste Summe geht über alle Kanten mit Quelle  $v$  und die zweite Summe über alle Kanten mit Ziel  $v$ . Die Summe über die Koeffizienten der Kanten, mit Vorzeichen nach Richtung der Kante ist aber genau die Randabbildung im zellulären Komplex für den CW-Komplex  $\Gamma$ . Die Knotenregel besagt also, dass Ströme im elektrischen Netzwerk einen 1-Zykel bilden.

*Eine kohomologische Interpretation der Maschenregel:*

Alle Teilspannungen einer Masche in einem elektrischen Netzwerk addieren sich zu null.

Wir wählen wieder Richtungen für die Kanten im Graphen und modellieren die Spannungen im Netzwerk als Abbildung  $E \rightarrow \mathbb{R}: e_k \mapsto U_k$ , die der Kante  $e_k$  die anliegende Spannung  $U_k$  zuordnet. Das Vorzeichen der Spannung zeigt wieder an, ob das Spannungsgefälle in Richtung der Kante zeigt oder in die entgegengesetzte Richtung. Wir haben also dann eine 1-Kokette. Wenn wir an einem beliebigen Knoten  $v$  des Netzwerks ein Potential wählen, können wir allen anderen Knotenpunkten  $w$  eindeutig ein Potential zuordnen, da die Potentialdifferenz zwischen  $v$  und  $w$  die Summe der Spannungen (mit Vorzeichen!) für die Kanten eines Verbindungsweges zwischen  $v$  und  $w$  ist. (Vergleichen Sie das mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.) Dies ist unabhängig von der Wahl des Weges zwischen  $v$  und  $w$ , nach der Maschenregel. Die Maschenregel besagt also, dass Spannungen im elektrischen Netzwerk einen 1-Korand bilden.

Diese Interpretation liegt dem algebraischen Beweis des Kirchhoff-Satzes zur Berechnung von Strömen und Spannungen durch Nerode und Shank zugrunde:

- A. Nerode und H. Shank: An algebraic proof of Kirchhoff's network theorem. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 244–247.

Es gibt von diesen Ergebnissen auch eine höherdimensionale Variante:

- M.J. Catanzaro, V.Y. Chernyak und J.R. Klein. Kirchhoff's theorems in higher dimensions and Reidemeister torsion. *Homology Homotopy Appl.* 17 (2015), no. 1, 165–189.

□

**BEISPIEL 6.1.8.** Allgemeiner können wir die erste Kohomologie als Integrationsproblem interpretieren. Die 1-Koketten sind Abbildungen  $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}([0, 1], X) \rightarrow R$ , die jedem Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  einen Wert zuordnen. Die Korandabbildung

$$d: C_{\text{sing}}^1(X, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^2(X, R)$$

bildet eine 1-Kokette  $\phi: \text{Hom}_{\mathbf{Top}}([0, 1], X) \rightarrow R$  auf die 2-Kokette  $d\phi = \phi \circ \partial$  ab, und für ein 2-Simplex  $\sigma: \Delta^2 \rightarrow X$  ist  $d\phi(\sigma) = \phi(\partial\sigma)$ .

Die 1-Kozykel sind also diejenigen Abbildungen  $\phi: \text{Hom}_{\mathbf{Top}}([0, 1], X) \rightarrow R$ , bei denen die Summe der Werte auf dem Rand aller 2-Simplizes immer 0 ergibt. Diese Bedingung entspricht der Homotopieinvarianz des Wegintegrals für geschlossene 1-Formen; es ist eine lokale Bedingung, vergleichbar der Aussage, dass jedes Vektorfeld lokal ein Gradientenvektorfeld oder jede 1-Form lokal Differential einer Funktion ist.

Auf der anderen Seite sind die 1-Koränder genau die Abbildungen

$$\phi: \text{Hom}_{\mathbf{Top}}([0, 1], X) \rightarrow R,$$

für die eine Abbildung  $\psi: X \rightarrow R$  existiert, so dass für jeden Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  gilt  $\phi(\gamma) = \psi(\gamma(0)) - \psi(\gamma(1))$ . Dies ist eine globale Aussage, vergleichbar der Existenz

einer Stammfunktion, eines Potentials (wie bei der Diskussion der Maschenregel) oder der Exaktheit einer geschlossenen 1-Form.

Die Kohomologiegruppe  $H^1$  misst also genau diesen Unterschied zwischen lokaler und globaler Existenz von Stammfunktionen oder Potentialen.  $\square$

BEISPIEL 6.1.9. Die Analogie zu Differentialformen und Integrierbarkeit im vorigen Beispiel ist nicht zufällig. Ein weiteres Beispiel für einen Kokettenkomplex ist der De-Rham-Komplex für eine glatte Mannigfaltigkeit  $M$  (siehe Vorlesung Analysis auf Mannigfaltigkeiten). Der Eintrag im Grad  $n$  ist der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\Omega^n(M)$  der glatten  $n$ -Formen auf  $M$ . Die Korandabbildung  $d: \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^{n+1}(M)$  ist die äußere Ableitung von Differentialformen. Die Kohomologie dieses Kokettenkomplexes ist die De-Rham-Kohomologie  $H_{\text{dR}}^n(M) := H^n(\Omega^\bullet(M), d)$  der Mannigfaltigkeit  $M$ . Die De-Rham-Kohomologie misst genau den Unterschied zwischen geschlossenen (lokal exakten) und (global) exakten Formen.  $\square$

**Unmögliche Figuren nach Penrose.** Wir wollen kurz unmögliche Figuren wie das Penrose-Dreieck in Abbildung 2 kohomologisch interpretieren. Dafür benötigen wir die sogenannte Čech-Kohomologie.

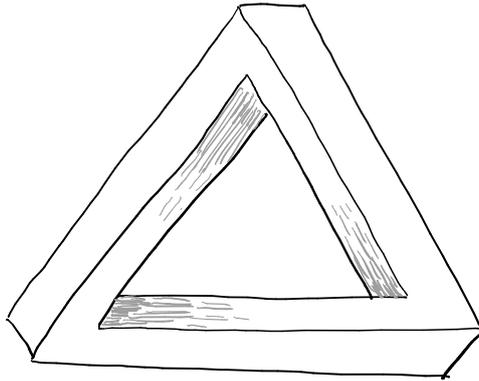


ABBILDUNG 2. Das Penrose-Dreieck.

DEFINITION 6.1.10. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\{U_i\}_{i \in I}$  eine offene Überdeckung. Zu dieser Überdeckung haben wir den Čech-Komplex  $\check{C}(\{U_i\}_{i \in I})$  aus Beispiel 5.1.15. Für diese simpliziale Menge haben wir einen Kettenkomplex

$$\check{C}_\bullet(X, \{U_i\}_{i \in I}) := C_\bullet(\check{C}(\{U_i\}_{i \in I})).$$

Die Čech-Kohomologie für die Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $A$  ist die Kohomologie des dazu dualen Kokettenkomplexes

$$\check{H}^\bullet(X, \{U_i\}_{i \in I}; A) := H^\bullet(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\check{C}^\bullet(X, \{U_i\}_{i \in I}), A)).$$

BEMERKUNG 6.1.11. Nach Definition ist also ein Kozykel in der Čech-Kohomologie durch eine Abbildung gegeben, die jeder Indexmenge  $\emptyset \neq J \subseteq I$  ein Element aus der abelschen Gruppe  $A$  zuordnet (und das dann die Kozykelbedingung erfüllt).

BEMERKUNG 6.1.12. Sei  $X$  ein CW-Komplex. Wenn für alle Teilmengen  $\emptyset \neq J \subset I$  die Schnittmenge  $\bigcap_{j \in J} U_j$  leer oder zusammenziehbar ist, dann sind Čech-Kohomologie und singuläre Kohomologie isomorph, s. auch die frühere Übungsaufgabe 5.1.19. Tatsächlich reicht es, wenn die entsprechenden nichtleeren Schnittmengen triviale reduzierte Kohomologie haben.

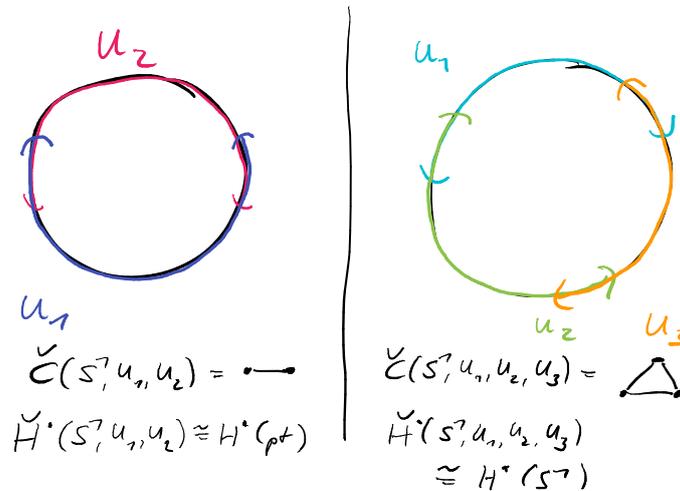


ABBILDUNG 3. Čech-Kohomologie für zwei Überdeckungen von  $S^1$ .

ÜBUNGSAUFGABE 6.1.13. Überzeugen Sie sich, dass die Čech-Kohomologie für eine azyklische Überdeckung der 2-Sphäre in Übungsaufgabe 5.1.19 tatsächlich isomorph zur singulären Kohomologie ist.

Nach diesem kurzen Abriss zur Čech-Kohomologie können wir nun die Nicht-Realisierbarkeit des Penrose-Dreiecks kohomologisch interpretieren. Dabei folgen wir

- R. Penrose. On the cohomology of impossible figures. Leonardo 25, Visual Mathematics: special double issue (1992), 245–247.

Wir versuchen, das Dreieck zu bauen. Lokal ist das Problem lösbar, die einzelnen Eckteile sind einfach realisierbar, s. Abbildung 4. Für das Zusammenkleben der Teile müssen wir uns jetzt aber klarmachen, dass die Zeichnung eine Mehrdeutigkeit beinhaltet: das Eckteil 1 in der Zeichnung ist nur die Projektion des echten Eckteils. Für diese Projektion ist aus der Zeichnung nicht klar, welche Entfernung vom Auge der betrachtenden Person das realisierte Eckteil hat. Das können wir natürlich quantifizieren: Für den gewählten Punkt  $P_{12}$  im blauen Kleberand ist  $d(a, P_{12})$  die Entfernung des Punkts  $P_{12}$  vom betrachtenden Auge. Analog können wir das auch für alle anderen markierten Punkte machen. Diese Entfernungen sind nicht aus der Zeichnung abzulesen, jedes Teil kann mit Skalierung in beliebiger positiver Entfernung realisiert werden. Dieser Skalierungsfaktor ist eine Unbestimmtheit/Mehrdeutigkeit in der Zeichnung, den wir als Element in der abelschen Gruppe  $\mathbb{R}^+$  (positive reelle Zahlen mit Multiplikation als Gruppenstruktur) auffassen wollen.

Wo ist jetzt die Kohomologie? Das Bild des Dreiecks kann auf einem Kreisring realisiert werden, der homotopieäquivalent zu  $S^1$  ist. Wir können nun das Penrose-Dreieck (oder den umgebenden Kreisring) mit drei Teilmengen wie in Abbildung 3 so überdecken, dass die einzelnen Teilmengen die realisierbaren Eckteile sind, sagen wir, dass die Teilmenge  $U_i$  zum Eckteil  $i$  gehört. Nun betrachten wir die Čech-Kohomologie für diese drei-elementige Überdeckung, mit Koeffizienten in  $\mathbb{R}^+$ .

Versuchen wir nun, das Dreieck aus den drei realisierten Eckteilen zusammenzukleben. Da die Abstände der realisierten Eckteile vom Auge nicht wohldefiniert sind, können wir für zwei Teile, die wir zusammenkleben wollen, die Verhältnisse

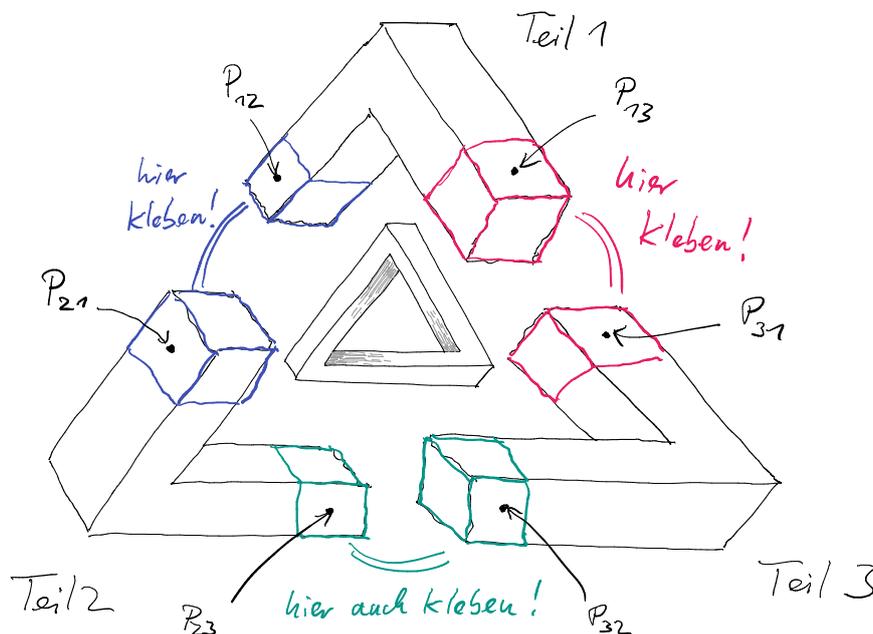


ABBILDUNG 4. Versuch, das Penrose-Dreieck zusammenzukleben.

der Abstände betrachten:

$$d_{ij} := \frac{d(a, P_{ij})}{d(a, P_{ji})} \in \mathbb{R}^+.$$

Mit diesen Abständen erhalten wir einen Kozykel in der Čech-Kohomologie

$$\check{H}^1(S^1, \{U_1, U_2, U_3\}; \mathbb{R}^+) :$$

für jede Schnittmenge  $U_i \cap U_j$ , wo wir die Eckteile  $i$  und  $j$  zusammenkleben wollen, haben wir das Verhältnis der Abstände  $d_{ij}$ . Die Kozykelbedingung ist automatisch erfüllt, weil alle dreifachen Schnitte in der Überdeckung leer sind.

Jetzt müssen wir noch klären, was 1-Koränder sind. Eine 0-Kokette ist eine Abbildung, die jeder Teilmenge  $U_i$  eine Umskalierung  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  der Entfernung vom Auge für das Eckteil  $i$  zuordnet. Der Korand für eine solche Kokette  $\lambda$  ist genau  $\delta\lambda: \{i, j\} \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ . Eine 1-Kokette (also eine Zuordnung von  $\{i, j\}$  zu Zahlen  $d_{ij}$ ) ist also genau dann ein Korand, wenn für jedes Eckteil ein  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$  existiert, so dass  $d_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$  ist, d.h. dass wir die Realisierungen der Eckteile mit den  $\lambda_i$  so umskalieren können, dass die Entfernungen zum Auge dann genau die Realisierungsbedingung  $d_{ij} = 1$  erfüllt und wir die drei Eckteile zum Dreieck zusammenkleben können.

Warum ist also das Penrose-Dreieck nicht realisierbar? Wir können auf der relevanten Čech-Kohomologiegruppe eine Auswertungsabbildung definieren:

$$\check{H}^1(S^1, \{U_1, U_2, U_3\}; \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^+ : \{d_{ij}\}_{i,j \in \{1,2,3\}} \mapsto d_{12}d_{23}d_{31}.$$

Diese bildet einen Kozykel auf das Produkt  $d_{12}d_{23}d_{31}$  der drei Skalierungsfaktoren ab. Für einen Korand haben wir

$$d_{12}d_{23}d_{31} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = 1.$$

Insbesondere ist die Auswertungsabbildung auch tatsächlich wohldefiniert. Ein Kozykel, der unter der Auswertungsabbildung auf einen Wert  $\neq 1$  geht, ist also nicht-trivial in der Čech-Kohomologiegruppe. (Die Auswertungsabbildung ist übrigens auch invariant unter Skalierungen der Entfernungen der einzelnen Teile.)

Für das Penrose-Dreieck können wir nun den oben definierten Kozykel betrachten: Nehmen wir an, dass wir die Teile 2 und 3 zusammenkleben können, dass also  $d_{23} = 1$  ist. Dann ist nach Perspektive der Punkt  $P_{12}$  näher am Auge, als  $P_{21}$ , und der Punkt  $P_{13}$  weiter weg, als  $P_{31}$ . Dann ist  $d_{12} < 1$  und  $d_{31} < 1$ . Insbesondere kann das Produkt in der Auswertungsabbildung nicht 1 sein. Der Kozykel für das Penrose-Dreieck ist also nicht-trivial, und das Dreieck kann nicht realisierbar sein.

Es gibt noch andere unmögliche Figuren, die auf den Necker-Würfeln basieren und in denen Kohomologie mit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Koeffizienten benutzt wird, eine kurze Diskussion von Tony Phillips findet sich unter

<http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2014-10>

Spontan ergeben sich viele interessante Fragen: Gibt es außer  $\mathbb{R}^+$  und  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  noch andere abelsche Gruppen, die bei der Beschreibung von Unbestimmtheiten bzw. Mehrdeutigkeiten in unmöglichen Figuren auftauchen können? Kann diese Methode auch auf höherdimensionale unmögliche Objekte angewendet werden, z.B. für die unmöglichen 4-dimensionalen Objekte in

- Scott Kim. “An impossible four-dimensional illusion”, Hypergraphics: Visualizing Complex Relationships in Art, Science and Technology, D. Brisson ed., Westview Press (1978), pp.187–239.

Gibt es für solche höherdimensionalen “optischen Täuschungen” auch höhere Čech-Kohomologiegruppen, die relevant sind? Für 2D-Illusionen in der Zeichenebene scheinen immer nur Wedge-Summen von Kreisen relevant, deren Čech-Kohomologie ab Grad 2 verschwindet. Kann das Knoten-Kriterium für Nicht-Realisierbarkeit von Cerf kohomologisch verstanden werden?

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/cerf/>

## 6.2. Eilenberg–Steenrod-Axiome für Kohomologie

Wir diskutieren die wesentlichen Eigenschaften der singulären Kohomologie:

**Funktorialität.** Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen haben wir die induzierte Abbildung  $f_*: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(Y, R)$  auf singulären Kettenkomplexen. Auf den Kokettenkomplexen erhalten wir durch dualisieren eine induzierte Abbildung  $f^*: C_{\text{sing}}^{\bullet}(Y, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R)$ , gegeben durch Komposition einer  $n$ -Kokette  $\phi: \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y) \rightarrow R$  mit der Abbildung

$$f_*: \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta^n, Y).$$

Der Wert dieser  $n$ -Kokette  $f^*(\phi) = \phi \circ f$  auf einem Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  ist also der Wert von  $\phi$  auf dem Simplex  $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$ . Wir erhalten dann eine induzierte Abbildung

$$f^*: H_{\text{sing}}^n(Y, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X, R)$$

auf der singulären Kohomologie.

LEMMA 6.2.1. *Singuläre Kohomologie ist ein kontravarianter Funktor*

$$H_{\text{sing}}^n(-, R): \mathbf{Top} \rightarrow R\text{-mod.}$$

Die Beschreibung der singulären Kohomologie in Proposition 6.1.4 ist funktoriell, d.h. für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  haben wir ein kommutatives Diagramm von exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}^{\text{sing}}(Y, \mathbb{Z}), G) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(Y, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n^{\text{sing}}(Y, \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ext}^1(H_{n-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), G) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(X, G) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), G) \longrightarrow 0. \end{array}$$

BEWEIS. Folgt aus der Funktorialität des singulären Kettenkomplexes 5.2.1 und 5.2.4, zusammengesetzt mit dem Dualisierungsfunktor  $M \mapsto \text{Hom}_R(M, R)$ .  $\square$

BEMERKUNG 6.2.2. Die Spaltungen der exakten Sequenzen in Proposition 6.1.4 sind nicht-kanonisch, d.h. eventuell nicht kompatibel mit den kommutativen Diagrammen in Lemma 6.2.1.

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.3. Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so dass die induzierte Abbildung  $f_*: H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y, \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für alle  $n$  ist. Dann ist auch  $f^*: H_{\text{sing}}^n(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X, \mathbb{Z})$  ein Isomorphismus für alle  $n$ .

**Relative Kohomologie und lange exakte Sequenz.** Für ein Raumpaar  $(X, A)$  können wir auch eine relative Kohomologie definieren. Der relative singuläre Kettenkomplex wird durch die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(A; R) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X; R) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, A; R) \rightarrow 0$$

definiert. Wir können diese exakte Sequenz dualisieren, um die richtige Definition des relativen singulären Kokettenkomplexes als Kern der Einschränkungabbildung  $C_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(A; R)$  zu finden:

$$0 \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, A; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(A; R) \rightarrow 0.$$

Relative singuläre  $n$ -Koketten sind also Abbildungen  $\phi: \text{Hom}_{\text{Top}}(\Delta^n, X) \rightarrow R$ , die auf Simplex in  $A$  verschwinden.

Die Exaktheit der dualen Sequenz können wir auf verschiedene Arten sehen: nach Definition ist  $C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, A; R)$  ein Komplex von freien  $R$ -Moduln, so dass die Sequenz von Kettenkomplexen spaltet und wir Übungsaufgabe A.2.6 benutzen können. Oder wir benutzen, dass Dualisieren schon mal links-exakt ist, s. Übungsaufgabe A.6.2, sodass wir nur noch die Surjektivität der Einschränkungabbildung  $C_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(A; R)$  zeigen müssen. Die Surjektivität folgt aber, weil jede Abbildung in  $C_{\text{sing}}^{\bullet}(A; R)$  zu einer Abbildung in  $C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R)$  fortgesetzt werden kann, indem zum Beispiel Simplex, die nicht in  $A$  liegen, den Wert 0 bekommen.

DEFINITION 6.2.4. Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Der singuläre Kokettenkomplex für das Paar ist definiert als

$$C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, A; R) := \ker(C_{\text{sing}}^{\bullet}(X; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{\bullet}(A; R))$$

Die relative singuläre Kohomologie für das Paar  $(X, A)$  ist definiert durch

$$H_{\text{sing}}^n(X, A; R) := H^n(C_{\text{sing}}^{\bullet}(X, A; R)).$$

PROPOSITION 6.2.5. Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{\text{sing}}^{n-1}(A; R) \xrightarrow{\partial} H_{\text{sing}}^n(X, A; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(A; R) \rightarrow \cdots$$

Für einen Morphismus  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  gibt es ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^{n-1}(B; R) & \xrightarrow{\partial} & H_{\text{sing}}^n(Y, B; R) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(Y; R) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(B; R) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^{n-1}(A; R) & \xrightarrow{\partial} & H_{\text{sing}}^n(X, A; R) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(X; R) & \longrightarrow & H_{\text{sing}}^n(A; R) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

BEWEIS. Folgt auch wieder aus Proposition A.3.13 und der Definition 6.2.4.  $\square$

Es gibt eine Dualitäts-Beziehung zwischen den Randabbildungen der langen exakten Sequenzen, die in Übungsaufgabe A.6.15 genauer formuliert ist.

PROPOSITION 6.2.6. *Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $G$  eine abelsche Gruppe. Dann gibt es eine (nicht-kanonisch) spaltende kurze exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{H}_{n-1}^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}), G) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sing}}^n(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}), G) \rightarrow 0.$$

*Diese Sequenzen sind funktoriell bezüglich Abbildungen von Raumpaaren (aber die Spaltungen sind es nicht).*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.7. *Sei  $X$  ein Raum und seien  $B \subset A \subset X$  Unterräume. Formulieren und beweisen Sie die entsprechende lange exakte Sequenz für Kohomologie von Raumpaaren, d.h. die singuläre Kohomologie-Version der exakten Sequenz in Übungsaufgabe 3.1.9.*

Ein Spezialfall der relativen Kohomologie ist dann die *reduzierte Kohomologie*. Die reduzierte singuläre Homologie  $\tilde{\mathbb{H}}_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R)$  kann als Homologie des augmentierten singulären Kettenkomplexes

$$\dots \rightarrow C_1^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_0^{\text{sing}}(X, R) \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$$

mit  $\epsilon: \sum_i n_i [x_i] \mapsto \sum_i n_i$  mit  $n_i \in R$ ,  $x_i \in X$ , berechnet werden. Für einen Raum  $X$  mit Basispunkt  $x \in X$  können wir diese Definition über die lange exakte Homologiesequenz mit  $\mathbb{H}_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \{x\}; R)$  identifizieren. Analog können wir die reduzierte singuläre Kohomologie  $\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R)$  als die Kohomologie des augmentierten singulären Kokettenkomplexes

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\epsilon^{\vee}} C_{\text{sing}}^0(X, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^1(X, R) \rightarrow \dots$$

mit  $\epsilon^{\vee}: 1 \mapsto \epsilon$  definieren. Für einen Raum  $X$  mit Basispunkt  $x$  können wir diese Definition dann mit der relativen singulären Kohomologie identifizieren:

$$\tilde{\mathbb{H}}_{\text{sing}}^n(X, R) \cong \mathbb{H}_{\text{sing}}^n(X, \{x\}; R).$$

### Homotopie-Invarianz.

PROPOSITION 6.2.8. *Sei  $f \sim g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  eine Homotopie zwischen Abbildungen von Raumpaaren. Dann sind die auf der Kohomologie induzierten Abbildungen gleich:*

$$f^* = g^*: \mathbb{H}_{\text{sing}}^n(Y, B; R) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sing}}^n(X, A; R).$$

BEWEIS. Aus dem Beweis der Homotopieinvarianz für singuläre Homologie, s. Proposition 5.3.3, erhalten wir eine Kettenhomotopie

$$P_{\bullet}: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{\bullet+1}^{\text{sing}}(Y, R)$$

zwischen den von  $f$  und  $g$  induzierten Abbildungen

$$f_{\#}, g_{\#}: C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(Y, R).$$

Die zu  $P_{\bullet}$  duale Abbildung  $P_{\bullet}^{\vee}: C_{\text{sing}}^{\bullet+1}(Y, R) \rightarrow C_{\bullet}^{\text{sing}}(X, R)$  ist dann eine Kettenhomotopie zwischen den zu  $f_{\#}$  und  $g_{\#}$  dualen Abbildungen. Die Behauptung folgt dann mit Proposition A.3.16.  $\square$

### Ausschneidung.

PROPOSITION 6.2.9. *Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard und  $Z \subset A$  ein Unterraum mit  $\bar{Z} \subseteq \mathring{A}$ . Dann induziert die Inklusion von Raumpaaren  $(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$  für alle  $n$  Isomorphismen*

$$\mathbb{H}_{\text{sing}}^n(X, A; R) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{sing}}^n(X \setminus Z, A \setminus Z; R).$$

BEWEIS. Folgt aus dem Ausschneidungssatz 5.4.1 für singuläre Homologie mit Proposition 6.1.4 und dem 5-Lemma A.2.7.  $\square$

**Dual der Additivität.** Bei der Additivität gibt es einen wesentlichen Unterschied: statt der direkten Summe für die Additivität der Homologie, s. Proposition 5.2.9, haben wir für Kohomologie ein direktes Produkt.

PROPOSITION 6.2.10. *Seien  $X_i, i \in I$ , topologische Räume, wobei  $I$  eine beliebige Indexmenge ist. Dann gilt*

$$H_{\text{sing}}^n\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R\right) \cong \prod_{i \in I} H_{\text{sing}}^n(X_i, R).$$

BEWEIS. Das Dual einer direkten Summe von  $R$ -Moduln ist ein direktes Produkt von  $R$ -Moduln. Die Zerlegung

$$C_{\bullet}^{\text{sing}}\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R\right) \cong \bigoplus_{i \in I} C_{\bullet}^{\text{sing}}(X_i, R)$$

aus dem Beweis von Proposition 5.2.9 induziert also eine Zerlegung

$$C_{\text{sing}}^{\bullet}\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i, R\right) \cong \prod_{i \in I} C_{\text{sing}}^{\bullet}(X_i, R),$$

daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### Eilenberg–Steenrod-Axiome für Kohomologie.

DEFINITION 6.2.11. *Eine reduzierte Kohomologietheorie ist eine Sequenz von kontravarianten Funktoren*

$$\tilde{H}^n: \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}, n \in \mathbb{Z},$$

von der Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen in die Kategorie der abelschen Gruppen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

**Homotopieinvarianz:** *Für homotope Abbildungen  $f \sim g: X \rightarrow Y$  sind die induzierten Abbildungen gleich:*

$$\tilde{H}^n(f) = \tilde{H}^n(g): \tilde{H}^n(Y) \rightarrow \tilde{H}^n(X).$$

**Ausschneidungssequenz:** *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in  $X$  ist (z.B. ein CW-Paar  $(X, A)$ ). Dann existieren Randabbildungen*

$$\delta: \tilde{H}^n(A) \rightarrow \tilde{H}^{n+1}(X/A)$$

und eine lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\delta} \tilde{H}^n(X/A) \xrightarrow{q^*} \tilde{H}^n(X) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^n(A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{q^*} \dots$$

wobei  $i: A \rightarrow X$  die Inklusion und  $q: X \rightarrow X/A$  die Quotientenabbildung bezeichnen.

**Wedge-Axiom:** *Für eine Wedge-Summe  $X = \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$  von Räumen mit Inklusionsabbildungen  $i_{\alpha}: X_{\alpha} \hookrightarrow X$  ist die Produktabbildung für alle  $n$  ein Isomorphismus:*

$$\prod_{\alpha} i_{\alpha}^*: \tilde{H}^n(X) \rightarrow \prod_{\alpha} \tilde{H}^n(X_{\alpha}).$$

Nach der obigen Diskussion haben wir bereits alle Axiome bewiesen und können zusammenfassen:

SATZ 6.2.12. *Reduzierte singuläre Kohomologie ist eine reduzierte Kohomologietheorie im Sinne der Eilenberg–Steenrod-Axiome.*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.13. *Formulieren Sie Eilenberg–Steenrod-Axiome für unreduzierte Kohomologietheorien.*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.14. *Eine etwas komplexere Übungsaufgabe, zum besseren Verständnis von Kohomologie und zur Wiederholung der zellulären Homologie: Konstruieren Sie für eine gewöhnliche Kohomologietheorie einen zellulären Komplex (analog oder dual zu Definition 3.4.4) und beweisen Sie, dass dieser zelluläre Komplex die gewöhnliche Kohomologietheorie für CW-Komplexe berechnet (analog oder dual zu Satz 3.4.7).*

KOROLLAR 6.2.15. *Sei  $\psi: H^\bullet \rightarrow K^\bullet$  eine natürliche Transformation von unreduzierten gewöhnlichen Kohomologietheorien mit Koeffizienten in einem Ring  $R$ . Wenn  $\psi: H^0(\text{pt}) \rightarrow K^0(\text{pt})$  ein Isomorphismus ist, dann ist  $\psi: H^\bullet(X) \rightarrow K^\bullet(X)$  ein Isomorphismus für alle CW-Komplexe.*

BEWEIS. Komplet analog zum Beweis von Korollary 3.4.9, unter Benutzung der zellulären Kohomologie aus Übungsaufgabe 6.2.14.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.16 (relative Mayer–Vietoris-Sequenz). *Sei  $(X, Y)$  ein topologischer Raum. Gegeben seien Unterräumen  $A, B \subseteq X$  mit  $A \cup B = X$ , und Unterräume  $C \subset A$  bzw.  $D \subset B$  mit  $C \cup D = Y$ . Zeigen Sie, dass es eine lange exakte Mayer–Vietoris-Sequenz gibt:*

$$\cdots \rightarrow H_{\text{sing}}^n(X, Y; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(A, C; R) \oplus H_{\text{sing}}^n(B, D; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(A \cap B, C \cap D; R) \rightarrow \cdots$$

*Alternative: Konstruieren Sie (axiomatisch) die Mayer–Vietoris-Sequenz allgemein für eine gewöhnliche unreduzierte Kohomologietheorie.*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.17. *Zeigen Sie, dass die Funktoren*

$$X \mapsto \text{Hom}_R(H_n^{\text{sing}}(X), R)$$

*keine Kohomologietheorie definieren.*

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.18. *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, der Deformationsretrakt einer offenen Umgebung in  $X$  ist. Dann induziert die Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/A$  Isomorphismen für alle  $n$ :*

$$H_{\text{sing}}^n(X, A; R) \cong \tilde{H}_{\text{sing}}^n(X/A; R).$$

ÜBUNGSAUFGABE 6.2.19. *Sei  $A$  ein Retrakt von  $X$ . Zeigen Sie für eine beliebige unreduzierte Kohomologietheorie*

$$H^n(X) \cong H^n(A) \oplus H^n(X, A).$$

### 6.3. Cup-Produkt und Kohomologiering

DEFINITION 6.3.1 (Cup-Produkt). *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Ring. Für zwei Koketten  $\phi \in C_{\text{sing}}^p(X, R)$  und  $\psi \in C_{\text{sing}}^q(X, R)$  definieren wir das Cup-Produkt  $\phi \cup \psi \in C_{\text{sing}}^{p+q}(X, R)$  durch*

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) := \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]})$$

BEMERKUNG 6.3.2. *Hier betrachten wir für das  $(p+q)$ -Simplex  $\sigma: \Delta^{p+q} \rightarrow X$  die Einschränkungen  $\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}: \Delta^p \rightarrow X$  und  $\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}: \Delta^q \rightarrow X$  und nehmen das Produkt der Werte der jeweiligen Koketten. Wir benutzen also sowohl die Ringstruktur von  $R$  als auch die Tatsache, dass der Kokettenkomplex  $C_{\text{sing}}^\bullet(X, R)$  von einer simplizialen Menge kommt.*

LEMMA 6.3.3. *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Ring. Die Korandabbildung  $\delta: C_{\text{sing}}^p(X, R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{p+1}(X, R)$  ist eine Derivation für das Cup-Produkt, d.h. für zwei Koketten  $\phi \in C_{\text{sing}}^p(X, R)$  und  $\psi \in C_{\text{sing}}^q(X, R)$  haben wir*

$$\delta(\phi \cup \psi) = \delta\phi \cup \psi + (-1)^p \phi \cup \delta\psi.$$

BEWEIS. Wir werten beide Terme der rechten Seite auf einem  $(p+q+1)$ -Simplex  $\sigma: \Delta^{p+q+1} \rightarrow X$  aus:

$$\begin{aligned} (\delta\phi \cup \psi)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+1}]}) \psi(\sigma|_{[v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}]}) \\ (-1)^p (\phi \cup \delta\psi)(\sigma) &= \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \psi(\sigma|_{[v_p, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}]}) \end{aligned}$$

Der letzte Term der ersten Summe und der erste Term der zweiten Summe heben sich weg, und mit  $\delta(\phi \cup \psi)(\sigma) = (\phi \cup \psi)(\partial\sigma)$  erhalten wir die Behauptung.  $\square$

PROPOSITION 6.3.4. *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Ring mit 1.*

- (1) *Das Cup-Produkt von Kozykeln ist ein Kozykel. Das Cup-Produkt von einem Kozykel und einem Korand ist ein Korand.*
- (2) *Das Cup-Produkt von Kozykeln induziert eine wohldefinierte Abbildung*

$$\cup: H_{\text{sing}}^p(X, R) \times H_{\text{sing}}^q(X, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^{p+q}(X, R).$$

- (3) *Das Cup-Produkt ist assoziativ und distributiv bezüglich der  $R$ -Modulstruktur von  $H_{\text{sing}}^\bullet(X, R)$ .*

BEWEIS. (1) folgt direkt aus Lemma 6.3.3, damit folgt auch (2) direkt. Assoziativität und Distributivität auf Koketten folgen auch direkt aus der Definition des Cup-Produkts (und der Tatsache, dass  $R$  ein Ring ist).  $\square$

BEMERKUNG 6.3.5. *Es gibt auch eine relative Variante des Cup-Produkts. Sei  $X$  ein topologischen Raum  $X$  mit offenen Teilmengen  $A, B \subset X$ . Das Cup-Produkt schränkt sich zu einer Abbildung*

$$C_{\text{sing}}^p(X, A; R) \times C_{\text{sing}}^q(X, B; R) \rightarrow C_{\text{sing}}^{p+q}(X, A+B; R)$$

*ein. Dabei bezeichnet  $C_{\text{sing}}^{p+q}(X, A+B; R)$  die Koketten von  $X$ , die auf Summen von Koketten in  $A$  bzw.  $B$  verschwinden. Dann können wir den Quasi-Isomorphismus  $C_{\text{sing}}^\bullet(X, A+B; R) \simeq C_{\text{sing}}^\bullet(X, A \cup B; R)$  aus dem Beweis des Ausschneidungssatzes 5.4.1 benutzen, um das relative Cup-Produkt zu erhalten:*

$$\cup: H_{\text{sing}}^p(X, A; R) \times H_{\text{sing}}^q(X, B; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^{p+q}(X, A \cup B; R).$$

*Eine analoge Aussage gilt auch für den Fall, dass  $X$  ein CW-Komplex ist, und  $A, B$  Unterkomplexe von  $X$  sind.*

PROPOSITION 6.3.6. *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung und  $R$  ein Ring. Dann ist die induzierte Abbildung  $f^*: H^\bullet(Y, R) \rightarrow H^\bullet(X, R)$  ein Ringhomomorphismus:*

$$f^*(\phi \cup \psi) = f^*(\phi) \cup f^*(\psi).$$

BEWEIS. Die Aussage gilt bereits auf Koketten:

$$\begin{aligned} (f^*\phi \cup f^*\psi)(\sigma) &= f^*\phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) f^*\psi(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}) \\ &= \phi(f \circ \sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \psi(f \circ \sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}) \\ &= (\phi \cup \psi)(f \circ \sigma) = f^*(\phi \cup \psi)(\sigma). \end{aligned}$$

$\square$

SATZ 6.3.7. *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein kommutativer Ring. Dann gilt für alle  $\phi \in H_{\text{sing}}^p(X, A; R)$  und  $\psi \in H_{\text{sing}}^q(X, A; R)$*

$$\phi \cup \psi = (-1)^{pq} \psi \cup \phi.$$

BEWEIS. Wir formulieren den Beweis für  $A = \emptyset$ , der allgemeine Beweis geht fast komplett analog.

Wir betrachten zwei Koketten  $\phi \in C_{\text{sing}}^p(X, A; R)$  und  $\psi \in C_{\text{sing}}^q(X, A; R)$ . Nach Definition unterscheiden sich  $\phi \cup \psi$  und  $\psi \cup \phi$  nur durch Permutationen von Eckpunkten des Simplex  $\Delta^{p+q}$ . Wir untersuchen also solche Permutationen. Für das Standard- $n$ -Simplex definieren wir  $\xi: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  als die affine Abbildung, die die Reihenfolge der Eckpunkte umkehrt, d.h.  $\xi(v_i) = v_{n-i}$ . Als Permutation der Eckpunkte ist  $\xi$  das Produkt von  $\frac{n(n+1)}{2}$  Transpositionen, hat also Vorzeichen  $\epsilon_n = \text{sgn } \xi = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Wir definieren nun Homomorphismen

$$\rho: C_n^{\text{sing}}(X) \rightarrow C_n^{\text{sing}}(X): (\sigma: \Delta^n \rightarrow X) \mapsto \epsilon_n (\sigma \circ \xi: \Delta^n \rightarrow X),$$

die zusammen einen Homomorphismus von Kettenkomplexen bilden. Dies folgt mit  $\epsilon_n = (-1)^n \epsilon_{n-1}$  aus

$$\begin{aligned} \partial \rho(\sigma) &= \epsilon_n \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_n, \dots, \widehat{v}_{n-i}, \dots, v_0]} \\ \rho(\partial \sigma) &= \rho \left( \sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \epsilon_{n-1} \sum_i (-1)^{n-i} \sigma|_{[v_n, \dots, \widehat{v}_{n-i}, \dots, v_0]}. \end{aligned}$$

Es reicht nun zu zeigen, dass  $\rho$  kettenhomotop zur Identität ist. Aus der Definition von  $\rho$  folgen

$$\begin{aligned} (\rho^* \phi \cup \rho^* \psi)(\sigma) &= \phi(\epsilon_p \sigma|_{[v_p, \dots, v_0]}) \psi(\epsilon_q \sigma|_{[v_{p+q}, \dots, v_p]}) \\ \rho^*(\psi \cup \psi)(\sigma) &= \epsilon_{p+q} \psi(\sigma|_{[v_{p+q}, \dots, v_p]}) \phi(\sigma|_{[v_p, \dots, v_0]}), \end{aligned}$$

und daraus sehen wir  $\epsilon_p \epsilon_q (\rho^* \phi \cup \rho^* \psi) = \epsilon_{p+q} \rho^*(\psi \cup \phi)$ . Hier benutzen wir insbesondere, dass  $R$  kommutativ ist. Mit  $\epsilon_{p+q} = (-1)^{pq} \epsilon_p \epsilon_q$  folgt  $\rho^* \phi \cup \rho^* \psi = (-1)^{pq} \rho^*(\psi \cup \phi)$ . Die Behauptung des Satzes folgt daraus, wenn  $\rho$  kettenhomotop zur Identität ist.

Um nun noch zu zeigen, dass  $\rho$  kettenhomotop zur Identität ist, müssen wir also eine Kettenhomotopie definieren. Dazu benutzen wir die Prismen-Operatoren aus dem Beweis der Homotopieinvarianz, s. Definition 5.3.2. Wir haben die Zerlegung von  $\Delta^n \times [0, 1]$  in  $(n+1)$ -Simplizes  $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ , und wir bezeichnen mit  $\pi: \Delta^n \times [0, 1] \rightarrow \Delta^n$  die Projektion auf den ersten Faktor. Nun definieren wir die modifizierten Prismen-Operatoren als

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]},$$

in denen die Reihenfolge der  $w$ -Eckpunkte umgekehrt ist und ein entsprechendes Vorzeichen eingefügt ist. Für diese Operatoren wollen wir nun  $\partial P + P\partial = \rho - \text{id}$  zeigen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial P &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]} \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{i+1+n-j} \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i]}. \end{aligned}$$

Wir schreiben die Terme für  $j = i$  aus, in denen sich beide Summen überschneiden:

$$\begin{aligned} &\epsilon_n (\sigma \circ \pi)|_{[w_n, \dots, w_0]} + \sum_{i > 0} \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, w_n, \dots, w_i]} \\ &+ \sum_{i < n} (-1)^{n+i+1} \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, w_{i+1}]} - (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_n]}. \end{aligned}$$

Die beiden Summen-Terme heben sich wegen  $(-1)^{n+i}\epsilon_{n-i+1} = -\epsilon_{n-i}$  weg, und übrig bleibt

$$\epsilon(\sigma \circ \pi)|_{[w_n, \dots, w_0]} - (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_n]} = \rho(\sigma) - \sigma.$$

Wir rechnen nun noch  $P\partial$  aus

$$\begin{aligned} P\partial &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j \epsilon_{n-i-1} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, v_i, w_n, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_i]} \\ &+ \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j \epsilon_{n-i} (\sigma \circ \pi)|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_n, \dots, w_i]}. \end{aligned}$$

Dies ist wegen  $\epsilon_{n-i} = (-1)^{n-i}\epsilon_{n-i-1}$  gleich den Termen mit  $j \neq i$  in  $\partial P$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Zusammengefasst bedeuten also die Aussagen aus Proposition 6.3.4 und Theorem 6.3.7, dass für einen kommutativen Ring  $R$  mit 1 die singuläre Kohomologie  $H_{\text{sing}}^\bullet(X, R)$  eine graduiert-kommutative  $R$ -Algebra mit 1 ist. Zusätzlich bedeutet Proposition 6.3.6, dass stetige Abbildungen von topologischen Räumen auf der singulären Kohomologie Ringhomomorphismen induzieren. Insgesamt wird also für einen kommutativen Ring mit 1 die singuläre Kohomologie ein kontravarianter Funktor

$$H_{\text{sing}}^\bullet(-, R): \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow R\text{-CommAlg}^{\mathbb{Z}}$$

von topologischen Räumen nach graduiert-kommutativen  $R$ -Algebren.

**BEMERKUNG 6.3.8.** *Sei  $(M, \circ)$  ein Monoid. Ein  $M$ -graduierter Ring ist ein Ring  $R$ , für den eine Zerlegung  $R \cong \bigoplus_{m \in M} R_m$  existiert, so dass für die Multiplikation gilt  $R_{m_1} \cdot R_{m_2} \subseteq R_{m_1 \circ m_2}$ . Die singuläre Kohomologie mit dem Cup-Produkt ist in diesem Sinn ein  $\mathbb{N}$ -graduierter Ring.*

**PROPOSITION 6.3.9.** (1) *Sei  $I$  eine Indexmenge und seien  $X_i$ ,  $i \in I$ , topologische Räume. Dann ist*

$$H_{\text{sing}}^\bullet \left( \bigsqcup_{i \in I} X_i, R \right) \cong \prod_{i \in I} H_{\text{sing}}^\bullet(X_i, R)$$

*ein Isomorphismus von Ringen.*

(2) *Sei  $I$  eine Indexmenge und seien  $(X_i, x_i)$ ,  $i \in I$ , punktierte topologische Räume, so dass jeweils  $x_i \in X_i$  Deformationsretrakt einer offenen Umgebung ist. Dann ist*

$$\widetilde{H}_{\text{sing}}^\bullet \left( \bigvee_{i \in I} X_i, R \right) \cong \prod_{i \in I} \widetilde{H}_{\text{sing}}^\bullet(X_i, R)$$

*ein Isomorphismus von Ringen, wobei das Cup-Produkt auf der reduzierten Kohomologie ein relatives Cup-Produkt ist.*

#### 6.4. Künneth-Formel

**DEFINITION 6.4.1.** *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Das Kreuzprodukt (auch äußeres Produkt) ist die Abbildung*

$$H_{\text{sing}}^\bullet(X, R) \times H_{\text{sing}}^\bullet(Y, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^\bullet(X \times Y, R): (\alpha, \beta) \mapsto \text{pr}_1^*(\alpha) \cup \text{pr}_2^*(\beta).$$

Die Distributivität des Cup-Produkts impliziert, dass das Kreuzprodukt bilinear ist. Insbesondere induziert das Kreuzprodukt einen Homomorphismus von graduierten  $R$ -Moduln

$$H_{\text{sing}}^\bullet(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^\bullet(Y, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^\bullet(X \times Y, R): \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \times \beta.$$

Dieser Homomorphismus wird auch Kreuzprodukt genannt. Zu beachten ist hierbei, dass das Tensorprodukt von graduierten  $R$ -Moduln die folgende Form hat:

$$H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^{\bullet}(Y, R) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left( \bigoplus_{p+q=n} H_{\text{sing}}^p(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^q(Y, R) \right),$$

d.h. der Grad  $n$  Anteil ist die direkte Summe  $\bigoplus_{p+q=n} H_{\text{sing}}^p(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^q(Y, R)$  von Tensorprodukten mit Totalgrad  $n$ .<sup>1</sup>

Wir wollen dieses Kreuzprodukt zu einem Ringhomomorphismus machen. Dazu definieren wir auf dem Tensorprodukt  $H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^{\bullet}(Y, R)$  von graduierten  $R$ -Algebren eine Ringstruktur durch

$$(\alpha_1 \otimes \beta_1) \cdot (\alpha_2 \otimes \beta_2) := (-1)^{\deg \beta_1 \cdot \deg \alpha_2} \alpha_1 \alpha_2 \otimes \beta_1 \beta_2.$$

In dieser Vorschrift sind  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  homogene Elemente und  $\deg \alpha = n$  bedeutet dann  $\alpha \in H_{\text{sing}}^n$ .

LEMMA 6.4.2. *Mit dieser Definition ist das Kreuzprodukt ein Homomorphismus von graduiert-kommutativen  $R$ -Algebren.*

BEWEIS. Seien  $\alpha_1 \otimes \beta_1, \alpha_2 \otimes \beta_2 \in H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^{\bullet}(Y, R)$ . Wir bezeichnen das Kreuzprodukt mit  $\mu$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \mu((\alpha_1 \otimes \beta_1) \cdot (\alpha_2 \otimes \beta_2)) \\ &= (-1)^{(\deg \beta_1)(\deg \alpha_2)} \mu(\alpha_1 \alpha_2 \otimes \beta_1 \beta_2) \\ &= (-1)^{(\deg \beta_1)(\deg \alpha_2)} ((\alpha_1 \cup \alpha_2) \times (\beta_1 \cup \beta_2)) \\ &= (-1)^{(\deg \beta_1)(\deg \alpha_2)} \text{pr}_1^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) \cup \text{pr}_2^*(\beta_1 \cup \beta_2) \\ &= (-1)^{(\deg \beta_1)(\deg \alpha_2)} \text{pr}_1^*(\alpha_1) \cup \text{pr}_1^*(\alpha_2) \cup \text{pr}_2^*(\beta_1) \cup \text{pr}_2^*(\beta_2) \\ &= \text{pr}_1^*(\alpha_1) \cup \text{pr}_2^*(\beta_1) \cup \text{pr}_1^*(\alpha_2) \cup \text{pr}_2^*(\beta_2) \\ &= (\alpha_1 \times \beta_1) \cdot (\alpha_2 \times \beta_2) = \mu(\alpha_1 \otimes \beta_1) \mu(\alpha_2 \otimes \beta_2). \end{aligned}$$

□

SATZ 6.4.3 (Künneth-Formel). *Seien  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe und  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins. Wir nehmen an, dass  $H^k(Y, R)$  für alle  $k$  ein endlich erzeugter freier  $R$ -Modul ist. Dann ist das Kreuzprodukt*

$$H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, R) \otimes_R H_{\text{sing}}^{\bullet}(Y, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^{\bullet}(X \times Y, R)$$

*ein Isomorphismus von graduiert-kommutativen  $R$ -Algebren mit Eins.*

BEWEIS. Für einen festen Raum  $Y$  betrachten wir die beiden Sequenzen von Funktoren auf Raumpaaren:

$$\begin{aligned} (X, A) \mapsto H^n(X, A) &:= \bigoplus_{p+q=n} \left( H_{\text{sing}}^p(X, A; R) \otimes_R H_{\text{sing}}^q(Y, R) \right) \\ (X, A) \mapsto K^n(X, A) &:= H_{\text{sing}}^n(X \times Y, A \times Y; R). \end{aligned}$$

Das relative Kreuzprodukt definiert eine Abbildung  $\mu: H^n(X, A) \rightarrow K^n(X, A)$ . Für  $X = \text{pt}$  ist  $\mu: R \otimes_R H_{\text{sing}}^q(Y, R) \rightarrow H_{\text{sing}}^q(Y, R)$  einfach die Skalarmultiplikation. Nach Korollar 6.2.15 reicht es also zu zeigen, dass  $H^n$  und  $K^n$  gewöhnliche unreduzierte Kohomologietheorien sind und  $\mu$  eine natürliche Transformation.

Die Axiome für  $K^{\bullet}$  sind klar, Homotopieinvarianz und Ausschneidung sind für  $H^{\bullet}$  auch klar. Für die lange exakte Sequenz für die Kohomologie  $H^{\bullet}$  eines Paares  $(X, A)$  gehen wir aus von der langen exakten Sequenz für  $H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, A; R)$ . Für festes  $q$  können wir diese Sequenz mit  $H_{\text{sing}}^q(Y, R)$  tensorieren. Nach Annahme

<sup>1</sup>Ähnlich der Cauchy-Formel beim Multiplizieren von Potenzreihen.

ist  $H_{\text{sing}}^q(Y, R)$  ein endlich erzeugter freier  $R$ -Modul, also bleibt die lange exakte Sequenz für  $H_{\text{sing}}^\bullet(X, A; R)$  auch nach dem Tensorieren exakt. Im zweiten Schritt nehmen wir einfach eine direkte Summe über alle  $q$  dieser im Zwischenschritt konstruierten Sequenzen und erhalten die lange exakte Sequenz für  $H^\bullet(X, A)$ . Zuletzt folgt die Additivität der Funktoren  $H^\bullet(X, A)$  aus  $(\prod_i M_i) \otimes_R N \cong \prod_i (M_i \otimes_R N)$  für einen endlich erzeugten freien  $R$ -Modul  $N$ .

Es bleibt also noch zu zeigen, dass  $\mu$  eine natürliche Transformation ist. Die Funktorialität für induzierte Abbildungen folgt aus Proposition 6.3.6. Es bleibt die Verträglichkeit mit Randabbildungen zu prüfen:

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{sing}}^p(A, R) \times H_{\text{sing}}^q(Y, R) & \xrightarrow{\delta \times \text{id}} & H_{\text{sing}}^{p+1}(X, A; R) \times H_{\text{sing}}^q(Y, R) \\ \times \downarrow & & \downarrow \times \\ H_{\text{sing}}^{p+q}(A \times Y, R) & \xrightarrow{\delta} & H_{\text{sing}}^{p+q+1}(X \times Y, A \times Y; R). \end{array}$$

Für Koketten  $\phi \in C_{\text{sing}}^p(A, R)$  und  $\psi \in C_{\text{sing}}^q(Y, R)$  erweitern wir  $\phi$  (z.B. durch 0) zu einer Kokette  $\bar{\phi} \in C_{\text{sing}}^p(X; R)$ . Der Pfad im Diagramm nach rechts und dann nach unten bildet  $(\phi, \psi)$  auf  $\text{pr}_1^*(\delta\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi)$  ab. Der andere Pfad bildet  $(\phi, \psi)$  auf  $\delta(\text{pr}_1^*(\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi))$  ab, da  $\text{pr}_1^*(\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi)$  eine Erweiterung von  $\text{pr}_1^*(\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi)$  auf  $X \times Y$  ist. Die beiden Ergebnisse stimmen überein, da  $\delta\psi = 0$  ist:

$$\text{pr}_1^*(\delta\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi) = \delta(\text{pr}_1^*(\bar{\phi}) \cup \text{pr}_2^*(\psi)). \quad \square$$

**BEMERKUNG 6.4.4.** Für zwei CW-Paare  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  gibt es eine relative Version des Kreuzprodukts

$$H_{\text{sing}}^\bullet(X, A; R) \otimes H_{\text{sing}}^\bullet(Y, B; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^\bullet(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R).$$

Dieses relative Kreuzprodukt ist ein Isomorphismus, wenn  $H^q(Y, B; R)$  für alle  $q$  ein endlich erzeugter freier  $R$ -Modul ist.

**BEISPIEL 6.4.5.** Mit der Künneth-Formel können wir sehr einfach die Kohomologie des  $n$ -Torus berechnen. Die Kohomologie ist eine äußere  $R$ -Algebra mit  $n$  Erzeugern:

$$H_{\text{sing}}^\bullet(T^n, R) \cong \bigwedge_R^\bullet R^{\oplus n} \quad \square$$

**BEISPIEL 6.4.6.** Wir können nun das Cup-Produkt für geschlossene orientierte Flächen aus Beispiel 2.2.3 aus dem Cup-Produkt des 2-Torus ableiten. Die Homologie einer Fläche kann zum Beispiel mit zellulärer Homologie berechnet werden, s. Übungsaufgabe 3.4.14:

$$H_i^{\text{sing}}(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei wird  $H_1$  von den Klassen der 1-Zellen  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  erzeugt, und  $H_2$  von der Klasse der 2-Zelle  $s$ , die durch die Polygonfläche gegeben ist. Ebenso können wir die Homologie einer Wedge-Summe von Tori berechnen:

$$H_i^{\text{sing}}\left(\bigvee_{j=1}^g T^2, \mathbb{Z}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g} & i = 1 \\ \mathbb{Z}^g & i = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Homologie  $H_1$  wird wieder von den Klassen der 1-Zellen  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  erzeugt, und  $H_2$  von den Klassen  $s_1, \dots, s_g$  der Quadrate mit Randzellen  $a_j, b_j, a_j^{-1}, b_j^{-1}$  für  $j = 1, \dots, g$ .

Wir haben eine Quotientenabbildung  $q: \Sigma_g \rightarrow \bigvee_{j=1}^g T^2$ , die wie in Abbildung 5 dadurch gegeben ist, dass das Polygon in Quadrate unterteilt wird. Die auf der

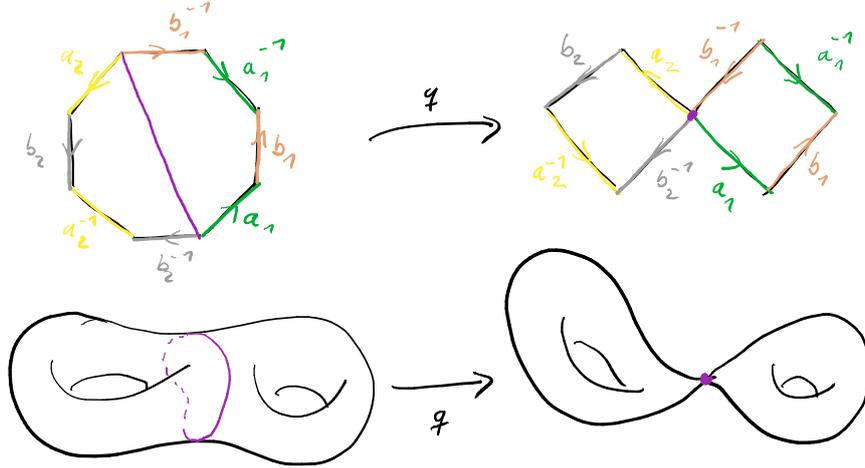


ABBILDUNG 5. Quotientenabbildung  $\Sigma_g \rightarrow \bigvee_{j=1}^g T^2$  für den Fall  $g = 2$ .

Homologie induzierte Abbildung

$$q_*: H_i^{\text{sing}}(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i^{\text{sing}}\left(\bigvee_{j=1}^g T^2, \mathbb{Z}\right)$$

ist dann durch  $a_i \mapsto a_i, b_i \mapsto b_i$  und  $s \mapsto \sum_{j=1}^g s_j$  gegeben. Für die 1-Zellen sieht man das direkt am Bild. Für die 2-Zellen eigentlich auch, aber wir können auch für einen Punkt  $x$  im Innern eines Quadrats das folgende Diagramm betrachten:

$$\begin{array}{ccc} H_2^{\text{sing}}(\Sigma_g, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_*} & H_2^{\text{sing}}\left(\bigvee_{j=1}^g T^2, \mathbb{Z}\right) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \\ H_2^{\text{sing}}(\Sigma_g, \Sigma_g \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_*} & H_2^{\text{sing}}\left(\bigvee_{i=j}^g T^2, \bigvee_{i=j}^g T^2 \setminus \{x\}; \mathbb{Z}\right) \end{array}$$

Der linke vertikale Isomorphismus folgt aus der langen exakten Sequenz für das Paar  $(\Sigma_g, \Sigma_g \setminus \{x\})$ . Auf der rechten Seite ist die vertikale Abbildung die Projektion auf den Summanden von  $H_2^{\text{sing}}$ , der zum Torus gehört, in dem  $q(x)$  liegt. Mit  $H_i^{\text{sing}}(X, A) \cong \tilde{H}_i^{\text{sing}}(X/A)$  können wir die Homologiegruppen in der unteren Zeile als  $\tilde{H}_2^{\text{sing}}(S^2, \mathbb{Z})$  identifizieren und sehen, dass die untere Abbildung ein Isomorphismus ist. Dies liefert die behauptete Form der induzierten Abbildung  $q_*$ .

Jetzt benutzen wir die universelle Koeffizienten-Formel aus Proposition 6.1.4. Da die Homologie frei ist, gibt es keine Ext-Terme und die Kohomologie ist einfach das Duale der Homologie. Wir bezeichnen dann die dualen Erzeuger zu  $a_i, b_i, s_i$  mit  $\alpha_i, \beta_i$  und  $\sigma_i$ . Die induzierte Abbildung

$$q^*: H_{\text{sing}}^i\left(\bigvee_{j=1}^g T^2, \mathbb{Z}\right) \rightarrow H_{\text{sing}}^i(\Sigma_g, \mathbb{Z})$$

ist dann ein Ringhomomorphismus, der durch  $\alpha_j \mapsto \alpha_j, \beta_j \mapsto \beta_j$  und  $\sigma_j \mapsto \sigma_j$  gegeben ist. Aus Beispiel 6.4.5 sehen wir, dass  $\alpha_j \cup \beta_j = \gamma_j$  und  $\beta_j \cup \alpha_j = -\gamma_j$

in  $H_{\text{sing}}^i(\bigvee_{j=1}^g T^2, \mathbb{Z})$  gilt. Dies bestimmt das Cup-Produkt schon vollständig: Cup-Produkt mit Klassen in  $H^0$  ist das Skalarprodukt der  $\mathbb{Z}$ -Modulstruktur und alle anderen Cup-Produkte sind aus Dimensionsgründen trivial. Daraus folgt nun für  $\Sigma_g$ , dass das Cup-Produkt wie folgt gegeben ist:

$$\alpha_i \cup \beta_j = -\beta_j \cup \alpha_i = \begin{cases} \sigma & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

und  $\alpha_i \cup \alpha_j = \beta_i \cup \beta_j = 0$ . □

PROPOSITION 6.4.7 (Kohomologieringe der projektiven Räume).

- (1)  $H_{\text{sing}}^\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$  für eine Klasse  $\alpha$  von Grad 1.
- (2)  $H_{\text{sing}}^\bullet(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$  für eine Klasse  $\alpha$  von Grad 2.

BEWEIS. Wir behandeln den reellen Fall, der komplexe ist vollständig analog.

Aus der Zellstruktur von  $\mathbb{R}P^n$ , s. Beispiel 2.2.5, und der zellulären Kohomologie, s. Übungsaufgabe 6.2.14, sehen wir, dass die Inklusion  $\mathbb{R}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$  für alle  $i \leq n-1$  Isomorphismen  $H_{\text{sing}}^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} H_{\text{sing}}^i(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{F}_2)$  induziert. Alternativ können wir dafür auch die zelluläre Homologie aus Beispiel 3.4.11 und die universelle Koeffizienten-Formel aus Proposition 6.1.4 anwenden. Es reicht also zu zeigen, dass für  $i+j=n$  das Cup-Produkt eines Erzeugers von  $H_{\text{sing}}^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2)$  und eines Erzeugers von  $H_{\text{sing}}^j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2)$  ein Erzeuger von  $H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2)$  ist.

Nach Definition ist  $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^\times$ , und Punkte in  $\mathbb{R}P^n$  können durch ihre homogenen Koordinaten  $[x_0 : \dots : x_n]$  beschrieben werden. Wir können  $\mathbb{R}P^i$  konkret als Unterraum der Punkte  $[x_0 : \dots : x_n]$  mit  $x_{i+1} = \dots = x_n = 0$  in  $\mathbb{R}P^n$  einbetten. Ebenso haben wir  $\mathbb{R}P^j = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_0 = \dots = x_{i-1} = 0\}$ . Der Schnitt dieser beiden Unterräume besteht aus dem einzigen Punkt  $p$  mit den homogenen Koordinaten  $[0 : \dots : 0 : x_i = 1 : 0 : \dots : 0]$ . Wir bezeichnen mit  $U$  den Unterraum der Punkte  $[x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n]$  mit  $x_i \neq 0$  (alternativ,  $x_i = 1$  nach Skalieren). Dieser Unterraum ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (eine der Karten im Standardatlas des  $\mathbb{R}P^n$ ), der Homöomorphismus ist durch

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \hat{x}_i, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

gegeben. Wir haben eine Zerlegung  $U \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^j$ , wobei  $\mathbb{R}^i$  durch die Koordinaten  $x_0, \dots, x_{i-1}$  und  $\mathbb{R}^j$  durch die Koordinaten  $x_{i+1}, \dots, x_n$  gegeben sind.

Wir betrachten das folgende Diagramm, das wegen der Natürlichkeit des Cup-Produkts kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \times H^j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^j; \mathbb{F}_2) \times H^j(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^i; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{p\}; \mathbb{F}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^j; \mathbb{F}_2) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i; \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{F}_2) \end{array}$$

Die vertikalen Pfeile nach oben sind induziert von den Inklusionen von Paaren  $(\mathbb{R}P^n, \emptyset) \hookrightarrow (\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^i)$  etc., die vertikalen Pfeile nach unten sind induziert von der Inklusion  $\mathbb{R}^n \cong U \hookrightarrow \mathbb{R}P^n$ . Durch die Kommutativität des Diagramms reicht es zu zeigen, dass die vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind, und dass in der unteren Zeile das Cup-Produkt von Erzeugern ein Erzeuger ist.

Die rechte untere Abbildung ist durch Ausschneidung ein Isomorphismus. Für die rechte obere Abbildung benutzen wir, dass die Projektion von  $\mathbb{R}P^n \setminus \{p\}$  auf  $\mathbb{R}P^{n-1} = \{[x_0 : \dots : x_i = 0 : \dots : x_n]\}$  eine Deformationsretraktion ist. Daraus folgt  $H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{p\}; \mathbb{F}_2) \cong H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{F}_2)$ . Mit zellulärer Kohomologie folgt dann der Isomorphismus  $H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{F}_2) \cong H_{\text{sing}}^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{F}_2)$ .

Für die linken vertikalen Homomorphismen betrachten wir das kommutative Diagramm, in dem wir die Koeffizienten  $\mathbb{F}_2$  weglassen:

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(\mathbb{R}P^n) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^j) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{R}P^i) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^{i-1}) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{R}P^i, \mathbb{R}P^i \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}). \end{array}$$

Im linken Quadrat sind durch zelluläre Kohomologie alle Abbildungen Isomorphismen. Wir betrachten die Abbildungen in der unteren Zeile: Mit einem Deformationsretrakt-Argument wie im vorigen Paragraph ist die untere mittlere Abbildung ein Isomorphismus, die untere rechte Abbildung ist wegen Ausschneidung ein Isomorphismus. Die rechte vertikale Abbildung ist nach Homotopieinvarianz ein Isomorphismus. Es reicht nun zu zeigen, dass die mittlere Abbildung in der oberen Zeile ein Isomorphismus ist, dann sind alle Abbildungen im Diagramm Isomorphismen, und insbesondere sind dann die Abbildungen in der linken Spalte des vorigen Diagramms Isomorphismen. Um zu zeigen, dass die mittlere Abbildung in der oberen Zeile ein Isomorphismus ist, benutzen wir die Deformationsretraktion

$$\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^j \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}P^{i-1}: ([x_0 : \dots : x_n], t) \mapsto [x_0 : \dots : x_{i-1} : tx_i : \dots : tx_n].$$

Es bleibt nun also nur noch zu zeigen, dass das Cup-Produkt

$$H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^j; \mathbb{F}_2) \times H^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{F}_2)$$

zwei Erzeuger auf der linken Seite zu einem Erzeuger auf der rechten Seite paart. Diese Abbildung ist aber nach Homotopieäquivalenz äquivalent zum Kreuzprodukt

$$H^i(I^i, \partial I^i; \mathbb{F}_2) \times H^j(I^j, \partial I^j; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(I^n, \partial I^n; \mathbb{F}_2).$$

Hier ist jetzt das Kreuzprodukt von Erzeugern ein Erzeuger auf der rechten Seite, wegen der relativen Künneth-Formel 6.4.4.  $\square$

**BEMERKUNG 6.4.8.** Die ganzzahlige Kohomologie der reell-projektiven Räume ist etwas komplizierter zu beschreiben:

$$\begin{aligned} H_{\text{sing}}^\bullet(\mathbb{R}P^{2k}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[\alpha]/(2\alpha, \alpha^{k+1}), \text{ deg } \alpha = 2. \\ H_{\text{sing}}^\bullet(\mathbb{R}P^{2k+1}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(2\alpha, \alpha^{k+1}, \beta^2, \alpha\beta), \text{ deg } \alpha = 2, \text{ deg } \beta = 2k + 1. \end{aligned}$$

Diese Formeln können besser verstanden werden, wenn wir charakteristische Klassen für Vektorbündel haben. Dann ist  $\alpha$  das Quadrat der Eulerklasse des tautologischen Geradenbündels auf  $\mathbb{R}P^n$ . Die Klasse  $\beta$  ist die Orientierungsklasse für  $\mathbb{R}P^{2k+1}$ , s. Abschnitt 9.1.

## 6.5. Anwendungen des Cup-Produkts

Wir diskutieren noch ein paar Anwendungen, in denen das Cup-Produkt mehr verraten kann, als die einfache Struktur der Kohomologie als  $R$ -Modul. Zum Beispiel gibt es Räume, deren Kohomologie als abelsche Gruppe isomorph ist, die aber unterschiedliche Cup-Produkte haben, so dass ihre Kohomologien als Ringe nicht isomorph sind.

BEISPIEL 6.5.1. Die komplex-projektive Ebene  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  ist nicht homotopie-äquivalent zu  $S^2 \vee S^4$ . Nach Proposition 6.4.7 ist der Kohomologiering der komplex-projektiven Ebene

$$H_{\text{sing}}^{\bullet}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[u]/(u^3)$$

mit einer Klasse  $u \in H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$ . Für diese Klasse ist insbesondere  $u^2$  ein Erzeuger von  $H_{\text{sing}}^4(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$ . Auf der anderen Seite ist nach dem Wedge-Axiom, s. auch Proposition 6.3.9,

$$H_{\text{sing}}^{\bullet}(S^2 \vee S^4, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[a, b]/(a^2, b^2, ab)$$

mit einer Klasse  $a$  in Grad 2 und einer Klasse  $b$  in Grad 4. Hier gilt nun  $a^2 = 0$ , sodass alle Klassen in Grad 2 triviales Cup-Quadrat haben. In diesem Beispiel sind also  $H_{\text{sing}}^{\bullet}(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$  und  $H_{\text{sing}}^{\bullet}(S^2 \vee S^4, \mathbb{Z})$  isomorph als abelsche Gruppen, aber nicht als Ringe!  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 6.5.2. Zeigen Sie, dass  $S^p \times S^q$  und  $S^p \vee S^q \vee S^{p+q}$  nicht homotopie-äquivalent sind. Geben Sie eine Abbildung

$$\Sigma(S^p \times S^q) \rightarrow S^{p+1} \vee S^{q+1} \vee S^{p+q+1},$$

die einen Isomorphismus auf der Kohomologie induziert.

BEMERKUNG 6.5.3. Wir werden später sehen, dass aus dem Satz von Whitehead folgt, dass  $\Sigma(S^p \times S^q)$  und  $S^{p+1} \vee S^{q+1} \vee S^{p+q+1}$  homotopie-äquivalent sind.

ÜBUNGSAUFGABE 6.5.4. Zeigen Sie, dass  $S^n \vee S^m$  kein Retrakt von  $S^n \times S^m$  ist, wenn  $n, m \geq 1$ .

### Reelle Divisionsalgebren und Satz von Hopf.

DEFINITION 6.5.5. Eine reelle Divisionsalgebra  $(D, \cdot)$  ist eine (nicht notwendig assoziative!)  $\mathbb{R}$ -Algebra, so dass für alle  $a, b \in D$  mit  $a \neq 0$  die Gleichungen  $a \cdot x = b$  und  $y \cdot a = b$  eindeutige Lösungen  $x, y \in D$  haben.

BEMERKUNG 6.5.6. Wir betrachten hier nur endlich-dimensionale Divisionsalgebren, d.h.  $\dim_{\mathbb{R}} D < \infty$ .

Wir beginnen mit einer Aussage über kommutative reelle Divisionsalgebren. Für diese Aussage benötigen wir nur die additive Struktur der Kohomologie (und das Argument funktioniert genauso gut mit Homologie oder der Fundamentalgruppe).

PROPOSITION 6.5.7 (Hopf). Eine endlich-dimensionale kommutative reelle Divisionsalgebra hat Dimension  $\leq 2$ .

BEWEIS. Sei  $D$  eine endlich-dimensionale kommutative reelle Divisionsalgebra. Wir wählen einen Isomorphismus  $D \cong \mathbb{R}^n$  und definieren eine Abbildung

$$f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}: x \mapsto \frac{x^2}{|x^2|}.$$

Die Abbildung ist durch die Nullteilerfreiheit wohldefiniert, und wegen der Bilinearität der Multiplikationsabbildung stetig. Nach Definition ist dann  $f(-x) = f(x)$ , so dass wir eine induzierte Abbildung  $\bar{f}: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  erhalten.

Die Abbildung  $\bar{f}$  ist injektiv: aus  $f(x) = f(y)$  folgt  $x^2 = \lambda^2 y^2$  für  $\lambda = \sqrt{\frac{|x^2|}{|y^2|}} > 0$ . Mit der Kommutativität faktorisieren wir  $0 = x^2 - \lambda^2 y^2 = (x + \lambda y)(x - \lambda y)$ . Wir benutzen dabei keine Assoziativität, da  $\lambda$  ein reeller Skalar ist, so dass in dieser Rechnung immer nur zwei Faktoren aus  $D$  vorkommen. Die Nullteilerfreiheit der Divisionsalgebra bedeutet nun, dass  $x = \pm \lambda y$  ist. Aber  $x$  und  $y$  liegen auf der Einheitskugel und  $\lambda$  ist ein reeller Skalar, damit ist  $x = \pm y$  und die Bilder von  $x$  und  $y$  in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  sind gleich.

Da  $\bar{f}$  eine injektive Abbildung von kompakten Hausdorff-Räumen ist, ist  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus auf das Bild. Aus der Invarianz von Gebieten, s. Proposition 5.5.5 (2), folgt dann, dass  $\bar{f}$  ein Homöomorphismus  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^{n-1}$  ist. Wir sehen aber an der Kohomologie, dass dies nur für  $n \leq 2$  der Fall sein kann.  $\square$

**BEMERKUNG 6.5.8.** *Man kann zusätzlich zeigen, dass eine endlich-dimensionale kommutative reelle Divisionsalgebra isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  sein muss, wenn sie zusätzlich noch eine Eins hat.*

*Aus der Proposition folgt insbesondere der Fundamentalsatz der reellen Algebra. Jedes irreduzible reelle Polynom vom Grad  $n$  definiert eine Körpererweiterung, deren Dimension gleich dem Grad des Polynoms ist. Damit erhalten wir insbesondere eine endlich-dimensionale reelle kommutative Divisionsalgebra. Nach der Proposition kann der Grad des Polynoms dann maximal 2 sein. Wir folgern: Jedes reelle Polynom faktorisiert als Produkt von irreduziblen Polynomen vom Grad  $\leq 2$ .*

Mit dem Cup-Produkt können wir nun auch Aussagen über die Dimension nicht notwendig kommutativer Divisionsalgebren machen.

**PROPOSITION 6.5.9 (Hopf, Stiefel).** *Wenn  $\mathbb{R}^n$  die Struktur einer reellen Divisionsalgebra hat, dann ist  $n$  eine Potenz von 2.*

**BEWEIS.** Für eine Divisionsalgebra  $D$  sind die Multiplikationsabbildungen  $x \mapsto ax$  und  $x \mapsto xa$  für  $a \in D$  linear. Für  $a \neq 0$  sind diese Abbildungen auch Isomorphismen von Vektorräumen. Insbesondere induziert die Multiplikation  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung  $\mu: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ . Die Einschränkung dieser Abbildung auf die Unterräume  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \times \{y\}$  und  $\{x\} \times \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  ist außerdem ein Homöomorphismus. Wir betrachten die induzierte Abbildung auf der Kohomologie mit  $\mathbb{F}_2$ -Koeffizienten:

$$\mu^*: \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^n) \rightarrow \mathbb{F}_2[\alpha_1, \alpha_2]/(\alpha_1^n, \alpha_2^n).$$

Die Abbildung ist schon bestimmt durch das Bild  $\mu^*(\alpha) = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2$  von  $\alpha$ , d.h. durch zwei Koeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}_2$ . Wir betrachten die von der Inklusion  $\iota_1: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  als ersten Faktor induzierte Abbildung  $\iota_1^*: \mathbb{F}_2[\alpha_1, \alpha_2]/(\alpha_1^n, \alpha_2^n) \rightarrow \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^n)$ . Es gilt  $\iota_1^*(\alpha_1) = \alpha$  und  $\iota_1^*(\alpha_2) = 0$ . Die Komposition  $\mu \circ \iota_1$  ist aber ein Homöomorphismus, was  $\lambda_1 = 1$  bedeutet. Analog sehen wir  $\lambda_2 = 1$ , also  $\mu^*(\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2$ .

Aus  $\alpha^n = 0$  folgt nun

$$0 = \mu^*(\alpha^n) = (\alpha_1 + \alpha_2)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \alpha_1^i \alpha_2^{n-i}$$

im Ring  $\mathbb{F}_2[\alpha_1, \alpha_2]/(\alpha_1^n, \alpha_2^n)$ . Es muss also  $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{2}$  für alle  $0 < i < n$  gelten. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**ÜBUNGSAUFGABE 6.5.10.** (1) *Zeigen Sie: die maximale natürliche Zahl  $k$  so dass  $2^k | n!$  ist  $k = n - r$ , wobei  $r$  die Anzahl an Einsen in der Binärdarstellung von  $n$  ist.*

(2) *Folgern Sie, dass  $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{2}$  genau dann gilt, wenn  $n$  eine Potenz von 2 ist. Allgemeiner ist die maximale natürliche Zahl  $k$  mit  $2^k | \binom{n}{i}$  (d.h. die 2-adische Bewertung von  $\binom{n}{i}$ ) gleich der Anzahl an Überträgen bei der Addition von  $n$  und  $n - i$  in Binärdarstellung.*

*Die Aussagen gelten allgemeiner für beliebige Primzahlen. Die allgemeine Form von (1) ist ein Satz von Legendre, die allgemeine Form von (2) ein Satz von Kummer.*

**ÜBUNGSAUFGABE 6.5.11.** *Zeigen Sie, dass es keine endlich-dimensionale komplexen Divisionsalgebren von Dimension  $> 1$  gibt.*

Mit einem vollständig analogen Beweis erhalten wir:

SATZ 6.5.12 (Satz von Hopf). Sei  $f: \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Abbildung, so dass

- (1)  $f$  nicht-singulär ist, d.h.  $f(x, y) = 0$  impliziert  $x = 0$  oder  $y = 0$ , und
- (2)  $f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y)$ .

Dann gilt  $\binom{n}{i} \equiv 0 \pmod{2}$  für  $n - s < i < r$ .

BEMERKUNG 6.5.13. Eine Kompositionsformel vom Format  $[r, s, n]$  für quadratische Formen ist eine Formel von Summen von Quadraten

$$\left( \sum_{i=1}^r x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^s y_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n z_i^2,$$

wobei die  $z_i$  bilinear in den Variablen  $x_j$  und  $y_k$  sind. Der Satz von Hopf gibt nun auf topologischem Weg eine notwendige Bedingung an die Zahlen  $r, s$  und  $n$ , damit eine Kompositionsformel vom Format  $[r, s, n]$  über den reellen Zahlen existieren kann. Die Bedingung gilt allgemeiner für Körper der Charakteristik  $\neq 2$ , was mit Methoden der motivischen oder étalen Kohomologie bewiesen werden kann:

- D. Dugger, D. Isaksen: The Hopf condition for bilinear forms over arbitrary fields. *Ann. Math.* 165 (2007), pp. 943–964.

BEMERKUNG 6.5.14. Tatsächlich existieren endlich-dimensionalen reellen Divisionsalgebren nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8. Die entsprechenden Divisionsalgebren sind  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , die Quaternionen  $\mathbb{H}$  und die Oktonionen  $\mathbb{O}$ . Diese Aussage ist ein Satz von Bott, Milnor und Kervaire.

- R. Bott und J. Milnor. On the parallelizability of the spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 64 (1958), 87–89.
- J. Milnor. Some consequences of a theorem of Bott. *Ann. of Math.* (2) 68 (1958), 444–449.
- M.A. Kervaire. Non-parallelizability of the  $n$ -sphere  $n > 7$ . *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.* 44 (1958), 280–283.

Der Satz kann auch anders formuliert werden: Wenn eine Lie-Gruppen-Struktur auf  $S^n$  existiert, oder allgemeiner die  $n$ -Sphäre parallelisierbar ist, dann ist  $n = 0, 1, 3, 7$ .

DEFINITION 6.5.15. Sei  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung, mit  $n > 1$ . Wir betrachten den Abbildungskegel  $\text{Cone}(f) = S^n \sqcup_f D^{2n}$ . Die Kohomologie ist dann

$$H_{\text{sing}}^i(\text{Cone}(f), \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0, n, 2n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus Dimensionsgründen gilt dann für den Kohomologiering

$$H_{\text{sing}}^i(\text{Cone}(f), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha, \beta] / (\beta^2 = \alpha\beta = 0, \alpha^2 = h(f)\beta)$$

mit  $\deg \alpha = n$  und  $\deg \beta = 2n$ . Das einzige interessante Cup-Produkt ist also  $\alpha \cup \alpha = h(f)\beta$  für eine ganze Zahl  $h(f)$ . Diese Zahl heißt Hopf-Invariante der Abbildung  $f$ .

BEMERKUNG 6.5.16. Aus der Berechnung des Kohomologierings für  $\mathbb{C}P^2$  folgt insbesondere, dass die Hopf-Invariante der Hopf-Abbildung  $\eta: S^3 \rightarrow S^2$  gleich 1 ist. Ein Satz von Adams und Atiyah besagt, dass nur die Abbildungen  $D^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1(D)$  für die reellen Divisionsalgebren  $D$  Hopf-Invariante 1 haben.

**Lusternik–Schnirelmann-Kategorie.**

DEFINITION 6.5.17. *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie von  $X$  ist die kleinste ganze Zahl  $k$ , so dass eine offene Überdeckung  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$  von  $X$  existiert, so dass die offenen Inklusionen  $U_i \hookrightarrow X$  nullhomotop sind.*

Mit Hilfe des Cup-Produkts bzw. der Struktur des Kohomologierings können wir eine untere Schranke für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie eines Raums angeben.

PROPOSITION 6.5.18. *Sei  $R$  ein Koeffizientenring und  $X$  ein wegzusammenhängender, zweitzählbarer, lokal kompakter Hausdorff-Raum, dessen Lusternik–Schnirelmann-Kategorie  $\leq m$  ist. Dann gilt für  $m$  Kohomologieklassen*

$$u_1 \in H_{\text{sing}}^{d_1}(X, R), \dots, u_m \in H_{\text{sing}}^{d_m}(X, R), \quad d_i > 0$$

*schon  $u_1 \cup \dots \cup u_m = 0$ .*

BEWEIS. Sei  $U_1, \dots, U_m$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass die Inklusionen  $U_i \hookrightarrow X$  für  $1 \leq i \leq m$  nullhomotop sind. In der langen exakten Sequenz für das Paar  $(X, U_i)$

$$\dots \rightarrow H_{\text{sing}}^{d_i}(X, U_i; R) \rightarrow H_{\text{sing}}^{d_i}(X; R) \xrightarrow{\rho_i} H_{\text{sing}}^{d_i}(U_i; R) \rightarrow \dots$$

sind die Einschränkungsabbildungen  $\rho_i$  dann trivial, so dass die Klasse  $u_i$  im Bild einer Klasse  $v_i$  in der relativen Kohomologie  $H_{\text{sing}}^{d_i}(X, U_i; R)$  ist. Dann ist das Produkt  $u_1 \cup \dots \cup u_m$  das Bild des Produkts  $v_1 \cup \dots \cup v_m$  in

$$H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, \bigcup_i U_i; R) = H_{\text{sing}}^{\bullet}(X, X; R) = 0. \quad \square$$

KOROLLAR 6.5.19. *Die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie des  $n$ -Torus  $T^n$  ist  $\geq n + 1$*

BEMERKUNG 6.5.20. *Damit sehen wir insbesondere, dass die drei Teilmengen in Übungsaufgabe 1.0.3 optimal sind. Können Sie allgemein zeigen, dass die LS-Kategorie von  $T^n$  gleich  $n + 1$  ist?*

ÜBUNGSAUFGABE 6.5.21. *Bestimmen Sie die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie für  $\mathbb{R}P^n$  und  $\mathbb{C}P^n$ .*

BEMERKUNG 6.5.22. *Abschätzungen für die Lusternik–Schnirelmann-Kategorie sind mitunter schwierig. Insbesondere die Bestimmung der Kategorie für die symplektischen Gruppen  $\text{Sp}(n)$  ist noch ein offenes Problem.*

**Borsuk–Ulam, noch mal.** Wir können auch mit dem Cup-Produkt noch einen anderen Beweis für den Borsuk–Ulam-Satz geben. Diese Anwendung basiert darauf, mit dem Cup-Produkt zu zeigen, dass sich projektive Räume nicht auf projektive Räume niedrigerer Dimension retrahieren lassen:

BEISPIEL 6.5.23. *Es gibt keine Retraktion  $\mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$  für  $m > n \geq 1$ . Wir nehmen an, dass es eine Retraktion  $r: \mathbb{C}P^m \rightarrow \mathbb{C}P^n$  der natürlichen Inklusion  $i: \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^m$  gäbe. Dann haben wir  $i^* \circ r^* = \text{id}$  als Abbildungen  $H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ . Da  $i^*$  und  $\text{id}$  Isomorphismen sind, haben wir einen Isomorphismus  $r^*: H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z})$ . Wir wählen einen Erzeuger  $u \in H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ , dann ist  $r^*(u) \in H_{\text{sing}}^2(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z})$  auch ein Erzeuger. Auf der einen Seite haben wir  $u^m = 0$  in  $H_{\text{sing}}^{2m}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ , woraus  $r^*(u^m) = r^*(0) = 0$  folgt. Auf der anderen Seite ist  $r^*(u)^m$  ein Erzeuger von  $H_{\text{sing}}^{2m}(\mathbb{C}P^m, \mathbb{Z})$ . Da  $r^*$  ein Ring-Homomorphismus ist, erhalten wir einen Widerspruch.  $\square$*

**ÜBUNGSAUFGABE 6.5.24.** Zeigen Sie, dass es für  $n > m$  keine stetige Abbildung  $f: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$  gibt, so dass  $f^*: H_{\text{sing}}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^m, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{sing}}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  nichttrivial ist.

Wir haben dann die folgende Variante des Satzes von Borsuk-Ulam. Im Beweis greifen wir auf ein paar Aussagen über Fundamentalgruppen und Homologie vor, die wir erst im Homotopietheorie-Kapitel diskutieren werden. Eventuell sind diese Aussagen aber auch bereits aus Topologie 0 bekannt.

**PROPOSITION 6.5.25.** Für  $n > m \geq 1$  gibt es keine stetige Abbildung  $g: S^n \rightarrow S^m$ , so dass  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in S^n$ .

**BEWEIS.** Sei  $g: S^n \rightarrow S^m$  eine stetige Abbildung. Wenn  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in S^n$ , dann induziert  $g$  eine Abbildung  $\bar{g}: \mathbb{R}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^m$ .

Wir benutzen nun die Fundamentalgruppe, die für den reell-projektiven Raum durch

$$\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^l) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & l = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & l > 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Die Abbildung  $\bar{g}$  induziert eine nichttriviale Abbildung  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^m)$ : wir können als Erzeuger von  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$  das Bild eines Pfades in  $S^n$  wählen, der einen Punkt  $x$  mit dem Antipodenpunkt  $-x$  verbindet. Das Bild dieses Pfades verbindet  $g(x)$  und  $g(-x) = -g(x)$ , ist also wieder ein Erzeuger von  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^m)$ . Im Spezialfall  $m = 1$  ist haben wir dann eine nicht-triviale Abbildung

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z},$$

was schon ein Widerspruch ist.

Für  $m > 1$  benutzen wir, dass  $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_1^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$  für  $n \geq 2$  ist. Dann sehen wir aus der obigen Aussage über die Fundamentalgruppen, dass  $\bar{g}$  einen Isomorphismus  $\mathbb{F}_2 \cong H_1^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1^{\text{sing}}(\mathbb{R}\mathbb{P}^m, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$  induziert. Dann folgt aus der universellen Koeffizienten-Formel Proposition 6.1.4, dass die induzierte Abbildung  $\bar{g}^*: H_{\text{sing}}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^m, \mathbb{F}_2) \rightarrow H_{\text{sing}}^1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, \mathbb{F}_2)$  ein Isomorphismus ist. Das ist ein Widerspruch zu Übungsaufgabe 6.5.24.  $\square$

Der Satz von Borsuk-Ulam (in Form von Korollar 5.6.4) ist jetzt im Prinzip ein Spezialfall: Sei  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung, so dass  $f(x) \neq f(-x)$  für alle  $x$ . Dann definieren wir

$$g: S^n \rightarrow S^{n-1}: x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Für diese Abbildung gilt  $g(-x) = -g(x)$ , und wir erhalten mit Proposition 6.5.25 einen Widerspruch.

## Homotopietheorie

In der Homotopietheorie geht es darum, Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Räumen zu verstehen, und in manchen Fällen auch tatsächlich zu berechnen. Eine besondere Rolle spielen dabei die Homotopiegruppen  $\pi_n(X, x_0)$ , deren Elemente die Homotopieklassen von Abbildungen  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  von Sphären. Wie für Homologie und Kohomologie gibt es wieder lange exakte Sequenzen (für relative Homotopiegruppen und Faserungen) als wichtigstes Rechenwerkzeug. Trotzdem gibt es wesentliche Unterschiede zwischen Homologie und Homotopie, und Homotopiegruppen sind im Allgemeinen deutlich schwerer zu berechnen, als Homologiegruppen. Die wichtigsten Sätze, die wir in diesem Kapitel diskutieren wollen sind der Satz von Hurewicz, der eine Verbindung zwischen Homotopie und Homologie liefert, und der Satz von Whitehead, der Homotopiegruppen und Homotopieäquivalenzen verbindet.

### 7.1. Homotopiegruppen

**Definition Homotopiegruppen.** Wir bezeichnen mit  $I^n = [0, 1]^n$  den  $n$ -dimensionalen Würfel. Der Rand des Würfels ist  $\partial I^n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid \exists i: t_i \in \{0, 1\}\}$ .

Zur Erinnerung: Eine Homotopie zwischen zwei Abbildungen  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Raumpaaren ist eine Abbildung

$$H: (X, A) \times [0, 1] = (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B),$$

so dass  $H(-, 0) = f$  und  $H(-, 1) = g$ . Dies verallgemeinert die Definition von Homotopie relativ zum Unterraum  $A$  aus Definition 2.1.6.

**DEFINITION 7.1.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$  ein Basispunkt. Die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  von Paaren wird mit  $\pi_n(X, x_0)$  bezeichnet.

**BEMERKUNG 7.1.2.** Im Spezialfall  $n = 0$  setzen wir  $I^0 = \text{pt}$  und  $\partial I^0 = \emptyset$ , so dass  $\pi_0(X, x_0)$  die Menge der Wegzusammenhangskomponenten ist (und  $x_0$  keine Rolle spielt).

**DEFINITION 7.1.3.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x_0 \in X$  ein Basispunkt. Für  $n \geq 1$  definieren wir eine Addition von Homotopieklassen  $f, g \in \pi_n(X, x_0)$  durch

$$f + g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0): (t_1, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

**PROPOSITION 7.1.4.** Die Addition von Homotopieklassen ist wohldefiniert. Mit der so definierten Addition wird  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , zu einer Gruppe. Das neutrale Element ist die konstante Abbildung  $x_0: I^n \rightarrow X: (t_1, \dots, t_n) \mapsto x_0$ , und das Inverse für die Klasse  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$  von  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  ist gegeben durch  $f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 7.1.5.** Beweisen Sie Proposition 7.1.4.

LEMMA 7.1.6 (Eckmann–Hilton-Trick). Sei  $S$  eine Menge mit zwei assoziativen Operationen  $\bullet, \circ: S \times S \rightarrow S$ . Wir nehmen an, dass beide Operationen ein gemeinsames neutrales Element  $e$  haben und das folgende Distributivgesetz für alle  $a, b, c, d \in S$  erfüllt ist:

$$(a \bullet b) \circ (c \bullet d) = (a \circ c) \bullet (b \circ d).$$

Dann stimmen  $\bullet$  und  $\circ$  überein und definieren eine kommutative Operation auf  $S$ .

BEWEIS. Aus dem Distributivgesetz (und dem gemeinsamen neutralen Element) folgt mit  $b = c = e$  schon  $a \circ d = a \bullet d$ . Mit  $a = d = e$  erhalten wir  $b \circ c = c \bullet b$ .  $\square$

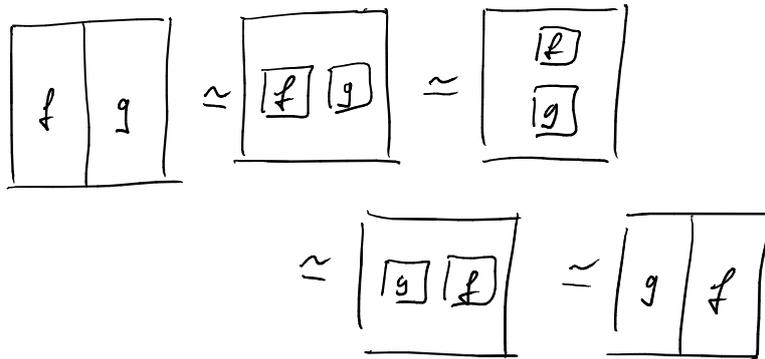
PROPOSITION 7.1.7. Die Definition der Addition von Homotopieklassen ist unabhängig von der Wahl von  $t_1$  als ausgezeichnete Koordinate. Für  $n \geq 2$  ist  $\pi_n(X, x_0)$  eine abelsche Gruppe.

BEWEIS. Wir können genausogut für  $i \in \{2, \dots, n\}$  andere Additionen definieren:

$$(f +_i g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, t_2, \dots, 2t_i, \dots, t_n) & t_i \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(t_1, t_2, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & t_i \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann ist leicht zu prüfen, dass  $+$  und  $+_i$  für  $i \in \{2, \dots, n\}$  die konstante Abbildung  $x_0$  als gemeinsames neutrales Element haben und das Distributivgesetz im Eckmann–Hilton-Trick 7.1.6 erfüllen. Daraus folgen beide Behauptungen.  $\square$

BEMERKUNG 7.1.8. Ein alternativer Beweis für die Kommutativität der Gruppenoperation auf  $\pi_n(X, x_0)$  für  $n \geq 2$  ist im folgenden Bild enthalten. Die abgebildeten Quadrate sind dabei  $\mathbb{I}^2$ . Im ersten Quadrat haben wir die Komposition  $f + g$ , in der linken Hälfte haben wir  $f: (\mathbb{I}^2, \partial\mathbb{I}^2) \rightarrow (X, x_0)$ , in der rechten Hälfte entsprechend  $g$ . Das Bild besagt, dass wir die Bereiche, auf denen  $f$  bzw.  $g$  ausgeführt werden, schrumpfen können (alles außerhalb der kleinen Quadrate mit  $f$  und  $g$  wird auf den Basispunkt  $x_0$  abgebildet). Dann können wir die kleinen Quadrate beliebig verschieben, und zur Komposition  $g + f$  übergehen. Die Kommutativität für  $n \geq 2$  beruht damit darauf, dass in  $\mathbb{I}^2$  Platz ist, die Reihenfolge von  $f$  und  $g$  zu vertauschen, was in  $\mathbb{I}^1$  nicht funktioniert.



ÜBUNGSAUFGABE 7.1.9. Der natürliche Homöomorphismus

$$(\mathbb{I}^n / \partial\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n / \partial\mathbb{I}^n) \cong (S^n, s_0)$$

von Raumpaaren bedeutet, dass wir  $\pi_n(X, x_0)$  auch als Menge der Homotopieklassen von punktierten Abbildungen  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  interpretieren können. Zeigen Sie,

dass in dieser Interpretation die Summe  $f + g$  zweier punktierter Abbildungen  $f, g: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  durch die Komposition

$$(S^n, s_0) \xrightarrow{\nabla} (S^n, s_0) \vee (S^n, s_0) \xrightarrow{f \vee g} (X, x_0)$$

mit der Pinch-Abbildung aus Proposition 3.3.3 gegeben ist, s. Abbildung 6.

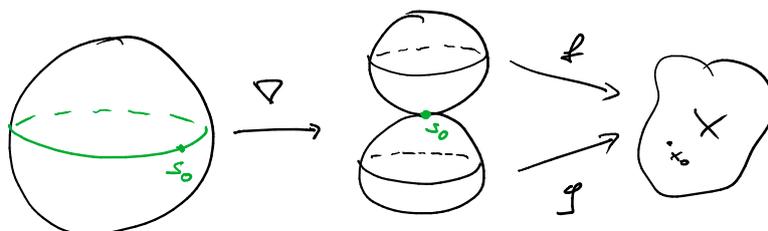


ABBILDUNG 6. Komposition von Homotopieklassen mittels Pinch-Abbildung  $\nabla: S^n \rightarrow S^n \vee S^n$

PROPOSITION 7.1.10. Eine stetige Abbildung punktierter Räume  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  induziert (durch Komposition) für alle  $n$  eine Abbildung  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ . Für  $n \geq 1$  ist diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus. Dadurch werden die Homotopiegruppen zu Funktoren  $\pi_n: \mathbf{Top}_\bullet \rightarrow \mathbf{Grp}$  von punktierten topologischen Räumen in die Kategorie der Gruppen. Dieser Funktor ist homotopieinvariant, d.h. für homotope Abbildungen  $f \simeq g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  gilt

$$\pi_n(f) = \pi_n(g): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.11. Beweisen Sie Proposition 7.1.10.

KOROLLAR 7.1.12. Sei  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  eine punktierte Homotopieäquivalenz. Dann ist die induzierte Abbildung  $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  ein Isomorphismus.

BEISPIEL 7.1.13. Für einen zusammenziehbaren Raum sind alle Homotopiegruppen trivial:  $\pi_n(X, x_0) = 0$  (bzw.  $\pi_0(X, x_0) = \{*\}$ ).  $\square$

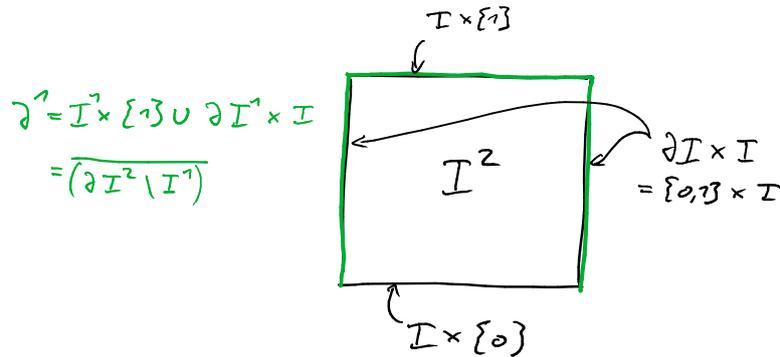
**Relative Homotopiegruppen.** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  ein Unterraum und  $x_0 \in A$  ein Basispunkt. Wir nennen  $(X, A, x_0)$  *punktiertes Raumpaar*. Analog zur relativen Homologie definieren wir *relative Homotopiegruppen*  $\pi_n(X, A, x_0)$ , die über eine lange exakte Sequenz die von der Inklusion  $i: A \hookrightarrow X$  induzierten Abbildungen  $i_*: \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  kontrollieren.

DEFINITION 7.1.14. Eine Sequenz  $Z \subseteq Y \subseteq X$  von Unterräumen eines Raums  $X$  heißt *Raumtripel*  $(X, Y, Z)$ . Abbildungen von Raumtripeln sind stetige Abbildungen  $f: (X, Y, Z) \rightarrow (X', Y', Z')$ , die die Unterrauminklusionen bewahren, d.h.  $f(Z) \subseteq Z'$  und  $f(Y) \subseteq Y'$ . Für zwei Abbildungen  $f, g: (X, Y, Z) \rightarrow (X', Y', Z')$  von Raumtripeln ist eine Homotopie von Raumtripeln eine stetige Abbildung

$$H: (X, Y, Z) \times [0, 1] = (X \times [0, 1], Y \times [0, 1], Z \times [0, 1]) \rightarrow (X', Y', Z')$$

von Raumtripeln mit  $H(-, 0) = f$  und  $H(-, 1) = g$ .

DEFINITION 7.1.15. Wir definieren den Unterraum  $J^n = \mathbb{I}^n \times \{1\} \cup \partial \mathbb{I}^n \times \mathbb{I}$  von  $\partial \mathbb{I}^{n+1} = \mathbb{I}^n \times \partial \mathbb{I} \cup \partial \mathbb{I}^n \times \mathbb{I}$ . Die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von Tripeln  $f: (\mathbb{I}^n, \partial \mathbb{I}^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ ,  $n \geq 1$ , wird mit  $\pi_n(X, A, x_0)$  bezeichnet.

ABBILDUNG 7. Der Raum  $J^1$  in  $I^2$ .

BEMERKUNG 7.1.16. Alternativ können wir  $J^{n-1}$  als Abschluss von  $\partial I^n \setminus I^{n-1}$  (Abschluss von Rand minus eine Seitenfläche) auffassen, wobei  $I^{n-1}$  als Seitenfläche mit  $t_n = 0$  eingebettet ist.

Es gibt einen Homöomorphismus

$$(I^n / J^{n-1}, \partial I^n / J^{n-1}, J^{n-1} / J^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1}, s_0)$$

von Raumtripeln. Damit können wir  $\pi_n(X, A, x_0)$  auch als Homotopieklassen von Abbildungen von Tripeln  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  verstehen.

Damit können wir die Elemente von  $\pi_n(X, A, x_0)$  als Homotopieklassen von Abbildungen  $(S^n, s_0) \rightarrow (A, x_0)$  in  $\pi_n(A, x_0)$  auffassen, die nach Komposition mit der Inklusion  $i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  in  $\pi_n(X, x_0)$  nullhomotop werden. Wir werden das bei der langen exakten Homotopiesequenz in Theorem 7.2.9 genauer sehen.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.17. Der Raum  $J^{n-1}$  ist ein Deformationsretrakt von  $I^n$ , d.h. es existiert eine Abbildung  $r: I^n \rightarrow J^{n-1}$ , so dass für die Inklusion  $i: J^{n-1} \rightarrow I^n$  gilt  $r \circ i = \text{id}_{J^{n-1}}$  und  $i \circ r$  ist homotop (rel  $J^{n-1}$ ) zur Identität auf  $I^n$ .

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.18. Sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Raumpaars. Zeigen Sie, dass die Formeln aus Definition 7.1.3 für  $n \geq 2$  auf  $\pi_n(X, A, x_0)$  eine Gruppenoperation definieren, und dass diese Gruppenoperation für  $n \geq 3$  kommutativ ist. Warum gibt es im Fall  $n = 1$  nicht unbedingt eine Gruppenstruktur?

Die relativen Homotopiegruppen sind ebenfalls wieder funktoriell.

PROPOSITION 7.1.19. Eine stetige Abbildung  $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  punktierter Raumpaare induziert (durch Komposition) für alle  $n$  eine Abbildung

$$f_*: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0).$$

Für  $n \geq 2$  ist diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus. Dadurch werden die Homotopiegruppen zu Funktoren  $\pi_n: \mathbf{Top}_*^2 \rightarrow \mathbf{Grp}$  von punktierten Raumpaaren in die Kategorie der Gruppen. Dieser Funktor ist homotopieinvariant, d.h. für homotope Abbildungen  $f \simeq g: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  gilt

$$\pi_n(f) = \pi_n(g): \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0).$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.20. Beweisen Sie Proposition 7.1.19.

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.21 (Kompressionskriterium). Eine Abbildung

$$f: (I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$$

repräsentiert genau dann das neutrale Element von  $\pi_n(X, A, x_0)$ , wenn sie (relativ zu  $\partial I^n$ ) homotop zu einer Abbildung ist, deren Bild in  $A$  liegt.

**Produktformel.**

PROPOSITION 7.1.22. Seien  $X_i$ ,  $i \in I$  topologische Räume. Dann induzieren die Projektionsabbildungen  $\prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$  Isomorphismen

$$\pi_n \left( \prod_{i \in I} X_i \right) \cong \prod_{i \in I} \pi_n(X_i).$$

BEWEIS. Aus der universellen Eigenschaft des Produkts folgt, dass eine Abbildung  $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  bereits durch die einzelnen Komponenten  $f_i: Y \rightarrow X_i$  festgelegt ist. Diese Aussage benutzen wir mit  $Y = S^n$  um eine Umkehrabbildung zu definieren, und mit  $Y = S^n \times [0, 1]$  um zu sehen, dass beide Abbildungen mit der Äquivalenzrelation Homotopie kompatibel sind.  $\square$

**Abhängigkeit vom Basispunkt.** Es gibt einen Unterschied zwischen punktierten Homotopien, also Homotopien  $H: (I^n, \partial I^n) \times [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$  (die wir wegen  $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \cong (S^n, s_0)$  auch als  $H: (S^n, s_0) \times [0, 1] \rightarrow (X, x_0)$  schreiben können) und sogenannten *freien* Homotopien  $H: S^n \rightarrow X$ , bei denen der Basispunkt keine Rolle spielt.

DEFINITION 7.1.23. Sei  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  eine Abbildung von Raumpaa- ren, und sei  $\gamma: I \rightarrow X$  ein Weg von  $x_0 = \gamma(0)$  nach  $x_1 = \gamma(1)$ . Dann definieren wir wie in der Abbildung eine Abbildung  $f^\gamma: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  durch Zusammensetzung von  $f$  und  $\gamma$ . Auf dem inneren Quadrat in der Abbildung ist die ursprüngliche

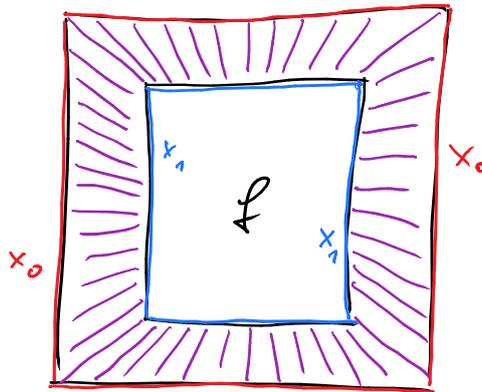


Abbildung  $f$ . Auf den violetten Verbindungswegen zwischen dem äußeren Quadrat und dem inneren Quadrat wird jeweils der Weg  $\gamma$  durchlaufen.

DEFINITION 7.1.24. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Das Fundamentalgruppoid von  $X$  ist das folgende Gruppoid  $\Pi_1(X)$ , s. Definition A.1.5:

- Die Objekte von  $\Pi_1(X)$  sind die Punkte des Raums  $X$ .
- Für zwei Punkte  $x, y \in X$  ist  $\text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x, y)$  die Menge der Homotopie- klassen von Wegen  $\gamma: I \rightarrow X$  mit  $\gamma(0) = x$  und  $\gamma(1) = y$ .
- Komposition von Morphismen in  $\Pi_1(X)$  ist durch Hintereinanderausführen von Wegen (wie in Definition 7.1.3) gegeben.

BEMERKUNG 7.1.25. Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  ist gleich der Automor- phismengruppe des Basispunkts  $x_0$  im Fundamentalgruppoid:

$$\pi_1(X, x_0) = \text{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_0).$$

Das Fundamentalgruppoid ist besser geeignet, wenn es darum geht, den Einfluss der Basispunktwahl auf die Homotopiegruppen zu verstehen.

PROPOSITION 7.1.26. *Definition 7.1.23 ist kompatibel mit Homotopien und induziert eine Wirkung des Fundamentalgruppoids:*

$$\mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) \times \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0).$$

BEWEIS. Für eine Homotopie  $H: (\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n) \times \mathbb{I} \rightarrow (X, x_1)$  zwischen Abbildungen  $f = H(-, 0)$  und  $g = H(-, 1)$  und einen Weg  $\gamma: \mathbb{I} \rightarrow X$  erhalten wir durch Komposition eine Homotopie  $H^\gamma: f^\gamma \sim g^\gamma$ . Umgekehrt erhalten wir für eine Abbildung  $f: (\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n) \rightarrow (X, x_1)$  und eine Homotopie  $H: \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow X$  zwischen Wegen  $\gamma = H(-, 0)$  und  $\gamma' = H(-, 1)$  eine Homotopie  $f^\gamma \sim f^{\gamma'}$ . Damit sehen wir, dass wir wohldefinierte Abbildungen  $\mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_1) \times \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  wie behauptet erhalten.

Um zu sehen, dass dies eine Wirkung des Fundamentalgruppoids ist, brauchen wir noch die folgenden Homotopien

- (1)  $(f + g)^\gamma \sim f^\gamma + g^\gamma$
- (2)  $f^{\gamma \circ \gamma'} \sim (f^{\gamma'})^\gamma$
- (3)  $f^{\mathrm{id}_{x_0}} \sim f$ , wobei  $\mathrm{id}_{x_0} \in \mathrm{Hom}_{\Pi_1(X)}(x_0, x_0)$  der konstante Weg ist.

□

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.27. *Konstruieren Sie die Homotopie  $(f + g)^\gamma \sim f^\gamma + g^\gamma$  aus dem Beweis von Proposition 7.1.26.*

KOROLLAR 7.1.28. *Für  $n \geq 2$  ist  $\pi_n(X, x_0)$  ein Modul über dem Gruppenring  $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$ .*

KOROLLAR 7.1.29. *Sei  $X$  ein wegzusammenhängender Raum. Dann sind die Homotopiegruppen  $\pi_n(X, x_0)$  bis auf Isomorphismus unabhängig von der Wahl des Basispunkts  $x_0$ .*

Analoge Aussagen gelten ebenfalls für die relativen Homotopiegruppen, insbesondere gibt es für ein punktiertes Raumpaars  $(X, A, x_0)$  eine Wirkung von  $\pi_1(A, x_0)$  auf den relativen Homotopiegruppen  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

### Höhere Zusammenhangseigenschaften.

DEFINITION 7.1.30. *Ein punktierter topologischer Raum  $(X, x_0)$  heißt  $n$ -zusammenhängend, wenn  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für alle  $i \leq n$  gilt.*

BEMERKUNG 7.1.31. *Diese Definition verallgemeinert die Zusammenhangseigenschaften, die bereits in der Analysis-Vorlesung (z.B. für Wegunabhängigkeit von Integralen) betrachtet werden: 0-zusammenhängend ist genau wegzusammenhängend, und 1-zusammenhängend ist einfach zusammenhängend. Nach Korollar 7.1.29 spielt die Wahl des Basispunkts für  $n$ -zusammenhängend mit  $n > 0$  keine Rolle.*

ÜBUNGSAUFGABE 7.1.32. *Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:*

- (1) *Jede Abbildung  $S^i \rightarrow X$  ist homotop zu einer konstanten Abbildung.*
- (2) *Für jede Abbildung  $f: S^i \rightarrow X$  existiert eine Abbildung  $\bar{f}: D^i \rightarrow X$  mit  $\bar{f}|_{\partial D^i} = f$ .*
- (3)  *$\pi_i(X, x_0) = 0$  für alle  $x_0 \in X$ .*

### Schwache Äquivalenzen.

DEFINITION 7.1.33. *Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt schwache Äquivalenz, wenn für alle  $k \geq 0$  und alle Basispunkte  $x \in X$  die induzierten Abbildungen*

$$\pi_k(X, x) \rightarrow \pi_k(Y, f(x))$$

*Isomorphismen sind.*



Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  hat die relative Homotopieanhebungseigenschaft bezüglich eines Raumpaars  $(X, A)$ , wenn für alle gegebenen kommutativen Quadrate die Homotopie  $\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow E$  existiert:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup_{A \times \{0\}} A \times [0, 1] & \xrightarrow{f \cup H_A} & E \\ \downarrow i_0 \cup i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

BEMERKUNG 7.2.2. Das bedeutet, dass eine Homotopie  $H: X \times [0, 1] \rightarrow B$  zu einer Homotopie  $\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow E$  angehoben werden kann, wenn dies für den Anfangswert  $H(-, 0): X \times \{0\} \rightarrow B$  gilt. In der relativen Homotopieanhebungseigenschaft können wir zusätzlich die Anhebung der Homotopie auf einem Unterraum  $A \subset X$  festlegen.

Die relative Homotopieanhebungseigenschaft für  $p: E \rightarrow *$  wird auch als Homotopieerweiterungseigenschaft bezeichnet, da damit eine auf dem Unterraum  $A$  definierte Homotopie  $H: A \times [0, 1] \rightarrow E$  zu einer Homotopie  $\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow E$  erweitert werden kann.

### Faserungen.

DEFINITION 7.2.3. Eine stetige Abbildung  $p: E \rightarrow B$  von topologischen Räumen heißt Serre-Faserung, wenn sie die Homotopieanhebungseigenschaft bezüglich der Räume  $I^n$ ,  $n \geq 0$  hat, d.h. für jedes kommutative Quadrat der folgenden Form eine Anhebung  $h$  existiert, so dass das vollständige Diagramm (mit  $h$ ) kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \iota & \nearrow h & \downarrow p \\ I^{n+1} & \longrightarrow & B \end{array}$$

Eine stetige Abbildung  $p: E \rightarrow B$  von topologischen Räumen heißt Hurewicz-Faserung, wenn sie die Homotopieanhebungseigenschaft bezüglich aller topologischer Räume  $A$  hat, d.h. für jedes kommutative Quadrat der folgenden Form eine Anhebung  $h$  existiert, so dass das vollständige Diagramm (mit  $h$ ) kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} A \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow \iota & \nearrow h & \downarrow p \\ A \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

BEMERKUNG 7.2.4. Die Homotopieanhebungseigenschaft für alle  $I^n$ ,  $n \geq 0$  ist äquivalent zur Homotopieanhebungseigenschaft für alle  $D^n$ ,  $n \geq 0$ . Mit Induktion können wir auch sehen, dass die Homotopieanhebungseigenschaft für alle  $D^n$ ,  $n \geq 0$  äquivalent zur Homotopieanhebungseigenschaft für alle CW-Komplexe  $A$  ist. Ebenfalls äquivalent dazu ist die relative Anhebungseigenschaft für  $(D^n, S^{n-1})$ , sowie die relative Anhebungseigenschaft für alle CW-Paare  $(X, A)$ .

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.5. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen Hurewicz-Faserungen sind:

- (1) Die Projektionsabbildung für topologische Räume  $B, F$ :

$$\text{pr}_1: B \times F \rightarrow B$$

- (2) Die Auswertungsabbildung für einen topologischen Raum  $X$ :

$$\text{Top}(I, X) \rightarrow X \times X: (\gamma: [0, 1] \rightarrow X) \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$$

**ÜBUNGSAUFGABE 7.2.6.** Zeigen Sie, dass Faserungen stabil unter Pullback sind: Wenn  $p: E \rightarrow B$  eine Faserung ist und  $B' \rightarrow B$  eine stetige Abbildung, dann ist die induzierte Abbildung  $p': E \times_B B' \rightarrow B'$  eine Faserung.

Zeigen Sie, dass Faserungen stabil unter Komposition sind.

**DEFINITION 7.2.7.** Für einen punktierten topologischen Raum  $(X, x)$  definieren den Pfadraum

$$P(X) = \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \in \mathbf{Top}(I, X) \mid \gamma(0) = x\},$$

ausgestattet mit der Unterraumtopologie von  $\mathbf{Top}(I, X)$  (wobei der Raum der Abbildungen wiederum die kompakt-offene Topologie trägt). Die Auswertungsabbildung  $P(X) \rightarrow X: (\gamma: [0, 1] \rightarrow X) \mapsto \gamma(1)$  ist eine Faserung.

Für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir den Abbildungspfadraum als Pullback

$$\begin{array}{ccc} P(f) & \longrightarrow & \mathbf{Top}(I, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma \mapsto \gamma(1) \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

und die Abbildungsfaserung  $\tilde{f}: P(f) \rightarrow Y: \gamma \mapsto \gamma(0)$ .

Der Raum  $\tilde{f}^{-1}(x)$  heißt Homotopiefaser von  $f: X \rightarrow Y$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 7.2.8.** (1) Zeigen Sie, dass  $f: X \rightarrow Y$  eine Hurewicz-Faserung ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$i: X \rightarrow P(f): x \mapsto (x, \gamma_x) \in P(f) \subset X \times \mathbf{Top}(I, Y)$$

eine Homotopieäquivalenz ist, wobei  $\gamma_x$  den konstanten Weg am Punkt  $x$  bezeichnet.

(3) Zeigen Sie, dass  $\tilde{f} \circ i = f$  ist.

### Lange exakte Homotopiesequenzen.

**SATZ 7.2.9** (lange exakte Sequenz für relative Homotopiegruppen).

Für ein punktiertes Raumpaard  $(X, A, x_0)$  existieren Randabbildungen

$$\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0), n \geq 1,$$

die für  $n \geq 2$  Gruppenhomomorphismen sind, so dass die folgende Sequenz exakt ist:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0). \end{aligned}$$

Hier bezeichnen  $i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  und  $j: (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$  die offensichtlichen Inklusionen von Paaren bzw. Tripeln von Räumen.

Diese Sequenz ist natürlich im punktierten Raumpaard  $(X, A, x_0)$ , d.h. für eine Abbildung  $f: (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  von punktierten Raumpaaren gibt es eine entsprechende kommutative Leiter von langen exakten Sequenzen.

**BEMERKUNG 7.2.10.** Am Ende der langen exakten Sequenz müssen wir uns noch kurz Gedanken machen, was Exaktheit eigentlich bedeutet, wenn wir nur Gruppen oder punktierte Mengen haben. Solange wir noch Gruppen haben, ist Exaktheit einer Sequenz  $G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$  auch wieder durch  $\ker g = \text{Im } f$  definiert. Für eine Abbildung punktierter Mengen  $f: (A, a) \rightarrow (B, b)$  definieren wir  $\ker f := f^{-1}(b)$  als Urbild des Basispunkts, dann können wir Exaktheit auch wieder durch  $\ker = \text{Im}$  definieren. Anders als bei Gruppen können dabei aber ungewohnte Effekte auftreten,

z.B. gibt es für unterschiedliche Elemente  $b_1, b_2 \in B$  nicht unbedingt eine Bijektion  $f^{-1}(b_1) \xrightarrow{\cong} f^{-1}(b_2)$ .

BEWEIS. Die Randabbildungen  $\partial: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$  sind gegeben durch Einschränkung einer Abbildung  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  auf  $I^{n-1} \subset I^n$  (eingebettet als  $t_n = 0$ ). Da  $I^{n-1} \subset \partial I^n$  und  $J^{n-1} \cap I^{n-1} = \partial I^{n-1}$  erhalten wir durch diese Einschränkung eine Abbildung  $f|_{I^{n-1}}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (A, x_0)$ . Diese Einschränkung ist offensichtlich kompatibel mit Homotopien, also wohldefiniert. Die Abbildung ist ein Homomorphismus, weil die Gruppenoperation für  $\pi_n(X, A, x_0)$  und  $\pi_{n-1}(A, x_0)$  durch die gleichen Formeln definiert wird.

*Exaktheit bei  $\pi_n(X, x_0)$ :* Die Komposition  $j_* \circ i_*$  ist gleich 0, da nach dem Kompressionskriterium 7.1.21 die Komposition  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, x_0, x_0)$  das neutrale Element repräsentiert.

Sei umgekehrt  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, x_0, x_0)$  im Kern von  $j_*$ , dann ist nach Kompressionskriterium 7.1.21  $f$  homotop rel  $\partial I^n$  zu einer Abbildung, deren Bild in  $A$  liegt. Damit ist  $f$  im Bild von  $i_*$ .

*Exaktheit bei  $\pi_n(X, A, x_0)$ :* Die Komposition  $\partial \circ j_*$  ist gleich 0, da die Einschränkung einer Abbildung  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, x_0, x_0)$  auf  $I^{n-1}$  einfach konstant ist.

Sei umgekehrt  $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  im Kern von  $\partial$ . Das bedeutet, dass die Einschränkung  $f|_{I^{n-1}}: (I^{n-1} \times \{0\}, \partial I^{n-1} \times \{0\}) \rightarrow (A, x_0)$  homotop (relativ  $\partial I^{n-1}$ ) zu einer konstanten Abbildung ist. Wir können diese Homotopie  $H: (I^{n-1} \times I, \partial I^{n-1} \times I) \rightarrow (A, x_0)$  mit  $f$  zu einer Abbildung  $H': J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow X$  kombinieren, die auf  $I^n \times \{1\}$  durch  $f$ , auf  $I^{n-1} \times \{0\} \times I$  durch die Homotopie  $H$  und auf dem Rest von  $\partial I^n \times I$  durch die konstante Abbildung  $x_0$  gegeben ist. Die Deformationsretraktion aus Übungsaufgabe 7.1.17 liefert eine Abbildung  $K: I^{n+1} \rightarrow X$ , die auf  $J^n \subset I^{n+1}$  gleich  $H'$  ist. Nach Konstruktion ist  $K$  eine Homotopie von Abbildungen  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  zwischen  $f$  und  $K(-, 1): (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Damit liegt  $[f] = j_*([K(-, 1)])$  im Bild von  $j_*$ .

*Exaktheit an  $\pi_n(A, x_0)$ :* Die Komposition  $i_* \circ \partial$  ist gleich 0, da die Einschränkung einer Abbildung  $f: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  auf  $I^n$  genau durch  $f$  homotop (relativ  $\partial I^n$ ) zu einer konstanten Abbildung ist.

Sei umgekehrt  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$  eine Abbildung, so dass die Komposition  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  nullhomotop ist. Dann liefert diese Homotopie  $H: (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  eine Abbildung  $F: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$  mit  $\partial([F]) = [f]$ .  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 7.2.11. Sei  $(X, A, B, x_0)$  ein punktiertes Raumtripel  $x_0 \in B \subset A \subset X$ . Modifizieren Sie den Beweis von Satz 7.2.9 um zu zeigen, dass es eine lange exakte Homotopiesequenz gibt:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, B, x_0) \rightarrow \pi_1(X, A, x_0). \end{aligned}$$

BEISPIEL 7.2.12. Sei  $(X, A, x_0)$  ein punktiertes Raumpaard, so dass  $X$  zusammenziehbar ist. Aus der langen exakten Homotopiesequenz 7.2.9 erhalten wir Isomorphismen  $\partial: \pi_n(X, A) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(A)$  für  $n \geq 1$ . Dies können wir insbesondere auf den reduzierten Kegel  $C(A)$  für einen punktierten Raum  $(A, x_0)$  anwenden, s. Definition 2.2.10. Zusammen mit der Quotientenabbildung  $q: (C(A), A) \rightarrow (\Sigma A, x_0)$  erhalten wir einen Einhängungshomomorphismus für Homotopiegruppen:

$$S: \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\partial^{-1}} \pi_{n+1}(C(A), A) \xrightarrow{q_*} \pi_{n+1}(\Sigma A, x_0).$$

Anders als bei der Homologie ist dieser Homomorphismus im Allgemeinen kein Isomorphismus! Der Einhängungssatz von Freudenthal besagt, dass die Einhängungshomomorphismen

$$S: \pi_{n+k}(\Sigma^k A, x_0) \rightarrow \pi_{n+k+1}(\Sigma^{k+1} A, x_0)$$

für große  $k$  Isomorphismen werden, dies führt auf stabile Homotopiegruppen und stabile Homotopietheorie.  $\square$

SATZ 7.2.13. Sei  $p: E \rightarrow B$  eine Serre-Faserung. Wir wählen Basispunkte  $b \in B$  und  $x \in F = p^{-1}(b)$ . Dann ist die Abbildung  $p_*: \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b)$  für alle  $n \geq 1$  ein Isomorphismus. Wenn  $B$  wegzusammenhängend ist, erhalten wir insbesondere eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, x) \rightarrow \pi_n(E, x) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(E, x_0) \rightarrow 0.$$

BEWEIS. Surjektivität der Abbildung  $p_*$ : Sei  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b)$  ein Repräsentant eines Elements in  $\pi_n(B, b)$ . Wir wählen als Anhebung von  $f|_{J^{n-1}}$  nach  $E$  die konstante Abbildung mit Bild  $x \in E$ . Nach der relativen Homotopieanhebungseigenschaft haben wir dann eine Anhebung im folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} I^{n-1} \times \{1\} \cup \partial I^{n-1} \times I & \xlongequal{\quad} & J^{n-1} \xrightarrow{x} E \\ & & \downarrow \quad \nearrow \tilde{f} \quad \downarrow p \\ & & I^n \xrightarrow{f} B \end{array}$$

Es gilt  $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq F = p^{-1}(b)$ , da  $f(\partial I^n) = b$ . Die Anhebung  $\tilde{f}$  ist damit Repräsentant eines Elements in  $\pi_n(E, F, x)$  mit  $p_*([\tilde{f}]) = [f]$ .

Injektivität von  $p_*$ : Für gegebene Abbildungen  $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x)$  mit  $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$  sei  $G: (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b)$  eine Homotopie zwischen  $p \circ \tilde{f}_0$  und  $p \circ \tilde{f}_1$ . Wir haben teilweise Anhebungen von  $G$ , die auf  $I^n \times \{0\}$  durch  $\tilde{f}_0$ , auf  $I^n \times \{1\}$  durch  $\tilde{f}_1$  und auf  $J^{n-1} \times I$  durch den Basispunkt  $x$  gegeben sind. Wir wenden wieder die relative Homotopieanhebungseigenschaft an und erhalten mit der Anhebung  $\tilde{G}: I^n \times I \rightarrow E$  eine Homotopie zwischen  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{f}_1$ . Damit ist  $p_*$  injektiv.

Die Behauptung folgt dann aus Satz 7.2.9.  $\square$

BEMERKUNG 7.2.14. Aus dem obigen Beweis können wir auch die Beschreibung der Randabbildung  $\pi_n(B, b) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x)$  ablesen: Ein Element von  $\pi_n(B, b)$  ist durch eine Abbildung  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b)$  gegeben. Die Einschränkung der Anhebung  $\tilde{f}: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x)$  auf  $\partial I^n$  ist auf  $J^{n-1}$  konstant  $x$ . Schränken wir auf die verbleibende Seite ein, ist  $\tilde{f}|_{I^{n-1}}: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \rightarrow (F, x)$  ein Repräsentant von  $\partial[f] \in \pi_{n-1}(F, x)$ .

**Faserbündel und Anwendungen.**

DEFINITION 7.2.15. Eine Abbildung  $p: E \rightarrow B$  heißt Faserbündel mit Faser  $F$ , wenn es für jeden Punkt  $x \in B$  eine offene Umgebung  $U \subset B$  und einen Homöomorphismus  $h: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$  gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U \end{array}$$

Diese Homöomorphismen heißen lokale Trivialisierungen. Der Raum  $B$  heißt Basis des Faserbündels, der Raum  $E$  heißt Totalraum.

PROPOSITION 7.2.16. *Faserbündel sind Serre-Faserungen.*

BEWEIS. Sei  $p: E \rightarrow B$  ein Faserbündel. Wir müssen die Homotopieanhebungseigenschaft für  $I^n \times \{0\} \rightarrow I^n \times I$  zeigen. Sei  $G: I^n \times I \rightarrow B$  eine Homotopie, und sei  $\tilde{g}_0: I^n \times \{0\} \rightarrow E$  eine Anhebung von  $g_0 = G(-, 0)$ . Wir wählen eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}$  von  $B$  mit lokalen Trivialisierungen  $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F$ . Da  $I^n \times I$  kompakt ist, gibt es eine Unterteilung von  $I^n \times I$  in kleinere Würfel, so dass jeder der kleinen Würfel in einem der  $U_\alpha$  landet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass  $G: I^n \times I \rightarrow B$  in einem der  $U_\alpha$  landet. Induktiv können wir auch annehmen, dass wir die Anhebung bereits auf  $\partial I^n \times I$  konstruiert haben. Wir müssen also nur die Anhebung entlang der Produktprojektion  $U_\alpha \times F \rightarrow U_\alpha$  konstruieren. Diese Anhebung  $\tilde{G}: I^n \times I \rightarrow U_\alpha \times F$  ist in der ersten Komponente  $U_\alpha$  durch  $G$  gegeben. In der zweiten Komponente  $F$  haben wir die Komposition

$$I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$$

der Retraktion  $I^n \times I \rightarrow I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$  und der Abbildung  $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I \rightarrow F$ , die durch  $\tilde{g}_0$  auf  $I^n \times \{0\}$  und der induktiv bereits konstruierten Anhebung auf  $\partial I^n \times I$  gegeben ist.  $\square$

BEISPIEL 7.2.17. *Ein Faserbündel mit diskreter Faser ist eine Überlagerung. Für eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $X$  und  $\tilde{X}$  zusammenhängend induziert die lange exakte Homotopiesequenz Isomorphismen  $\pi_n(\tilde{X}) \rightarrow \pi_n(X)$  für alle  $n \geq 2$  und eine exakte Sequenz  $1 \rightarrow \pi_1(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_0(F) \rightarrow *$ .*  $\square$

BEISPIEL 7.2.18. *Vektorbündel und Hauptfaserbündel für topologische Gruppen sind Faserbündel.*  $\square$

BEISPIEL 7.2.19. *Schränken wir die natürliche Projektion*

$$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n: (z_0, \dots, z_n) \mapsto [z_0 : \dots : z_n]$$

auf die Einheitssphäre  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  (gegeben durch  $\|z_0\|^2 + \dots + \|z_n\|^2 = 1$ ) ein, erhalten wir ein Faserbündel  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  mit Faser  $S^1$ . Der Spezialfall  $n = 1$  liefert die Hopf-Faserung  $S^3 \rightarrow S^2$  mit Faser  $S^1$ . Die lange exakte Homotopiesequenz induziert Isomorphismen  $\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2)$  für  $n \geq 3$ .  $\square$

BEISPIEL 7.2.20. *Stiefel-Mannigfaltigkeiten, Grassmann-Mannigfaltigkeiten*  $\square$

### 7.3. CW-Approximation und Kofaserungen

Als nächstes werden wir den Kofaserungsteil der Modellstruktur auf topologischen Räumen diskutieren. Kofaserungen sind definiert durch Homotopieerweiterungseigenschaften. Relative CW-Komplexe sind die wichtigsten Beispiele für Kofaserungen. Die zentralen Aussagen sind, dass Abbildungen zwischen CW-Komplexen immer homotop zu zellulären Abbildungen sind, und dass topologische Räume immer durch CW-Komplexe mit isomorphen Homotopiegruppen ersetzt werden können.

#### Kofaserungen.

DEFINITION 7.3.1. *Eine stetige Abbildung  $i: A \rightarrow X$  von topologischen Räumen heißt Kofaserung, wenn sie die Homotopieerweiterungseigenschaft bezüglich aller topologischer Räume  $W$  hat, d.h. für alle Homotopien  $H: A \times [0, 1] \rightarrow W$  und Abbildungen  $f: X \times \{0\} \rightarrow W$  mit  $f(i(a), 0) = H(a, 0)$ ,  $a \in A$  existiert eine Homotopie*

$\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow W$  wie im folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup_{A \times \{0\}} A \times [0, 1] & \xrightarrow{f \cup H} & W \\ i_0 \cup i \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ X \times [0, 1] & & \end{array}$$

PROPOSITION 7.3.2. Sei  $A \subseteq X$  ein abgeschlossener Unterraum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die Inklusion  $i: A \hookrightarrow X$  ist eine Kofaserung.
- (2) Es existiert eine Retraktion  $r: X \times [0, 1] \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times [0, 1]$  zur Inklusionsabbildung  $j: X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ .

BEWEIS. (1) impliziert (2), die Retraktion folgt aus der Homotopieerweiterungseigenschaft für die Identität

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] & \xrightarrow{\text{id}} & X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \\ j \downarrow & \nearrow r & \\ X \times [0, 1] & & \end{array}$$

Umgekehrt impliziert (2) auch (1): das Erweiterungsproblem für eine Abbildung  $f: X \times \{0\} \cup A \times [0, 1] \rightarrow W$  kann durch  $f \circ r$  gelöst werden.  $\square$

BEISPIEL 7.3.3. Die Inklusion  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  ist eine Kofaserung, da es eine Retraktion für die Inklusion  $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0, 1] \hookrightarrow D^n \times [0, 1]$  gibt, s. auch Übungsaufgabe 2.2.13.  $\square$

- ÜBUNGSAUFGABE 7.3.4. (1) Zeigen Sie, dass Homöomorphismen Kofaserungen sind.
- (2) Zeigen Sie, dass Kofaserungen unter Komposition und disjunkten Vereinigungen abgeschlossen sind.
- (3) Zeigen Sie, dass für topologische Räume  $X$  und  $Y$  die Inklusion  $X \rightarrow X \sqcup Y$  eine Kofaserung ist.

PROPOSITION 7.3.5. Kofaserungen sind stabil unter Pushout, d.h. in einem Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

in dem  $i$  eine Kofaserung ist, ist auch  $j$  eine Kofaserung.

BEWEIS. Das Problem hier (im Gegensatz zur entsprechenden Aussage, dass Faserungen stabil unter Pullback sind) ist, dass für die Homotopieerweiterungseigenschaft nicht die Kofaserung direkt benutzt wird, sondern die induzierte Abbildung  $X \times \{0\} \cup_{A \times \{0\}} A \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$ . Das können wir umgehen, indem wir die natürliche Bijektion zwischen Abbildungen  $X \times [0, 1] \rightarrow W$  und  $X \rightarrow \mathbf{Top}([0, 1], W)$  benutzen. Damit ist leicht zu sehen, dass eine Abbildung  $i: A \rightarrow X$  genau dann eine Kofaserung ist, wenn für alle Räume  $W$  und alle kommutativen Quadrate die bezeichnete Anhebung existiert:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbf{Top}([0, 1], W) \\ i \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \longrightarrow & W \end{array}$$

Für die Stabilität von Kofaserungen betrachten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & \mathbf{Top}([0, 1], W) \\
 \downarrow i & & \downarrow j & \nearrow H & \downarrow \text{ev}_0 \\
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & W
 \end{array}$$

Die Existenz der Erweiterung  $H$  folgt jetzt aus der Existenz einer entsprechenden Anhebung  $\tilde{H}: X \rightarrow \mathbf{Top}([0, 1], W)$  (weil  $i$  eine Kofaserung ist) zusammen mit der universellen Eigenschaft des Pushouts.  $\square$

**PROPOSITION 7.3.6.** *Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Dann ist die Inklusion  $i: A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung.*

**BEWEIS.** Für einen relativen CW-Komplex haben wir eine Filtrierung  $A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X$ , so dass  $X^{(n)}$  aus  $X^{(n-1)}$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen konstruiert wird, und  $X = \bigcup_n X^{(n)}$ , s. Definition 2.2.1. Die Aussage für die Inklusion  $A \hookrightarrow X^{(n)}$  folgt durch Induktion über  $n$ . Im Induktionsschritt benutzen wir, dass  $\partial D^n \hookrightarrow D^n$  eine Kofaserung ist, s. Beispiel 7.3.3, und dass Kofaserungen stabil unter Koprodukten und Pushouts sind, s. Übungsaufgabe 7.3.4 und Proposition 7.3.5. Die Aussage für  $i: A \hookrightarrow X$  erhalten wir aus den Aussagen für  $A \hookrightarrow X^{(n)}$  durch die Kolimestopologie.  $\square$

**DEFINITION 7.3.7.** *Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  definieren wir den Abbildungszylinder durch das folgende Pushout-Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow j \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{k} & M_f
 \end{array}$$

Wir haben eine natürliche Inklusion  $i: X \xrightarrow{i_0} X \times [0, 1] \xrightarrow{k} M_f$ . Aus der universellen Eigenschaft des Pushouts haben wir auch eine natürliche Retraktion  $r: M_f \rightarrow Y$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \downarrow i_1 & & \downarrow j \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{k} & M_f
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \searrow \text{id}_Y \\
 \downarrow \exists! r \\
 Y
 \end{array}$$

$f \circ \text{pr}_1$

- ÜBUNGSAUFGABE 7.3.8.**
- (1) Zeigen Sie, dass  $i: X \rightarrow M_f$  eine Kofaserung ist.
  - (2) Zeigen Sie, dass  $r: M_f \rightarrow Y$  eine Deformationsretraktion ist.
  - (3) Zeigen Sie, dass  $f = r \circ i$  ist.

### Zelluläre und CW-Approximation.

**DEFINITION 7.3.9.** *Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen heißt zellulär, wenn  $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$  für alle  $n$  gilt, d.h. wenn  $f$  das  $n$ -Skelett von  $X$  in das  $n$ -Skelett von  $Y$  abbildet.*

**DEFINITION 7.3.10.** *Ein konvexes Polyeder in  $\mathbb{R}^n$  ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten. Ein Polyeder in  $\mathbb{R}^n$  ist ein Unterraum, der Vereinigung endlich vieler konvexer Polyeder ist.*

DEFINITION 7.3.11. Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  ein Polyeder. Eine Abbildung  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt stückweise linear, wenn es eine Zerlegung von  $K$  in endlich viele konvexe Polyeder  $K_1, \dots, K_l$  gibt, so dass die Einschränkungen  $f|_{K_i}: K_i \subseteq K \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear sind.

LEMMA 7.3.12. Sei  $(Z, W)$  ein relativer CW-Komplex mit einer  $n$ -Zelle, d.h. wir haben ein Pushout-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{\phi} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\Phi} & Z. \end{array}$$

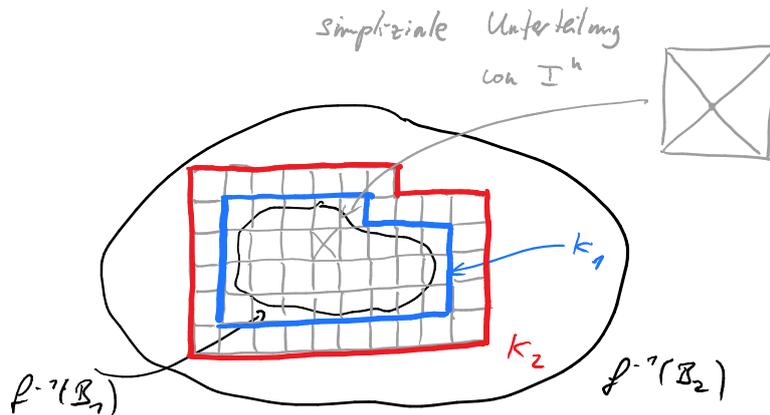
Sei  $f: I^k \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung. Dann existiert eine Homotopie von Abbildungen von Paaren

$$H: (I^k, f^{-1}(\Phi(D^n))) \times [0, 1] \rightarrow (Z, \Phi(D^n))$$

(relativ  $f^{-1}(W)$ ) von  $f = H(-, 0)$  zu  $f_1 = H(-, 1)$  und ein Polyeder  $K \subset I^k$  so dass

- (1)  $f_1(K) \subset \Phi(\mathring{D}^n)$  und  $f_1|_K$  ist stückweise linear (bezüglich einer gewählten Identifikation  $\mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n$ ).
- (2)  $K \supset f_1^{-1}(U)$  für eine nichtleere Teilmenge  $U \subset \Phi(D^n)$ .

BEWEIS. Wir wählen eine Identifikation  $\mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n$  und bezeichnen mit  $B_1, B_2 \subset \mathring{D}^n$  die Teilmengen, die unter dieser Identifikation den abgeschlossenen Bällen mit Radius 1 bzw. 2 um den Ursprung in  $\mathbb{R}^n$  entsprechen. Da  $f^{-1}(B_2)$  abgeschlossen und damit kompakt in  $I^k$  ist, ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $f^{-1}(B_2)$ . Also existiert ein  $\epsilon > 0$  so dass für  $|x - y| < \epsilon$ ,  $x, y \in f^{-1}(B_2)$  gilt  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ . Wir unterteilen nun  $I^k$  in Würfel mit Durchmesser kleiner als  $\epsilon$ . Dann definieren wir  $K_1$  als die Vereinigung aller Würfel, die mit  $f^{-1}(B_1)$  nichtleeren Durchschnitt haben, und  $K_2$  als die Vereinigung aller Würfel, die mit  $K_1$  nichtleeren Durchschnitt haben. Wenn wir  $\epsilon$  genügend klein wählen, ist  $K_2 \subset f^{-1}(B_2)$ .



Nun unterteilen wir die Würfel in  $K_2$  in Simplizes und definieren  $g: K_2 \rightarrow \mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n$  als die Abbildung, die auf den Simplizes linear ist und auf den Eckpunkten der Simplizes mit  $f$  übereinstimmt. Wir definieren  $\phi: K_2 \rightarrow [0, 1]$  als die Abbildung, die linear auf den Simplizes von  $K_2$  ist und auf Eckpunkten in  $K_1$  gleich 1, auf den Eckpunkten in  $K_2 \setminus K_1$  aber 0 ist. Dann definieren wir eine Homotopie

$$H: K_2 \times [0, 1] \rightarrow \mathring{D}^n \cong \mathbb{R}^n: (x, t) \mapsto (1 - t\phi(x))f(x) + t\phi(x)g(x).$$

Dann ist  $H(-, 0) = f$  und  $H(-, 1)|_{K_1} = g|_{K_1}$ . Da  $H$  auf Simplizes in  $K_2$ , die disjunkt von  $K_1$  sind, konstant ist, können wir  $H$  durch die konstante Homotopie auf  $\mathbb{I}^k \setminus K_2$  zu einer Homotopie  $\tilde{H}: \mathbb{I}^k \times [0, 1] \rightarrow \mathring{D}^n$  ausdehnen.

Das Bild vom Abschluss von  $\mathbb{I}^k \setminus K_1$  unter  $H(-, 1)$  ist eine kompakte Teilmenge  $C$ , so dass es eine offene Umgebung  $U \subset B_1$  von  $0 \in B_1$  mit  $C \cap U = \emptyset$  gibt. Um das zu sehen, bemerken wir zuerst, dass auf  $\mathbb{I}^k \setminus K_2$  gilt  $H(-, 1) = f$  und  $f^{-1}(B_1) \subset K_2$  nach Konstruktion. Damit liegt insbesondere das Bild von  $\mathbb{I}^k \setminus K_2$  unter  $H(-, 1)$  außerhalb von  $B_1$ . Für Simplizes  $\sigma$  in  $K_2$  mit  $\sigma \not\subset K_1$  liegt  $f(\sigma)$  (nach Wahl von  $\epsilon$ ) in einem Ball  $B_\sigma$  von Radius  $\frac{1}{2}$ . Da  $B_\sigma$  konvex ist, gilt dann auch  $g(\sigma) \subset B_\sigma$  und  $H(\sigma, t) \subset B_\sigma$  für alle  $t$ . Insbesondere ist  $f_1(\sigma) \subset B_\sigma$ . Da  $\sigma \not\subset K_1$  ist  $B_\sigma$  nicht in  $B_1$  enthalten. Da  $B_\sigma$  Radius  $\frac{1}{2}$  hat, ist  $0 \notin B_\sigma$ , also auch  $0 \notin H(\sigma, 1)$ . Da  $0 \notin C$  und  $C$  kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $0$  mit  $C \cap U = \emptyset$ . Dies liefert die Behauptung mit  $K = K_1$ , der Homotopie  $H$  und der offenen Teilmenge  $U$ .  $\square$

**KOROLLAR 7.3.13.** *Sei  $(Z, W)$  ein relativer CW-Komplex mit einer  $n$ -Zelle, d.h. wir haben ein Pushout-Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \partial D^n & \xrightarrow{\phi} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\Phi} & Z. \end{array}$$

*Sei  $f: \mathbb{I}^k \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung. Dann existiert eine Homotopie von Abbildungen von Paaren*

$$H: (\mathbb{I}^k, f^{-1}(\Phi(D^n))) \times [0, 1] \rightarrow (Z, \Phi(D^n))$$

*(relativ  $f^{-1}(W)$ ) von  $f = H(-, 0)$  zu  $f_1 = H(-, 1)$  so dass  $f_1(\mathbb{I}^k) \cap \Phi(\mathring{D}^n) = \emptyset$ .*

**BEWEIS.** Wir benutzen zuerst die Homotopie  $H$  aus Lemma 7.3.12. Die Abbildung  $f_1$  ist dann stückweise linear auf dem Poyeder  $K$ , und  $K$  enthält das Urbild  $f_1^{-1}(U)$  einer nichtleeren offenen Teilmenge  $U \subset \mathring{D}^n$ . Wegen der stückweisen Linearität ist der Durchschnitt  $f(\mathbb{I}^k) \cap U$  in einer Vereinigung von endlich vielen Hyperebenen von Dimension  $k$  in  $D^n$  enthalten. Aus Dimensionsgründen gibt es also einen Punkt  $p \in U$ , der nicht in  $f_1(\mathbb{I}^k)$  enthalten ist. Dann benutzen wir noch die Deformationsretraktion von  $D^n \setminus \{p\} \rightarrow \partial D^n$  und erhalten somit eine Homotopie  $H$  zwischen von  $f$  und einer Abbildung  $f_1$  mit  $f_1(\mathbb{I}^k) \cap \Phi(\mathring{D}^n) = \emptyset$ .  $\square$

**SATZ 7.3.14 (zelluläre Approximation).** *Sei  $(X, A)$  ein CW-Paar,  $Y$  ein CW-Komplex und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Wenn  $f|_A: A \rightarrow Y$  zellulär ist, dann ist  $f$  homotop (rel  $A$ ) zu einer zellulären Abbildung. Insbesondere ist jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen homotop zu einer zellulären Abbildung.*

**BEWEIS.** Für das CW-Paar haben wir eine Filtrierung  $A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X$ , so dass  $X^{(n)}$  aus  $X^{(n-1)}$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen konstruiert wird und  $X = \bigcup X^{(n)}$  die schwache bzw. Kolimes-Topologie trägt, s. auch Definition 2.2.1.

Wir setzen  $g_{-1} = f: X \rightarrow Y$ . Wir wollen nun induktiv Abbildungen  $g_n: X \rightarrow Y$  und Homotopien  $H_n: g_{n-1} \sim g_n$  (relativ zu  $X^{(n-1)}$ ) konstruieren, so dass  $g_n$  die  $n$ -Zellen in  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  in das  $n$ -Skelett von  $Y$  abbildet. Der Induktionsanfang

dafür ist  $g_{-1}$ . Sei nun  $g_{n-1}: X \rightarrow Y$  gegeben. Wir haben das folgende Pushout-Diagramm, das beschreibt, wie  $X^{(n)}$  durch Ankleben von  $n$ -Zellen aus  $X^{(n-1)}$ -Zellen konstruiert wird:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in I} \partial D_\alpha^n & \xrightarrow{\bigsqcup \phi_\alpha} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in I} D_\alpha^n & \xrightarrow{\bigsqcup \Phi_\alpha} & X^{(n)} \end{array}$$

Dabei ist  $I$  die Indexmenge der relativen  $n$ -Zellen von  $(X, A)$ . Sei nun  $\alpha$  so, dass die Komposition  $D_\alpha^n \xrightarrow{\Phi_\alpha} X^{(n)} \xrightarrow{g_{n-1}} Y$  der entsprechenden charakteristischen Abbildung mit  $g_{n-1}$  nicht durch  $Y^{(n)}$  faktorisiert. Dann gibt es einen endlichen relativen Unterkomplex  $Y^{(n)} \subseteq Y' \subseteq Y$ , der das Bild von  $g_{n-1} \circ \Phi_\alpha$  enthält. Für jede Zelle  $\sigma$  von  $Y' \setminus Y^{(n)}$  finden wir nach Lemma 7.3.13 eine Homotopie (rel  $X^{(n-1)}$  und definiert auf  $X^{(n)}$ )  $H: g_{n-1} \sim g'$ , so dass  $g' \circ \Phi_\alpha \cap \sigma = \emptyset$ , d.h. dass  $g'$  die Zelle  $\sigma$  nicht mehr trifft. Dies können wir für alle Zellen von  $Y' \setminus Y^{(n)}$  wiederholen und erhalten damit eine Homotopie (rel  $X^{(n-1)}$  und definiert auf  $X^{(n)}$ ) von  $g_{n-1}$  zu einer Abbildung  $g_{n,\alpha}$ , so dass  $g_{n,\alpha}(D_\alpha^n) \subseteq Y^{(n)}$ . Nun können wir dies für alle  $n$ -Zellen in  $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$  wiederholen und erhalten eine Homotopie  $\tilde{H}_n: g_{n-1}|_{X^{(n)}} \sim \tilde{g}_n: X^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow Y$ , so dass  $\tilde{g}_n(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$  gilt. Da  $X^{(n)} \hookrightarrow X$  eine Kofaserung ist, können wir mit der Homotopieerweiterungseigenschaft die Homotopie auf  $X$  ausdehnen:

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} \cup X^{(n)} \times [0, 1] & \xrightarrow{(g_{n-1}, \tilde{H}_n)} & Y \\ \downarrow & \nearrow H_n & \\ X \times [0, 1] & & \end{array}$$

Mit  $g_n = H_n(-, 1)$  haben wir dann den Induktionsschritt abgeschlossen.

Mit dem Induktionsbeweis ist der Fall endlich-dimensionaler CW-Komplexe (d.h.  $X = X^{(n)}$  für geeignetes  $n$ ) erledigt. Der Fall unendlich-dimensionaler CW-Komplexe folgt wieder durch Kombination aller Homotopien wie im Beweis von Proposition 2.2.12 oder Lemma 3.4.3.  $\square$

**KOROLLAR 7.3.15.** *Für  $k < n$  gilt  $\pi_k(S^n) = 0$ .*

**BEWEIS.** Die Standard-CW-Struktur für  $S^n$  besteht aus einer 0-Zelle  $s_0 \in S^n$  und einer  $n$ -Zelle. Sei  $f: (I^k, \partial I^k) \rightarrow (S^n, s_0)$  ein Repräsentant eines Elements in  $\pi_k(S^n, s_0)$ . Die Abbildung  $f$  induziert (durch Bilden des Quotienten modulo  $\partial I^k$ ) eine Abbildung  $\bar{f}: (S^k, s) \rightarrow (S^n, s_0)$ . Nach Satz 7.3.14 ist die Abbildung  $\bar{f}$  homotop zu einer zellulären und damit konstanten Abbildung.  $\square$

**KOROLLAR 7.3.16.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex und  $i_n: X^{(n)} \rightarrow X$  die Inklusion des  $n$ -Skeletts. Dann ist  $i_n$  eine  $n$ -Äquivalenz.*

**BEWEIS.** Für die Surjektivität der Abbildungen  $\pi_k(X^{(n)}) \rightarrow \pi_k(X)$  sei  $\alpha \in \pi_k(X)$  mit  $k \leq n$ . Wegen zellulärer Approximation 7.3.14 gibt es eine zelluläre Abbildung  $f: S^k \rightarrow X$  mit  $[f] = \alpha$ . Diese Abbildung faktorisiert durch das  $n$ -Skelett, also liegt  $\alpha$  im Bild von  $(i_n)_*: \pi_k(X^{(n)}) \rightarrow \pi_k(X)$ .

Für die Injektivität seien  $\alpha, \beta \in \pi_k(X^{(n)})$ ,  $k < n$ , zwei Homotopieklassen, repräsentiert durch zelluläre Abbildungen  $f, g: S^k \rightarrow X^{(n)}$ . Wir nehmen an, dass  $(i_n)_*(\alpha) = (i_n)_*(\beta)$ , es existiert also eine Homotopie  $H: S^k \times [0, 1] \rightarrow X$ . Der Raum  $S^k \times [0, 1]$  ist ein CW-Komplex (Produkt zweier endlicher CW-Komplexe), und  $S^k \times \{0, 1\}$  ist ein Unterkomplex, auf dem die Homotopie zellulär ist. Mit zellulärer

Approximation 7.3.14 finden wir eine zelluläre Homotopie  $H': S^k \times [0, 1] \rightarrow X$  zwischen  $f$  und  $g$ . Diese Abbildung faktorisiert dann durch  $X^{(n)}$  und liefert eine Homotopie  $H': S^k \times [0, 1] \rightarrow X^{(n)}$ . Damit ist  $(i_n)_*: \pi_k(X^{(n)}) \rightarrow \pi_k(X)$  für  $k < n$  injektiv.  $\square$

DEFINITION 7.3.17. *Eine CW-Approximation für einen topologischen Raum  $X$  ist eine schwache Äquivalenz  $f: Z \rightarrow X$ , wobei  $Z$  ein CW-Komplex ist.*

SATZ 7.3.18 (CW-Approximation). *Für jeden topologischen Raum  $X$  existiert eine CW-Approximation. Wenn  $X$  zusammenhängend ist, kann der CW-Komplex  $Z$  so gewählt werden, dass er nur eine 0-Zelle hat.*

BEWEIS. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $X$  zusammenhängend ist. Wir konstruieren  $Z$  induktiv. Als Induktionsanfang sei  $Z^{(0)} = \{*\}$  und  $f^{(0)}: \{*\} \rightarrow X$  durch einen beliebig gewählten Punkt  $x_0 \in X$  gegeben.

Wir nehmen nun für den Induktionsschritt an, dass wir bereits eine  $n$ -Äquivalenz  $f^{(n)}: Z^{(n)} \rightarrow X$  konstruiert haben, wobei  $Z^{(n)}$  ein  $n$ -dimensionaler CW-Komplex ist. Wir wollen eine  $(n+1)$ -Äquivalenz  $f^{(n+1)}: Z^{(n+1)} \rightarrow X$  konstruieren.

Zuerst kümmern wir uns um die Injektivität im Grad  $n$ . Sei

$$K_n = \ker(f_*^{(n)}: \pi_n(Z^{(n)}) \rightarrow \pi_n(X)).$$

Wir wählen eine Menge  $\sigma_i, i \in I$  von Erzeugern von  $K_n$ . Diese Erzeuger können wir durch Abbildungen  $\sigma_i: S^n \rightarrow Z^{(n)}$  repräsentieren. Wir benutzen die Abbildungen  $\sigma_i$ , um  $(n+1)$ -Zellen an  $Z^{(n)}$  anzukleben. Dadurch erhalten wir einen CW-Komplex  $W^{(n+1)}$  und eine Inklusion  $Z^{(n)} \hookrightarrow W^{(n+1)}$  als  $n$ -Skelett. Nach Definition sind die Abbildungen  $f^{(n)} \circ \sigma_i: S^n \rightarrow X$  alle nullhomotop, so dass wir die Abbildung  $f^{(n)}: Z^{(n)} \rightarrow X$  zu einer Abbildung  $g^{(n+1)}: W^{(n+1)} \rightarrow X$  ausdehnen können. Da sowohl die Inklusion  $Z^{(n)} \hookrightarrow W^{(n+1)}$  (nach Korollar 7.3.16) als auch die Abbildung  $f^{(n)}: Z^{(n)} \rightarrow X$  beides  $n$ -Äquivalenzen sind, ist auch die erweiterte Abbildung  $g^{(n+1)}: W^{(n+1)} \rightarrow X$  eine  $n$ -Äquivalenz. Mit zellulärer Approximation 7.3.14 sehen wir zusätzlich, dass  $g_*^{(n+1)}: \pi_n(W^{(n+1)}) \rightarrow \pi_n(X)$  injektiv ist.

Nun kümmern wir uns um die Surjektivität im Grad  $n+1$ . Sei

$$B_{n+1} = \operatorname{coker}(g_*^{(n+1)}: \pi_{n+1}(W^{(n+1)}) \rightarrow \pi_{n+1}(X)).$$

Wir wählen wieder eine Menge  $\tau_j, j \in J$  von Erzeugern von  $B_{n+1}$ , repräsentiert durch Abbildungen  $\tau_j: S^{n+1} \rightarrow X$  und definieren  $Z^{(n+1)} = W^{(n+1)} \vee \bigvee_j S^{n+1}$ . Dann erhalten wir eine Abbildung  $f^{(n+1)}: Z^{(n+1)} \rightarrow X$ , indem wir auf dem Wedgesummanden  $S^{n+1}$  zu  $j \in J$  die Abbildung  $\tau_j: S^{n+1} \rightarrow X$  nehmen. Diese Abbildung ist nun die gewünschte  $n$ -Äquivalenz, und die Einschränkung von  $f^{(n+1)}: Z^{(n+1)} \rightarrow X$  auf das  $n$ -Skelett  $Z^{(n)}$  ist gleich  $f^{(n)}$ .

Zuletzt definieren wir  $Z = \bigcup_n Z^{(n)}$  (mit der schwachen/Kolimes-Topologie). Die Abbildungen  $f^{(n)}: Z^{(n)} \rightarrow X$  sind mit den Inklusionen  $Z^{(n)} \hookrightarrow X$  kompatibel und definieren damit eine Abbildung  $f: Z \rightarrow X$ . Diese Abbildung ist eine schwache Äquivalenz.  $\square$

BEMERKUNG 7.3.19. *Aus der CW-Approximation folgt insbesondere auch, dass für eine schwache Äquivalenz  $f: X \rightarrow Y$  die induzierten Abbildungen*

$$f_*: H_n^{\text{sing}}(X, A) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y, A) \quad \text{und} \quad f^*: H_{\text{sing}}^n(X, A) \rightarrow H_{\text{sing}}^n(Y, A)$$

*Isomorphismen für alle Koeffizientengruppen  $A$  sind. Dadurch können einige Aussagen über Homologie oder Kohomologie auf CW-Komplexe zurückgeführt werden.*

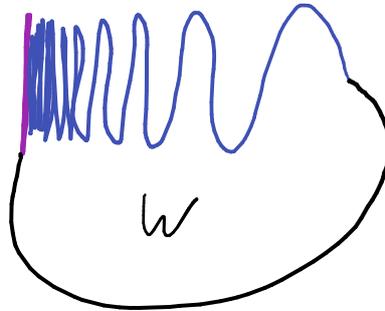
ÜBUNGSAUFGABE 7.3.20. *Zeigen Sie, dass ein  $n$ -zusammenhängender und  $n$ -dimensionaler CW-Komplex zusammenziehbar ist.*

**ÜBUNGSAUFGABE 7.3.21.** Zeigen Sie mit den folgenden Schritten, dass jede Abbildung  $f: S^n \rightarrow S^n$ ,  $n \geq 1$  homotop zu einem Vielfachen von  $\text{id}_S^n$  ist. Insbesondere ist  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

- (1) Benutzen Sie Lemma 7.3.12, um auf den Fall zu reduzieren, in dem ein Punkt  $q \in S^n$  mit  $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$  existiert, so dass  $f$  invertierbar und stückweise linear in Umgebungen der  $p_i$  ist.
- (2) Benutzen Sie die Komposition  $g \circ f$  mit der Abbildung  $g: S^n \rightarrow S^n$ , die das Komplement eines  $\epsilon$ -Balls um  $q$  zum Basispunkt zusammenzieht, um in (1) auf den Fall  $k = 1$  zu reduzieren.
- (3) Folgern Sie die Aussage mit Hilfe von Übungsaufgabe 3.3.10.

**ÜBUNGSAUFGABE 7.3.22.** Der sogenannte Warschauer Kreis ist eine abgeschlossene Teilmenge  $W \subset \mathbb{R}^2$ , die aus einem Teil des Graphen von  $\sin(\frac{1}{x})$  (für  $0 < x \leq \pi$ ), der Strecke  $\{(x, y) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$  und einer Kurve, die die beiden Teile verbindet, entsteht. Bestimmen Sie eine CW-Approximation von  $W$ .

[https://de.wikipedia.org/wiki/Warschauer\\_Kreis](https://de.wikipedia.org/wiki/Warschauer_Kreis)



### Satz von Whitehead.

**LEMMA 7.3.23.** Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex und sei  $(Y, B)$  ein Raumpaar mit  $B \neq \emptyset$ . Wir nehmen an, dass  $\pi_n(Y, B) = 0$  für alle Dimensionen  $n$ , in denen  $X \setminus A$  Zellen hat. Dann ist jede Abbildung  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  homotop (relativ  $A$ ) zu einer Abbildung, deren Bild in  $B$  liegt.

**BEWEIS.** Wir benutzen wieder die relative Zellenfiltrierung von  $X$

$$A = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \dots \subseteq X,$$

wobei  $X^{(n)}$  aus  $X^{(n-1)}$  durch Ankleben von Zellen konstruiert wird und  $X = \bigcup_n X^{(n)}$  die schwache/Kolimes-Topologie trägt. Wir konstruieren induktiv Abbildungen  $g_n: X \rightarrow Y$  mit  $g_n(X^{(n)}) \subseteq B$  und Homotopien  $H_n: g_{n-1} \sim g_n$  relativ  $X^{(n-1)}$ . Für den Induktionsanfang setzen wir  $g_{-1} = f$  und haben  $g_{-1}(X^{(-1)}) = g_{-1}(A) \subseteq B$ .

Wir nehmen nun an, dass wir die Abbildungen  $g_k$  und Homotopien  $H_k$  für  $k < n$  bereits konstruiert haben. Wenn  $X \setminus A$  keine  $n$ -Zellen hat, brauchen wir nichts zu tun. Für eine  $n$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung  $\Phi: D^n \rightarrow X$  betrachten wir  $g_{n-1} \circ \Phi: (D^n, \partial D^n) \rightarrow (Y, B)$ . Wegen  $\pi_n(Y, B) = 0$  existiert eine Homotopie  $H': D^n \times [0, 1] \rightarrow Y$  (relativ  $\partial D^n$ ) zwischen  $g_{n-1} \circ \Phi: D^n \rightarrow Y$  und einer Abbildung, die durch  $B$  faktorisiert. Kombinieren wir diese Homotopien für alle  $n$ -Zellen von  $X \setminus A$ , erhalten wir eine Homotopie  $\tilde{H}_n: g_{n-1} \sim g_n: X^{(n)} \times [0, 1] \rightarrow Y$  relativ zu  $X^{(n-1)}$ , so dass gilt  $g_n(X^{(n)}) \subseteq B$ . Mit der Homotopieerweiterungseigenschaft für die Inklusion  $i_n: X^{(n)} \rightarrow X$  können wir diese Homotopie zu einer Homotopie  $H_n: g_{n-1} \sim g_n: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  ausdehnen. Der Induktionsschritt ist damit abgeschlossen.

Da die Homotopien  $H_n : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  jeweils relativ zu  $X^{(n)}$  (also konstant auf  $X^{(n)}$ ) sind, können wir die Homotopien  $H_n$  zu einer Homotopie  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  zusammenfassen wie in den Beweisen von Proposition 2.2.12 oder Lemma 3.4.3.  $\square$

Wenden wir das Lemma auf die Identität für ein CW-Paar  $(X, A)$  an, erhalten wir die folgende Konsequenz:

**KOROLLAR 7.3.24.** *Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex, so dass die Inklusion  $i : A \hookrightarrow X$  eine schwache Äquivalenz ist. Dann ist  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X$ .*

**SATZ 7.3.25 (Satz von Whitehead).** *Eine schwache Äquivalenz  $f : X \rightarrow Y$  zwischen CW-Komplexen ist bereits eine Homotopieäquivalenz. Wenn  $f$  die Inklusion eines Unterkomplexes ist, dann ist  $X$  ein Deformationsretrakt von  $Y$ .*

**BEWEIS.** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir uns auf zusammenhängende CW-Komplexe einschränken. Mit zellulärer Approximation 7.3.14 können wir annehmen, dass  $f$  zellulär ist. Ersetzen wir  $Y$  durch den Abbildungszyylinder, können wir annehmen, dass  $f$  eine Inklusion von CW-Komplexen ist. (Zusätzlich zu Übungsaufgabe 7.3.8 müssen wir uns dafür überzeugen, dass der Abbildungszyylinder einer zellulären Abbildung wieder ein CW-Komplex ist, der  $X$  und  $Y$  als Unterkomplexe enthält.) Mit der langen exakten Homotopiesequenz für das Paar  $(Y, X)$  folgt  $\pi_n(Y, X) = 0$  für alle  $n$ , da  $f$  eine schwache Äquivalenz ist. Wenden wir Lemma 7.3.23 auf  $\text{id}_Y$  an, erhalten wir die gewünschte Deformationsretraktion.  $\square$

**BEMERKUNG 7.3.26.**

- *Der Satz von Whitehead bedeutet allerdings nicht, dass Räume mit isomorphen Homotopiegruppen schon homotopieäquivalent sind. Es wird immer eine Abbildung von Räumen benötigt, die die Isomorphismen von Homotopiegruppen induziert.*
- *Es gibt auch eine relative Variante des Satzes von Whitehead: eine schwache Äquivalenz  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  von relativen CW-Komplexen, deren Einschränkung  $f : A \rightarrow B$  eine Homotopieäquivalenz ist, ist bereits eine Homotopieäquivalenz von Paaren.*

**ÜBUNGSAUFGABE 7.3.27.** *Zeigen Sie, dass  $\mathbb{R}P^2 \times S^3$  und  $\mathbb{R}P^3 \times S^2$  isomorphe Homotopiegruppen haben. Zeigen Sie durch Berechnung der Kohomologie, dass die Räume nicht homotopieäquivalent sind.*

- KOROLLAR 7.3.28.**
- (1) *Ein  $n$ -zusammenhängender Raum hat eine CW-Approximation  $f : Z \rightarrow X$  mit trivialem  $n$ -Skelett, d.h.  $Z^{(n)} = *$ .*
  - (2) *Ein  $n$ -zusammenhängender CW-Komplex ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit trivialem  $n$ -Skelett.*

**ÜBUNGSAUFGABE 7.3.29.** *Wenn  $(X, A)$  ein  $n$ -zusammenhängendes CW-Paar ist, dann existiert ein CW-Paar  $(Z, A)$ , so dass alle Zellen von  $Z \setminus A$  Dimension  $> n$  haben und eine Homotopieäquivalenz  $(Z, A) \simeq (X, A)$ .*

#### 7.4. Ausschneidung und Freudenthals Einhängungssatz

Im Gegensatz zum Ausschneidungssatz für die Homologie, s. Satz 5.4.1 bzw. die Eilenberg–Steenrod-Axiome in Abschnitt 3.1, gilt für Homotopiegruppen keine allgemeine Ausschneidungsaussage. Dies ist einer der Gründe, warum Homotopiegruppen (z.B. für Sphären) viel komplizierter zu berechnen sind als Homologiegruppen. Für Homotopiegruppen gilt eine Ausschneidungsaussage nur in einem relativ

kleinen Bereich, aber bereits diese schwächere Aussage ist für verschiedene Berechnungen sehr hilfreich.

**SATZ 7.4.1.** *Sei  $X$  ein CW-Komplex, und seien  $A, B \subset X$  Unterkomplexe mit zusammenhängendem nichtleeren Durchschnitt  $C = A \cap B$ . Wir nehmen an, dass  $(A, C)$   $m$ -zusammenhängend und  $(B, C)$   $n$ -zusammenhängend sind. Dann ist die von der Inklusion induzierte Abbildung  $\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$  ein Isomorphismus für  $k < m + n$  und eine Surjektion für  $k = m + n$ .*

**BEWEIS.** (1) Wir beginnen mit einem Spezialfall:  $A$  entsteht aus  $C$  durch Ankleben von  $m + 1$ -Zellen und  $B$  entsteht aus  $C$  durch Ankleben einer einzigen  $n + 1$ -Zelle.

Für den Beweis der Surjektivität von  $\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$  sei

$$f: (\mathbb{I}^k, \partial\mathbb{I}^k, \mathbb{J}^{k-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$$

ein Repräsentant eines Elements in  $\pi_k(X, B)$ . Die Abbildung  $f$  hat kompaktes Bild und trifft demnach nur endlich viele der Zellen in  $A$  bzw.  $B$ . Benutzen wir wieder Lemma 7.3.12, können wir annehmen, dass in den Zellen  $e_\alpha^{m+1}$  in  $A$  bzw.  $e^{n+1}$  in  $B$  Simplizes  $\Delta_\alpha^{m+1}$  bzw.  $\Delta^{n+1}$  existieren, so dass  $f^{-1}(\Delta_\alpha^{m+1})$  bzw.  $f^{-1}(\Delta^{n+1})$  Polyeder sind, auf denen  $f$  stückweise linear ist.

*Behauptung:* Wenn  $k \leq m + n$  ist, existieren Punkte  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1}$  und  $q \in \Delta^{n+1}$  sowie eine Abbildung  $\phi: \mathbb{I}^{k-1} \rightarrow [0, 1]$ , so dass

- (a)  $f^{-1}(q)$  liegt unterhalb vom Graphen von  $\phi$  in  $\mathbb{I}^{k-1} \times [0, 1] = \mathbb{I}^k$ .
- (b)  $f^{-1}(p_\alpha)$  liegt oberhalb vom Graphen von  $\phi$  für alle  $\alpha$ .
- (c)  $\phi = 0$  auf  $\partial\mathbb{I}^{k-1}$ .

Nehmen wir die Behauptung an, können wir die Homotopie  $f_t$  betrachten, die  $f$  zum Zeitpunkt  $t$  auf den Bereich oberhalb vom Graphen von  $t\phi$  einschränkt. Nach Teil (b) der Behauptung ist  $f_t(\mathbb{I}^{k-1})$  disjunkt von  $P = \bigcup_\alpha \{p_\alpha\}$  für alle  $t$ , und nach Teil (a) der Behauptung ist  $f_1(\mathbb{I}^k)$  disjunkt von  $Q = \{q\}$ . Wir benutzen nun das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(A, C) & \longrightarrow & \pi_k(X, B) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_k(X \setminus Q, X \setminus (Q \cup P)) & \longrightarrow & \pi_k(X, X \setminus P). \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen, da  $B$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus P$ ,  $A$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus Q$  und  $C$  ein Deformationsretrakt von  $X \setminus (Q \cup P)$  ist (es wird jeweils Zelle minus ein Punkt auf den Rand der Zelle retrahiert). Das Bild von  $[f]$  unter  $\pi_k(X, B) \rightarrow \pi_k(X, X \setminus P)$  ist  $[f_1]$  und liegt nach Konstruktion im Bild der Abbildung  $\pi_k(X \setminus Q, X \setminus (Q \cup P)) \rightarrow \pi_k(X, X \setminus P)$ . Dies zeigt die Surjektivität.

Zum Beweis der Behauptung: Für jeden Punkt  $q \in \Delta^{n+1}$  ist  $f^{-1}(q)$  ein Polyeder von Dimension  $\leq k - n - 1$ , da  $f$  auf dem Polyeder  $f^{-1}(\Delta^{n+1})$  stückweise linear, d.h. stückweise Einschränkung einer linearen Abbildung  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ist. Wir wollen nun die Punkte  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1}$  so wählen, dass  $f^{-1}(q)$  und  $f^{-1}(p_\alpha)$  unter der Projektion  $\pi: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{I}^{k-1}$  disjunkte Bilder haben. Die Menge  $T = \pi^{-1}(\pi(f^{-1}(q)))$  ist ein Polyeder von Dimension  $\leq k - n$ , damit ist auch  $f(T) \cap \Delta_\alpha^{m+1}$  ein Polyeder von Dimension  $\leq k - n$ . Für  $m + 1 > k - n$  existiert also aus Dimensionsgründen ein Punkt  $p_\alpha \in \Delta_\alpha^{m+1}$  mit  $p_\alpha \notin f(T)$ . Für einen solchen Punkt ist  $f^{-1}(p_\alpha) \cap T = \emptyset$ . Wenn wir die Punkte  $p_\alpha$  entsprechend gewählt haben, existiert immer noch eine offene Umgebung  $U$  von  $\pi(f^{-1}(q))$  in  $\mathbb{I}^{k-1}$ , die für alle  $\alpha$  von  $\pi(f^{-1}(p_\alpha))$  disjunkt ist. Damit können wir nun die Abbildung  $\phi$  wie in der Behauptung (und mit Träger in  $U$ ) wählen.

Der Beweis der Injektivität funktioniert ähnlich wie der Beweis der Surjektivität. Statt der Abbildung  $f$  muss die Homotopie  $H: (I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \times [0, 1] \rightarrow (X, B, x_0)$  betrachtet werden. Die entsprechenden Polyeder etc. liegen dann in  $I^k \times [0, 1]$ , dadurch wird auch die Dimensionsschranke um 1 niedriger als im Surjektivitätsbeweis.

(2) Nun betrachten wir einen etwas allgemeineren Fall als in (1):  $A$  wird aus  $C$  durch Ankleben von  $m + 1$ -Zellen wie in (1) konstruiert, und  $B$  wird aus  $C$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq n + 1$  konstruiert. Auch hier hat ein Repräsentant  $f: (I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$  einer Klasse in  $\pi_k(X, B)$  nur endlich viele Zellen im Bild. Wir können dann Fall (1) induktiv benutzen, um  $f$  so ab zuändern, dass keine Zellen aus  $B \setminus C$  im Bild von  $f$  liegen. (Dabei beginnen wir mit den Zellen der höchsten Dimension.)

(3) Wir nehmen an, dass  $A$  aus  $C$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq m + 1$  konstruiert wird und  $B$  aus  $C$  durch Ankleben von Zellen der Dimension  $\geq n + 1$  konstruiert wird. Dabei können wir mit zellulärer Approximation 7.3.14 annehmen, dass alle Zellen von  $A \setminus C$  Dimension  $\leq m + n + 1$  haben, da wir nur ein Aussage über  $\pi_k$  mit  $k \leq m + n$  beweisen wollen. Wir bezeichnen mit  $A_i \subseteq A$  die Vereinigung von  $C$  und den Zellen in  $A$  von Dimension  $\leq i$ , und  $X_i = A_i \cup B$ . Fall (3) wird nun durch Induktion über  $i$  bewiesen. Der Induktionsanfang  $i = m + 1$  ist in Fall (2) behandelt. Für den Induktionsschritt haben wir die folgende kommutative Leiter von langen exakten Homotopiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{k+1}(A_i, A_{i-1}) & \longrightarrow & \pi_k(A_{i-1}, C) & \longrightarrow & \pi_k(A_i, C) & \longrightarrow & \pi_k(A_i, A_{i-1}) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(A_{i-1}, C) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{k+1}(X_i, X_{i-1}) & \longrightarrow & \pi_k(X_{i-1}, B) & \longrightarrow & \pi_k(X_i, B) & \longrightarrow & \pi_k(X_i, X_{i-1}) & \longrightarrow & \pi_{k-1}(X_{i-1}, B) \end{array}$$

Für  $k < m + n$  sind die erste und vierte vertikale Abbildung nach Fall (2) Isomorphismen, und nach Induktionsvoraussetzung sind die zweite und fünfte vertikale Abbildung Isomorphismen. Die Behauptung folgt dann aus dem Fünfer-Lemma A.2.7. Für  $k = m + n$  sind immer noch die zweite und vierte Abbildung surjektiv und die fünfte Abbildung injektiv, und damit die mittlere vertikale Abbildung surjektiv. In den Spezialfällen  $k = 2$  bzw.  $k = 1$ , in denen es Probleme mit dem Fünfer-Lemma (keine abelschen Gruppen) gibt, können wir die Behauptung auch direkt sehen.

(4) Wir können Übungsaufgabe 7.3.29 benutzen, um zu sehen, dass die Paare  $(A, C)$  und  $(B, C)$  homotopieäquivalent zu Paaren  $(A', C)$  und  $(B', C)$  sind, die die Bedingungen des Falls (3) erfüllen. Diese Homotopieäquivalenzen lassen  $C$  fest und liefern also eine Homotopieäquivalenz  $A \cup B \simeq A' \cup B'$ , mit der wir den allgemeinen Fall auf Fall (3) reduzieren.  $\square$

**KOROLLAR 7.4.2.** *Sei  $X$  ein  $(n - 1)$ -zusammenhängender CW-Komplex. Dann ist die Einhängungsabbildung  $\pi_k(X) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X)$  aus Beispiel 7.2.12 ein Isomorphismus für  $k < 2n - 1$  und eine Surjektion für  $i = 2n - 1$ .*

**BEWEIS.** Hier betrachten wir die Einhängung als CW-Komplex, und die beiden Kegel  $C_+(X)$  und  $C_-(X)$  als Unterkomplexe, deren Schnitt  $X$  ist. Die Einhängungsabbildung ist dann (nach Definition) Teil des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} \pi_{k+1}(C_+(X), X) & \xrightarrow{i_*} & \pi_{k+1}(\Sigma X, C_-(X)) \\ \partial \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \pi_k(X) & \xrightarrow{S} & \pi_{k+1}(\Sigma X) \end{array}$$

Dabei ist die linke vertikale Abbildung  $\partial$  die Randabbildung in der langen exakten Homotopiesequenz für das Paar  $(C_+(X), X)$ , und die obere horizontale Abbildung

$i_*$  die von der Inklusion induzierte Abbildung. Die Abbildung  $\pi_{k+1}(\Sigma X, C_-(X)) \rightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X)$  ist ein Isomorphismus, weil  $C_-(X)$  zusammenziehbar ist. Nach der langen exakten Homotopiesequenz ist das Paar  $(C_+(X), X)$   $n$ -zusammenhängend, wenn der Raum  $X$   $(n-1)$ -zusammenhängend ist. Die obere Abbildung ist dann nach dem Ausschneidungssatz 7.4.1 für Homotopie ein Isomorphismus für  $k+1 < 2n$  und eine Surjektion für  $k+1 \leq 2n$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**KOROLLAR 7.4.3.** *Die Gradabbildung induziert einen Isomorphismus  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .*

**BEWEIS.** Aus der Überlagerungstheorie wissen wir  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Aus der langen exakten Homotopiesequenz für die Hopf-Faserung, s. Beispiel 7.2.19, folgt  $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$ . Aus dem Einhängungssatz folgt dann induktiv  $\pi_n(S^n) \cong \pi_{n+1}(S^{n+1})$  für  $n \geq 2$ . Zusammen mit Übungsaufgabe 3.3.5 folgt die Behauptung.  $\square$

**BEMERKUNG 7.4.4.** *Mit Korollar 7.4.3 haben wir nun die fehlende Zutat für die Eindeutigkeit von gewöhnlichen Homologietheorien in Bemerkung 3.4.10. Mit  $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$  ist eine Abbildung zwischen Sphären schon durch den Abbildungsgrad bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.*

**ÜBUNGSAUFGABE 7.4.5.** *Zeigen Sie, dass für  $n \geq 2$  und für eine Indexmenge  $I$  die Gruppe  $\pi_n(\bigvee_{i \in I} S_i^n)$  eine freie abelsche Gruppe ist, für die eine Basis durch die Inklusionen  $S^n \hookrightarrow \bigvee_{i \in I} S_i^n$  als  $i$ -ter Summand gegeben ist.*

*Hinweis: Führen Sie mit Kompaktheit den allgemeinen Fall auf den Falle einer endlichen Indexmenge zurück. Im endlichen Fall beweisen und benutzen Sie, dass das Paar  $(\prod_{i \in I} S_i^n, \bigvee_{i \in I} S_i^n)$  aufgrund der natürlichen Zellstrukturen  $(2n-1)$ -zusammenhängend ist.*

**PROPOSITION 7.4.6.** *Sei  $(X, A)$  ein  $r$ -zusammenhängendes CW-Paar, in dem  $A$  auch  $s$ -zusammenhängend ist. Dann ist die von der Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/A$  induzierte Abbildung  $\pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(X/A)$  für alle  $i \leq r+s$  ein Isomorphismus, und surjektiv für  $i = r+s+1$ .*

**BEWEIS.** Wir betrachten den Komplex  $X \cup C(A)$ , der aus  $X$  durch Ankleben eines Kegels über  $A$  entsteht. Da  $C(A)$  zusammenziehbar ist, ist die Abbildung  $X \cup C(A) \rightarrow (X \cup C(A))/C(A) = X/A$  eine Homotopieäquivalenz und die Abbildung  $\pi_i(X \cup C(A), C(A)) \rightarrow \pi_i((X \cup C(A))/C(A)) = \pi_i(X/A)$  ein Isomorphismus für alle  $i$ . Nach Voraussetzung ist das Paar  $(C(A), A)$   $(s+1)$ -zusammenhängend. Aus dem Ausschneidungssatz 7.4.1 folgt dann, dass die Abbildung  $\pi_i(X, A) \rightarrow \pi_i(X \cup C(A), C(A))$  für  $i \leq r+s$  ein Isomorphismus und surjektiv für  $i = r+s+1$  ist.  $\square$

**BEISPIEL 7.4.7.** *Sei  $n \geq 2$ . Sei  $X$  ein CW-Komplex, der aus  $X^{(n)} = \bigvee_{i \in I} S^n$  durch Ankleben von  $(n+1)$ -Zellen entlang basispunkterhaltender Abbildungen*

$$\phi_j: S^n \rightarrow \bigvee_{i \in I} S^n, j \in J$$

*konstruiert wird. Wegen zellulärer Approximation 7.3.14 ist  $\pi_k(X) = 0$  für  $k < n$ . Aus der langen exakten Homotopiesequenz für das Paar  $(X, \bigvee_{i \in I} S_i^n)$  haben wir*

$$\pi_{n+1}(X, \bigvee_{i \in I} S_i^n) \xrightarrow{\partial} \pi_n(\bigvee_{i \in I} S_i^n) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow 0.$$

*Wir haben  $X/\bigvee_{i \in I} S_i^n \cong \bigvee_{j \in J} S_j^{n+1}$ , und aus Proposition 7.4.6 sowie Übungsaufgabe 7.4.5 folgt, dass  $\pi_{n+1}(X, \bigvee_{i \in I} S_i^n)$  eine freie abelsche Gruppe, wobei eine Basis durch die charakteristischen Abbildungen  $\Phi_j$  der  $n+1$ -Zellen in  $X$  gegeben ist.*

Unter der Randabbildung werden die  $\Phi_j$  auf die Anklebeabbildungen  $\phi_j$  abgebildet. Damit ist

$$\pi_n(X) = \pi_n\left(\bigvee_{i \in I} S_i^n\right) / \langle [\phi_j] \mid j \in J \rangle.$$

□

### 7.5. Verbindung zur Homologie: Satz von Hurewicz und Satz von Whitehead

Nach der Diskussion des Ausschneidungssatzes können wir zum Schluss noch die Beziehung zwischen Homotopie und Homologie diskutieren. Diese konkrete Formulierung dieser Beziehung ist der Satz von Hurewicz bzw. der Hurewicz-Homomorphismus. Wir werden einen vollständigen Beweis nur für eine vereinfachte Variante des Satzes geben und die Aussagen über den Hurewicz-Homomorphismus nur formulieren.

SATZ 7.5.1 (Satz von Hurewicz).

- (1) Für einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $X$  (mit  $n \geq 2$ ) gilt für alle  $i \leq n$

$$\pi_i(X) \cong \tilde{H}_i^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$$

- (2) Für ein  $(n-1)$ -zusammenhängendes Raumpaars  $(X, A)$  (mit  $n \geq 2$  und  $A$  einfach-zusammenhängend und nichtleer) gilt für alle  $i \leq n$

$$\pi_i(X, A) \cong H_i^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}).$$

BEWEIS. (1) Mit CW-Approximation 7.3.18 können wir annehmen, dass  $X$  ein CW-Komplex ist. Dann können wir Übungsaufgabe 7.3.29 benutzen, um  $X$  durch einen homotopieäquivalenten CW-Komplex mit  $X^{(n-1)} = \{*\}$  zu ersetzen. Damit folgt insbesondere  $\tilde{H}_i^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z}) = 0$  für  $i < n$ .

Um den Isomorphismus  $\pi_n(X) \cong H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$  zu zeigen, sind die Zellen von Dimension  $> n+1$  irrelevant. Wir können also annehmen, dass  $X$  aus  $X^{(n)} = \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$  durch Ankleben von Zellen  $D_{\beta}^n$  entlang von Abbildungen  $\phi_{\beta}: \partial D^{n+1} \rightarrow \bigvee_{\alpha} S_{\alpha}^n$  konstruiert wird. Mit Übungsaufgabe 7.3.29 können wir auch annehmen, dass diese Abbildungen gewählte Basispunkte respektieren.

Aus der langen exakten Homotopiesequenz sehen wir dann wie in Beispiel 7.4.7

$$\pi_n(X) \cong \text{coker} \left( \pi_{n+1}(X, X^{(n)}) \rightarrow \pi_n(X^{(n)}) \right)$$

Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(X, X^{(n)}) & \longrightarrow & \pi_n(X^{(n)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}^{\text{sing}}(X^{(n+1)}, X^{(n)}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n^{\text{sing}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; \mathbb{Z}), \end{array}$$

Die untere Abbildung im kommutativen Diagramm ist nach Korollar 7.4.3 die Randabbildung aus dem zellulären Komplex in Definition 3.4.4. Wegen  $X^{(n-1)} = \{*\}$  ist  $H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \cong \text{coker}(d_{n+1})$ , mit Übungsaufgabe 7.4.5 sehen wir dann, dass die rechte vertikale Abbildung ein Isomorphismus ist. Analog dazu sehen wir auch (unter Benutzung der Argumentation in Beispiel 7.4.7), dass die linke vertikale Abbildung ebenfalls ein Isomorphismus ist, daraus folgt die Behauptung.

Der relative Fall folgt aus dem absoluten Fall mit  $\pi_i(X, A) \cong \pi_i(X/A)$  für  $i \leq n$ , s. Proposition 7.4.6, und  $H_i^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}) \cong \tilde{H}_i^{\text{sing}}(X/A, \mathbb{Z})$  für alle  $i$ , s. Übungsaufgabe 3.1.8. □

**KOROLLAR 7.5.2** (Satz von Whitehead). *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen einfach-zusammenhängenden CW-Komplexen, so dass  $f_*: H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(Y, \mathbb{Z})$  für alle  $n \geq 0$  ein Isomorphismus ist. Dann ist  $f$  eine Homotopie-Äquivalenz.*

**BEWEIS.** Wir können  $Y$  durch den Abbildungszyylinder ersetzen und annehmen, dass  $f: X \hookrightarrow Y$  eine Inklusion ist. Da  $X$  und  $Y$  einfach zusammenhängend ist, folgt aus der langen exakten Homotopiesequenz für das Paar  $(Y, X)$ , dass  $\pi_1(Y, X) = 0$ . Aus der langen exakten Homologiesequenz für das Paar  $(Y, X)$  folgt nach Voraussetzung, dass  $H_n^{\text{sing}}(Y, X; \mathbb{Z}) = 0$  für alle  $n$  gilt. Mit dem relativen Hurewicz 7.5.1 folgt dann  $\pi_n(Y, X) = 0$  für alle  $n$ . Damit ist  $f: X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz, und aus dem Satz von Whitehead 7.3.25 folgt die Behauptung.  $\square$

**DEFINITION 7.5.3.** *Für  $n \geq 1$  wählen wir einen Erzeuger  $\gamma \in H_n^{\text{sing}}(\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n; \mathbb{Z})$ . Sei  $(X, x_0)$  ein punktierter Raum. Der Hurewicz-Homomorphismus wird definiert durch*

$$h: \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}): (f: (\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n) \rightarrow (X, x_0)) \mapsto f_*(\gamma).$$

*Für ein punktiertes Raumpaars  $(X, A, x_0)$  gibt es die entsprechende relative Variante*

$$h: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}): (f: (\mathbb{I}^n, \partial\mathbb{I}^n, \mathbb{J}^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)) \mapsto f_*(\gamma).$$

**PROPOSITION 7.5.4.** (1) *Der (relative) Hurewicz-Homomorphismus ist ein Homomorphismus (für  $n \geq 2$ ).*

(2) *Absoluter und relativer Hurewicz-Homomorphismus sind kompatibel, d.h. für ein punktiertes Raumpaars  $(X, A, x_0)$  gibt es ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \pi_n(A, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, x_0) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(A, x_0) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n^{\text{sing}}(A, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing}}(A, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

(3) *Für eine Abbildung  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_n(Y, y_0) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_n^{\text{sing}}(Y, \mathbb{Z}). \end{array}$$

**BEWEIS.** (1) folgt direkt aus der Identifikation der Addition in der Homologie in Proposition 3.3.3 und der Interpretation der Addition in der Homotopie in Übungsaufgabe 7.1.9.

(2) ist bis auf Vorzeichen die Funktorialität bzw. die Kompatibilität der Randabbildungen mit induzierten Abbildungen, und eine geeignete Wahl Erzeuger für das richtige Vorzeichen.

(3) ist auch einfach die Funktorialität.  $\square$

**BEMERKUNG 7.5.5.** *Wir sehen Definition 7.5.3 und Proposition 7.5.4 (bzw. der Referenz auf Proposition 3.3.3) an, dass wir allgemein auch einen Hurewicz-Homomorphismus für verallgemeinerte Homologietheorien definieren können.*

**BEISPIEL 7.5.6.** *Der Hurewicz-Homomorphismus ist im Allgemeinen kein Isomorphismus. Zum Beispiel kann für  $n = 1$  die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x_0)$  eines Raums eine beliebige Gruppe sein (z.B. die freie Gruppe auf  $m$  Erzeugern für*

$\bigvee_m S^1$ ), aber  $H_1^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$  ist immer eine abelsche Gruppe. Ein anderes Beispiel ist der  $n$ -dimensionale Torus  $T^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Die Projektion  $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  ist die universelle Überlagerung, und daraus folgt  $\pi_i(T^n, t_0) = 0$  für alle  $i \geq 2$ . Die Homologie des  $n$ -Torus ist aber nach Beispiel 3.4.1 bzw. Übungsaufgabe 3.4.13 in allen Graden  $0 \leq i \leq n$  nicht-trivial. Umgekehrt ist die Homologie der Sphären  $S^n$  sehr einfach und im Grad  $n$  konzentriert, die Homotopiegruppen der Sphären  $\pi_i(S^n)$  für  $i > n$  dagegen sind (für  $n \geq 2$ ) in unendlich vielen Graden nicht-trivial und gehören zu den kompliziertesten Objekten, mit denen sich die algebraischen Topologie beschäftigt.  $\square$

**BEMERKUNG 7.5.7.** Dass der Hurewicz-Homomorphismus im Allgemeinen kein Isomorphismus ist, ist nicht zu verwunderlich, da Homotopie und (singuläre oder kubische) Homologie doch sehr unterschiedliche Objekte sind. In den Homotopiegruppen geht es um konkrete Abbildungen  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , während Elemente der Homologiegruppen einfach Linearkombinationen von singulären Simplizes sind. Über eine Triangulierung der Sphäre kommen wir natürlich von einer Abbildung  $S^n \rightarrow X$  zu einer Homologieklass (das ist genau der Hurewicz-Homomorphismus), aber umgekehrt ist überhaupt nicht klar, wie wir von einer Linearkombination singulärer Simplizes zu einer Abbildung  $S^n \rightarrow X$  kommen sollten.

Es gibt einen Fall, in dem wir von singulären Simplizes zu Abbildungen von Sphären kommen: für ein singuläres Simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  mit  $\sigma(\partial\Delta^n) = x_0$  erhalten wir eine Abbildung  $(S^n, s_0) \cong (\Delta^n/\partial\Delta^n, \partial\Delta^n/\partial\Delta^n) \rightarrow (X, x_0)$  in  $\pi_n(X, x_0)$ . Der Satz von Hurewicz basiert darauf, dass für einen  $(n-1)$ -zusammenhängenden Raum  $X$  diese Situation immer erreicht werden kann.

**SATZ 7.5.8 (Satz von Hurewicz).** Sei  $n > 0$  und sei  $X$  ein  $(n-1)$ -zusammenhängender Raum mit Basispunkt  $x_0 \in X$ .

- (1) Wenn  $n = 1$  ist, dann induziert der Hurewicz-Homomorphismus einen natürlichen Isomorphismus

$$\pi_1(X, x_0)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}).$$

- (2) Wenn  $n > 1$  ist, dann ist  $H_i^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) = 0$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$  und der Hurewicz-Homomorphismus im Grad  $n$  ist ein Isomorphismus

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}).$$

## 7.6. Axiomatische Homotopietheorie: Modellkategorien

Es gibt eine axiomatische Herangehensweise an die Homotopietheorie, die sich auch dafür eignet, die Methoden der algebraischen Topologie in anderen (und abstrakteren) Kontexten anzuwenden, in denen topologische Räume auf den ersten Blick keine Rolle spielen (z.B. Homotopietheorien für algebraische Varietäten,  $C^*$ -Algebren, oder nebenläufige bzw. verteilte Systeme). Diese axiomatische Herangehensweise, über sogenannte *Modellkategorie*, wurde von Quillen entwickelt. Wir wollen die Axiome der Modellkategorie kurz am Beispiel der topologischen Räume diskutieren, um insbesondere auch die Bedeutung von Faserungen, Kofaserungen und Anhebungseigenschaften (und ihre Beziehungen untereinander) besser zu verstehen.

### Modellkategorien und Homotopiekategorie.

**DEFINITION 7.6.1.** Eine Modellstruktur auf einer Kategorie  $\mathbf{C}$  besteht aus drei ausgezeichneten Klassen von Morphismen, den schwachen Äquivalenzen  $\mathcal{W}$ , den Faserungen  $\mathcal{F}$ , und den Kofaserungen  $\mathcal{C}$ , so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

**Retrakte:** Die Klassen  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{C}$  sind abgeschlossen unter Retrakten.

**2-aus-3:** Wenn zwei der Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  und  $g \circ f: X \rightarrow Z$  schwache Äquivalenzen sind, dann auch die dritte.

**Anhebung/Lifting:** Gegeben ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

in dem  $i$  eine Kofaserung und  $p$  eine Faserung ist. Wenn  $i$  oder  $p$  zusätzlich eine schwache Äquivalenz ist, dann existiert die Anhebung  $h$  so dass das gesamte Diagramm kommutativ ist.

**Faktorisierung:** Jeder Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  kann (funktoriell) als  $X \xrightarrow{i} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} Y$  faktorisiert werden, wobei  $i \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}$  und  $\tilde{f} \in \mathcal{F}$  ist.

Jeder Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  kann (funktoriell) als  $X \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$  faktorisiert werden, wobei  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  und  $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{F}$  ist.

**BEMERKUNG 7.6.2.** Eine vollständige und kovollständige Kategorie  $\mathbf{C}$  mit Modellstruktur heißt Modellkategorie. (Vollständig und kovollständig heißt dabei, dass alle kleinen Limits und Kolimits existieren.)

Die Morphismen in  $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$  heißen azyklische Kofaserungen, die Morphismen in  $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$  azyklische Faserungen.

Zum Anhebungsaxiom: wir sagen auch, dass Faserungen die rechte Anhebungseigenschaft (im Englischen *right lifting property*, *RLP*) bezüglich azyklischer Kofaserungen haben, bzw. dass Kofaserungen die linke Anhebungseigenschaft bezüglich azyklischer Faserungen haben.

Ein Objekt  $X$  heißt fibrant, wenn der eindeutige Morphismus  $X \rightarrow \text{pt}$  zum terminalen Objekt eine Faserung ist, und kofibrant, wenn der eindeutige Morphismus  $\emptyset \rightarrow X$  vom initialen Objekt eine Kofaserung ist.

**DEFINITION 7.6.3.** Sei  $\mathbf{C}$  eine Modellkategorie.

(1) Ein Zylinder-Objekt für  $X \in \mathbf{C}$  ist eine Faktorisierung

$$X \sqcup X \xrightarrow{i} \text{Cyl}(X) \xrightarrow{\cong} X$$

der Kodiagonalabbildung  $\text{id} \sqcup \text{id}: X \sqcup X \rightarrow X$  in eine Kofaserung  $i: X \sqcup X \rightarrow \text{Cyl}(X)$  und eine azyklische Faserung  $\text{Cyl}(X) \rightarrow X$ .

(2) Ein Pfad-Objekt für  $X$  ist eine Faktorisierung

$$X \xrightarrow{\cong} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

der Diagonalabbildung  $\Delta: X \rightarrow X \times X$  als azyklische Kofaserung  $X \rightarrow X^I$  und eine Faserung  $p: X^I \rightarrow X \times X$ .

**BEISPIEL 7.6.4.** Für topologische Räume sind Zylinder-Objekte durch  $X \times [0, 1]$  und die offensichtliche Faktorisierung  $X \sqcup X \xrightarrow{i_0 \sqcup i_1} X \times [0, 1] \rightarrow X$  gegeben. Pfad-Objekte sind durch den Pfadraum  $X^I = \mathbf{Top}([0, 1], X)$  mit der Inklusion  $X \rightarrow X^I$  der konstanten Pfade und der Auswertungsabbildung  $X^I \rightarrow X \times X: \gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma(1))$  gegeben.  $\square$

DEFINITION 7.6.5. Sei  $\mathbf{C}$  eine Modellkategorie. Eine Links-Homotopie zwischen Morphismen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist ein Morphismus  $H: \text{Cyl}(X) \rightarrow Y$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \sqcup X & \xrightarrow{i} & \text{Cyl}(X) \\ & \searrow f \sqcup g & \downarrow H \\ & & Y \end{array}$$

Eine Rechts-Homotopie zwischen Morphismen  $f, g: X \rightarrow Y$  ist ein Morphismus  $H: X \rightarrow Y^I$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H} & Y^I \\ & \searrow (f, g) & \downarrow p \\ & & Y \times Y \end{array}$$

ÜBUNGSAUFGABE 7.6.6. Sei  $\mathbf{C}$  eine Modellkategorie,  $X \in \mathbf{C}$  kofibrant und  $Y \in \mathbf{C}$  fibrant. Zeigen Sie, dass Links- bzw. Rechts-Homotopie Äquivalenzrelationen auf  $\mathbf{C}(X, Y)$  sind. Zeigen Sie, dass die beiden Äquivalenzrelationen übereinstimmen.

DEFINITION 7.6.7. Sei  $\mathbf{C}$  eine Modellkategorie, sei  $R: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  eine funktorielle Ersetzung, die Objekte  $X \in \mathbf{C}$  durch schwach äquivalente kofibrante und fibrante Objekte ersetzt. Für zwei Objekte  $X, Y \in \mathbf{C}$  bezeichnen wir mit

$$[X, Y] := \mathbf{C}(RX, RY) / \sim$$

die Menge der Homotopieklassen zwischen kofibrant-fibranten Ersetzungen von  $X$  bzw.  $Y$ . Die Homotopiekategorie von  $\mathbf{C}$  ist die Kategorie  $\text{Ho}(\mathbf{C})$ , die die gleichen Objekte wie  $\mathbf{C}$  hat, und für die

$$\text{Ho}(\mathbf{C})(X, Y) := [X, Y].$$

**Modellstrukturen für topologische Räume.** Die Kategorie der topologischen Räume kann mit Modellstrukturen ausgestattet werden. Wir diskutieren die zwei wichtigsten.

DEFINITION 7.6.8. Die Quillen-Modellstruktur auf  $\mathbf{Top}$  ist gegeben durch:

- schwache Äquivalenzen sind schwache Äquivalenzen im Sinne von Definition 7.1.33,
- Faserungen sind Serre-Faserungen, s. Definition 7.2.3,
- Kofaserungen sind Retrakte relativer CW-Komplexe.

DEFINITION 7.6.9. Die Hurewicz-Modellstruktur auf  $\mathbf{Top}$  ist gegeben durch:

- schwache Äquivalenzen sind Homotopieäquivalenzen,
- Faserungen sind Hurewicz-Faserungen, s. Definition 7.2.3,
- Kofaserungen sind bestimmt durch die linke Anhebungseigenschaft bezüglich azyklischer Faserungen.

Wir können einige der Aussagen, die wir in bisherigen Abschnitten diskutiert haben, im Kontext der Quillen-Modellstruktur interpretieren:

- Die Aussage, dass  $\mathcal{W}$  unter Retrakten abgeschlossen ist und das 2-aus-3 Axiom wurde in Übungsaufgabe 7.1.34 bewiesen.

- Das Anhebungsaxiom für die Quillen-Modellstruktur ist die Aussage, dass für ein kommutatives Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow i & \nearrow h & \downarrow p \\
 B & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

von topologischen Räumen die Abbildung  $h$  existiert, falls entweder  $i: A \rightarrow B$  eine azyklische Kofaserung und  $p: X \rightarrow Y$  eine Faserung ist oder  $i: A \rightarrow B$  eine Kofaserung und  $p: X \rightarrow Y$  eine azyklische Faserung. Die Homotopieanhebungseigenschaft aus Definition 7.2.3 und die Homotopieerweiterungseigenschaft aus Definition 7.3.1 sind Spezialfälle dieses Axioms.

Allgemeiner gilt, dass eine Abbildung  $p: X \rightarrow Y$  genau dann eine Serre-Faserung ist, wenn sie die Rechts-Anhebungseigenschaft bezüglich aller Abbildungen erfüllt, die sowohl Retrakte relativer CW-Komplexe als auch schwache Äquivalenzen sind.

- Kofaserungen wie in Definition 7.3.1 sind nicht direkt Teil der Quillen-Modellstruktur. Proposition 7.3.6 besagt aber, dass die Kofaserungen der Quillen-Modellstruktur Kofaserungen im Sinne von Definition 7.3.1 sind. Auch die Kofaserungen der Hurewicz-Modellstruktur sind Kofaserungen im Sinne von Definition 7.3.1.
- Ein Teil des Faktorisierungsaxioms für die Quillen-Modellstruktur (nämlich für die Faktorisierung als azyklische Kofaserung und Faserung) ergibt sich aus Definition 7.2.7 und Übungsaufgabe 7.2.8. Allerdings fehlt dort noch die Tatsache, dass die Abbildung  $X \rightarrow P(f)$  eine Kofaserung ist. Definition 7.3.7 und Übungsaufgabe 7.3.8 liefern eine als Kofaserung (im Sinne von Definition 7.3.1 und azyklische Faserung, was aber für die Quillen-Modellstruktur noch nicht ganz reicht.
- Für einen topologischen Raum  $X$  ist die Faktorisierung  $\emptyset \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{p} X$  als Kofaserung  $i: \emptyset \rightarrow Z$  und azyklische Faserung  $p: Z \rightarrow X$  durch die CW-Approximation gegeben. Ein ähnliches Argument liefert die Faktorisierung einer beliebigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  in Kofaserung und azyklische Faserung.

### Satz von Whitehead: schwache Äquivalenz vs Homotopieäquivalenz.

Zur Veranschaulichung der axiomatischen Herangehensweise diskutieren wir noch eine Variante des Satzes von Whitehead.

SATZ 7.6.10. Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz von topologischen Räumen. Dann induziert  $f$  für jeden CW-Komplex  $Z$  eine natürliche Bijektion

$$[Z, X] \xrightarrow{\cong} [Z, Y].$$

BEWEIS. Wir faktorisieren  $f$  als  $X \xrightarrow{i} \tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} Y$  wobei  $i$  eine Homotopieäquivalenz und  $\tilde{f}$  eine Faserung ist. Ohne Beschränkung können wir also annehmen, dass  $f$  eine azyklische Faserung ist. Die Anhebungseigenschaft im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \emptyset & \longrightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\
 Z & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

impliziert, dass  $[Z, X] \rightarrow [Z, Y]$  surjektiv ist. Seien nun  $g, h: Z \rightarrow X$  zwei Abbildungen und  $H: f \circ g \sim f \circ h: Z \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie. Die Anhebungseigenschaft im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} \sqcup Z \times \{1\} & \xrightarrow{g \sqcup h} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ Z \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

liefert eine Homotopie  $\tilde{H}: g \sim h: Z \times [0, 1] \rightarrow X$ , womit  $[Z, X] \rightarrow [Z, Y]$  injektiv ist.  $\square$

**SATZ 7.6.11 (Satz von Whitehead).** *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine schwache Äquivalenz zwischen CW-Komplexen. Dann ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz.*

**BEWEIS.** Wir müssen zeigen, dass  $f: X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus in der Homotopiekategorie in der Homotopiekategorie  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CW})$  der CW-Komplexe ist. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist aber in der Homotopiekategorie  $\mathbf{Ho}(\mathbf{CW})$  der CW-Komplexe genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle CW-Komplexe  $Z$  die induzierte Abbildung  $[Z, X] \rightarrow [Z, Y]$  ein Isomorphismus ist. Dies folgt mit Satz 7.6.10.  $\square$

**Weitere Beispiele.** Auch die homologische Algebra passt in den Rahmen der Modellkategorien. Es gibt insbesondere die zwei folgenden relevanten Modellstrukturen:

- (1) Die *projektive Modellstruktur* auf der Kategorie der Kettenkomplexe ist gegeben durch
  - (a) schwache Äquivalenzen sind die Quasi-Isomorphismen,
  - (b) Faserungen sind Abbildungen, die in positiven Graden surjektiv sind,
  - (c) Kofaserungen sind gradweise Monomorphismen mit projektivem Kern.
- (2) Die *injektive Modellstruktur* auf der Kategorie der Kokettenkomplexe ist gegeben durch
  - (a) schwache Äquivalenzen sind Quasi-Isomorphismen,
  - (b) Faserungen sind gradweise Epimorphismen mit injektivem Kern,
  - (c) Kofaserungen sind Abbildungen, die in positiven Graden injektiv sind.

Projektive und injektive Auflösungen sind dann Spezialfälle der Faktorisierungen in den Axiomen der Modellkategorie. Insbesondere sind injektive Auflösungen von Kokettenkomplexen damit strukturell eng mit der CW-Approximation verwandt.

## Spezielle Kapitel: Gruppenhomologie

Das folgende Kapitel soll eine kurze Einführung in die Homologie von (hauptsächlich diskreten) Gruppen geben. Es gibt zwei verschiedene Blickwinkel, mit denen die topologischen Werkzeuge der Vorlesung für die algebraische Situation von Gruppen und ihren Darstellungen nutzbar gemacht werden können. Auf der einen Seite können wir einer Gruppe  $G$  einen sogenannten klassifizierenden Raum zuordnen, dessen Homologie nur von der Gruppe abhängt. Auf der anderen Seite können wir natürlich die ganzen Methoden der homologischen Algebra, s. Anhang A, auf die Kategorie der  $G$ -Moduln anwenden. Beide Methoden liefern (äquivalente) Definitionen von Homologie für Gruppen, mit Koeffizienten in  $G$ -Moduln. Etwas allgemeiner können wir mit denselben Methoden Homologie und Kohomologie für topologische Räume mit  $G$ -Wirkung definieren.

In kleinen (ko)homologischen Graden können konkrete Interpretationen für die Homologiegruppen gegeben werden, z.B. durch gekreuzte Homomorphismen, Relationen wie in der Hopf-Formel, oder (zentrale) Erweiterungen von Gruppen. In höheren Graden ist es schwieriger, Gruppenhomologie zu berechnen, und es es keine so einfache Interpretation der höheren Homologiegruppen. Gruppenhomologie taucht aber in verschiedenen interessanten Zusammenhängen auf, z.B. bei der Darstellungstheorie endlicher Gruppen (nach Quillen über das Spektrum des äquivarianten Kohomologierings und Trägervarietäten), in der algebraischen K-Theorie (über Quillens Plus-Konstruktion für die klassifizierenden Räume von  $GL_n(R)$ ) und in Varianten des dritten Hilbertschen Problems der Klassifikation von Scherenkongruenzklassen von Polytopen (über die Homologie von diskreten Isometriegruppen der klassischen Geometrien  $\mathbb{E}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  und  $\mathbb{H}^n$ ).

### 8.1. Definitionen

#### Topologische Sichtweise: klassifizierende Räume.

DEFINITION 8.1.1. Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Eine (Links-)  $G$ -Wirkung auf einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\rho: G \times X \rightarrow X$ , so dass

- (1)  $\rho(e, x) = x$  für alle  $x \in X$ , und
- (2)  $\rho(gh, x) = \rho(g, \rho(h, x))$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ .

Alternativ ist eine Gruppenwirkung durch einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$  gegeben. Analog gibt es den Begriff der Rechts- $G$ -Wirkung.

DEFINITION 8.1.2. Eine  $G$ -Wirkung  $\rho: G \times X \rightarrow X$  heißt eigentlich, wenn die Abbildung  $(\rho, \text{pr}_2): G \times X \rightarrow X \times X: (g, x) \mapsto (\rho(g, x), x)$  eigentlich ist, d.h. für eine kompakte Menge  $K \subset X \times X$  das Urbild  $(\rho, \text{pr}_2)^{-1}(K)$  wieder kompakt in  $G \times X$  ist.

DEFINITION 8.1.3. Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Sei  $EG$  ein zusammenhängender topologischer Raum mit trivialen Homotopiegruppen und einer eigentlichen freien  $G$ -Wirkung  $G \times EG \rightarrow EG$ . Dann heißt der Quotient  $BG = G \backslash EG$  klassifizierender Raum für  $G$ .

BEMERKUNG 8.1.4. • Wenn  $G$  eine Gruppe mit der diskreten Topologie ist, dann ist ein klassifizierender Raum für  $G$  ein zusammenhängender topologischer Raum  $X$  mit

$$\pi_i(X) \cong \begin{cases} G & i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Der Name "klassifizierender Raum" für  $BG$  kommt daher, dass  $BG$  Hauptfaserbündel mit Faser  $G$  klassifiziert: für einen parakompakten Hausdorff-Raum gibt es eine natürliche Bijektion zwischen Homotopieklassen von (nicht-punktierten) Abbildungen  $X \rightarrow BG$  und Isomorphieklassen von  $G$ -Hauptfaserbündeln auf  $X$ . Diese Bijektion ist durch Pullback des universellen  $G$ -Hauptfaserbündels  $EG \rightarrow BG$  gegeben. Im Fall einer diskreten Gruppe  $G$  klassifiziert  $BG$  einfach nur Überlagerungen mit Decktransformatiionsgruppe  $G$ .
- Klassifizierende Räume sind bis auf schwache Äquivalenz durch die Gruppe  $G$  eindeutig bestimmt. Im Fall einer diskreten Gruppe ist das am Besten mit Hindernistheorie zu sehen. Im Allgemeinen folgt das aus einer Eindeutigkeitsaussage in der Hauptfaserbündelklassifikation.

BEISPIEL 8.1.5. • Eine Wedge-Summe  $\bigvee_n S^1$  von  $n$  Kopien von  $S^1$  ist ein klassifizierender Raum für die freie Gruppe  $F_n$  mit  $n$  Erzeugern. Der  $n$ -dimensionale Torus ist ein klassifizierender Raum für die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}^n$ .

- Der unendlich-dimensionale reell-projektive Raum  $\mathbb{R}P^\infty$  ist ein klassifizierender Raum für  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .
- Die unendlichen Grassmannschen  $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^\infty)$  bzw.  $\text{Gr}(k, \mathbb{C}^\infty)$  sind klassifizierende Räume für die Gruppen  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  bzw.  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  (bzw. ihre maximal kompakten Untergruppen  $\text{O}(n)$  bzw.  $\text{U}(n)$ ).

□

Im Folgenden werden wir nur noch diskrete Gruppen diskutieren. Dann gibt es verschiedene Möglichkeiten, den klassifizierenden Raum zu konstruieren.

BEISPIEL 8.1.6. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir wählen eine Präsentation  $G = F/R$  von  $G$  als Quotient einer freien Gruppe  $F$  und einem Normalteiler  $R \trianglelefteq F$  von Relationen. Wir konstruieren  $BG$  als CW-Komplex.

- (1) Im 1-Skelett  $BG^{(1)}$  kodieren wir die Erzeuger von  $G$ . Wir wählen eine Basis  $g_i, i \in I$  von Erzeugern der freien Gruppe  $F$ . Das 1-Skelett ist dann die Wedge-Summe  $\bigvee_I S^1$ , wir haben also für jeden Erzeuger  $g_i, i \in I$  von  $F$  eine Schleife.
- (2) Im 2-Skelett  $BG^{(2)}$  kodieren wir die Relationen von  $G$ . Wir wählen Orientierungen für die Schleifen, damit können wir  $g_i$  bzw.  $g_i^{-1}$  konkret als Elemente in  $\pi_1(BG^{(1)})$  interpretieren: für  $g_i$  wird die zugehörige Schleife in Richtung der Orientierung durchlaufen, für  $g_i^{-1}$  in die umgekehrte Richtung. Nun wählen wir Erzeuger  $r_j, j \in J$  für  $R$ . Jeder dieser Erzeuger ist ein Wort in den  $g_i$ , entspricht also einem eindeutigen Element in  $\pi_1(BG^{(1)})$ , repräsentiert durch eine Schleife  $(S^1, s_0) \rightarrow (BG^{(1)}, BG^{(0)})$ . Für jeden dieser Erzeuger benutzen wir diese Schleife als Anklebeabbildung für eine 2-Zelle und erhalten das 2-Skelett  $BG^{(2)}$ .
- (3) Jetzt müssen wir noch die Trivialität der höheren Homotopiegruppen erreichen. Wenn wir induktiv  $BG^{(n)}$  konstruiert haben, wählen wir für jeden Erzeuger  $\sigma \in BG^{(n)}$  einen Repräsentanten  $(S^n, s_0) \rightarrow (BG^{(n)}, BG^{(0)})$  und kleben entlang dieser Abbildung eine  $(n+1)$ -Zelle  $D^{n+1}$  ein, um  $BG^{(n+1)}$  zu erhalten.

(4) Im Limes erhalten wir  $BG = \bigcup_n BG^{(n)}$ .

□

BEISPIEL 8.1.7. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir definieren die simpliziale Menge  $EG_\bullet$  durch  $EG_n = G^{\times(n+1)}$  mit den folgenden Rand- und Ausartungsabbildungen:

$$\begin{aligned} d_i &: (g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n) \\ s_j &: (g_0, \dots, g_{n-1}) \mapsto (g_0, \dots, g_j, g_j, \dots, g_{n-1}). \end{aligned}$$

Diese simpliziale Menge ist zusammenziehbar (Beweis ähnlich zu Beispiel A.3.17) und hat eine eigentliche freie  $G$ -Wirkung durch

$$G \times EG_n \rightarrow EG_n: (g_0, \dots, g_n) \cdot g \mapsto (gg_0, \dots, gg_n).$$

Wir können auch den Quotienten  $BG_\bullet = EG_\bullet/G$  als simpliziale Menge beschreiben. Im Grad  $n$  haben wir  $BG_n = G^{\times n}$ , dabei benutzen wir die Bar-Notation  $[g_1 | \cdots | g_n]$ , um  $n$ -Simplizes von  $BG$  zu beschreiben. Mit dieser Notation ist die Identifikation  $G \backslash EG_\bullet \rightarrow BG_\bullet$  wie folgt gegeben:

$$G \backslash EG_n \rightarrow BG_n: G \cdot (1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_n) \mapsto [g_1 | \cdots | g_n].$$

Unter dieser Identifikation gehen die Rand- und Ausartungsabbildungen von  $EG_\bullet$  in die folgenden Abbildungen für  $BG_\bullet$  über:

$$\begin{aligned} d_i &: [g_1 | \cdots | g_n] \mapsto \begin{cases} [g_2 | \cdots | g_n] & i = 0 \\ [g_1 | \cdots | g_i g_{i+1} | \cdots | g_n] & 0 < i < n \\ [g_1 | \cdots | g_{n-1}] & i = n \end{cases} \\ s_j &: [g_1 | \cdots | g_{n-1}] \mapsto [g_1 | \cdots | g_j | 1 | g_{j+1} | \cdots | g_{n-1}] \end{aligned}$$

wobei 1 das neutrale Element von  $G$  bezeichnet.

Die geometrische Realisierung der simplizialen Menge  $BG_\bullet$  ist ein klassifizierender Raum für die Gruppe  $G$ . □

BEISPIEL 8.1.8. Sei  $G$  eine Gruppe und  $V$  eine endlich-dimensionale  $G$ -Darstellung, d.h. ein (reeller oder komplexer) Vektorraum mit linearer  $G$ -Wirkung. Wir nehmen an, dass es eine abgeschlossene Teilmenge  $Z \subset V$  von Kodimension  $\geq s$  gibt, so dass die  $G$ -Wirkung auf  $V \setminus Z$  frei und eigentlich ist. Der Raum  $V \setminus Z$  ist dann  $(s-1)$ -zusammenhängend, und der Quotient  $(V \setminus Z)/G$  erfüllt die Bedingungen an die Homotopiegruppen eines klassifizierenden Raums in den Graden zwischen 0 und  $s-1$ . Wenn es eine Folge  $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots$  von  $G$ -Darstellungen (mit  $G$ -äquivalenten Inklusionen  $V_i \subset V_{i+1}$ ) gibt, so dass die Kodimensionen  $s_i$  der nicht-freien Teilmengen  $Z_i \subset V_i$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen unendlich gehen, dann ist  $\lim(V_i \setminus Z_i)/G$  ein klassifizierender Raum für  $G$ . Mindestvoraussetzung dafür ist natürlich, dass die Gruppe  $G$  treue endlich-dimensionale Darstellungen hat, das ist nicht für jede Gruppe der Fall (aber durchaus für viele interessante Gruppen). Die unendlichen projektiven Räume und Grassmannschen können z.B. auf diese Art konstruiert werden. □

DEFINITION 8.1.9. Sei  $G$  eine Gruppe und  $A$  eine abelsche Gruppe. Die Gruppenhomologie von  $G$  mit Koeffizienten in  $A$  ist definiert als Homologie eines klassifizierenden Raums für  $G$ :

$$H_\bullet(G, A) := H_\bullet^{\text{sing}}(BG, A).$$

Analog ist die Gruppenkohomologie von  $G$  mit Koeffizienten in  $A$  die Kohomologie eines klassifizierenden Raums für  $G$

$$H^\bullet(G, A) := H_{\text{sing}}^\bullet(BG, A).$$

Etwas allgemeiner können wir für eine Gruppe  $G$  die sogenannte äquivalente (Ko)Homologie definieren.

DEFINITION 8.1.10. Sei  $G$  eine Gruppe und  $\rho: X \times G \rightarrow X$  eine  $G$ -Wirkung auf einem topologischen Raum  $X$ . Auf  $EG \times X$  haben wir die freie "diagonale"  $G$ -Wirkung

$$G \times (X \times EG) \rightarrow X \times EG: (g, (x, e)) \mapsto (\rho(x, g^{-1}), g \cdot e)$$

Der Quotient  $EG \times_{/G} X := G \backslash (EG \times X)$  dieser  $G$ -Wirkung wird als Borel-Konstruktion, Homotopie-Quotient oder Homotopie-Bahnenraum bezeichnet.

Wir definieren die äquivariante (Ko)Homologie für die  $G$ -Wirkung auf  $X$  als (Ko)Homologie des Homotopie-Quotienten:

$$\begin{aligned} H_{\bullet}^G(X, A) &:= H_{\bullet}^{\text{sing}}(EG \times_{/G} X, A) \\ H_G^{\bullet}(X, A) &:= H_{\text{sing}}^{\bullet}(EG \times_{/G} X, A). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 8.1.11. Der Spezialfall  $X = \text{pt}$  ist genau die Definition der Gruppen(ko)homologie. Allgemeiner können wir auch Gruppenhomologie oder äquivariante Homologie mit Koeffizienten in einer  $G$ -Darstellung  $M$  definieren. Dafür ist die algebraische Sichtweise, die wir als nächstes diskutieren besser geeignet.

Es gibt zwei Varianten der äquivarianten (Ko)Homologie. In diesem Abschnitt diskutieren wir nur die Variante, die auf der Borel-Konstruktion beruht. Es gibt aber auch eine andere Art, äquivariante Kohomologie zu definieren, die auf Arbeiten von Bredon zurückgeht, die im Allgemeinen nicht zur Borel-äquivarianten Kohomologie isomorph ist und andere Strukturen aufweist, aber für  $G$ -äquivariante Homotopietheorie besser geeignet ist. Diese Version wird hier nicht weiter diskutiert.

Die beiden Projektionsabbildungen  $EG \times_{/G} X \rightarrow BG$  und  $EG \times_{/G} X \rightarrow X/G$  sind für die äquivariante Kohomologie von besonderer Bedeutung und können benutzt werden, um die äquivariante Kohomologie zu berechnen. Die Projektion  $EG \times_{/G} X \rightarrow BG$  ist eine Faserung mit Faser  $X$ , und liefert (über die zugehörige Leray-Serre-Spektralsequenz) Möglichkeiten, die äquivariante Kohomologie aus der Gruppenkohomologie der  $G$ -Wirkung auf  $H^{\bullet}(X, \mathbb{Z})$  zu berechnen. Die Abbildung  $EG \times_{/G} X \rightarrow X/G$  ist keine Faserung, kann aber benutzt werden, um die äquivariante Kohomologie über Garbenkohomologie von  $X/G$  mit Koeffizienten in der Homologie der Isotropiegruppen der  $G$ -Wirkung auf  $X$  zu berechnen.

**Algebraische Sichtweise:  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln.** Es gibt auch eine rein algebraische Definition von Gruppen(ko)homologie, die auf homologischer Algebra in der Kategorie der Moduln über dem Gruppenring  $\mathbb{Z}[G]$  basiert.

DEFINITION 8.1.12 (Gruppenring). Sei  $G$  eine Gruppe. Wir bezeichnen mit  $\mathbb{Z}[G]$  die freie abelsche Gruppe, die von den Elementen von  $G$  erzeugt wird:

$$\mathbb{Z}[G] = \left\{ \sum n_i [g_i] \mid n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G \right\}.$$

Wir definieren eine Multiplikation auf  $\mathbb{Z}[G]$  durch die Gruppenoperation von  $G$ :

$$\left( \sum n_i [g_i] \right) \cdot \left( \sum m_j [h_j] \right) = \sum n_i m_j [g_i h_j].$$

Dies definiert einen Ring mit Eins  $[1_G]$ , den Gruppenring  $\mathbb{Z}[G]$ .

BEMERKUNG 8.1.13. (Links- bzw. Rechts-)Moduln über dem Ring  $\mathbb{Z}[G]$  sind einfach abelsche Gruppen mit einer linearen (Links- bzw. Rechts-)Wirkung von  $G$ . Statt  $\mathbb{Z}$  können auch andere Ringe als Koeffizienten für die Definition verwendet werden. Für  $K$  einen Körper wird  $K[G]$  häufig als Gruppenalgebra bezeichnet. In diesem Fall sind  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln einfach  $G$ -Darstellungen in  $K$ -Vektorräumen.

DEFINITION 8.1.14. Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  ein  $\mathbb{Z}[G]$ -Modul. Wir definieren die Gruppenhomologie von  $G$  mit Koeffizienten in  $M$  als Tor-Gruppen über  $\mathbb{Z}[G]$ , s. Abschnitt A.4:

$$H_n(G, M) := \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M).$$

Dual dazu definieren wir die Gruppenkohomologie von  $G$  mit Koeffizienten in  $M$  als Ext-Gruppen über  $\mathbb{Z}[G]$ , s. Abschnitt A.6:

$$H^n(G, M) := \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^n(\mathbb{Z}, M).$$

BEMERKUNG 8.1.15. Etwas allgemeiner können wir statt einfachen  $G$ -Moduln auch Komplexe von  $G$ -Moduln als Koeffizienten nehmen. Ebenfalls können wir  $\mathbb{Z}$  durch Komplexe von  $G$ -Moduln ersetzen, das entspricht der äquivalenten Kohomologie im topologischen Bild. Wir werden diese Verallgemeinerungen im Abschnitt ?? zu Spektralsequenzen diskutieren und für Berechnungen benutzen.

Die Gruppen(ko)homologie kann nun mit verschiedenen  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösungen von  $\mathbb{Z}$  berechnet werden. In speziellen Fällen ist es immer besser, möglichst einfache Auflösungen zu benutzen, um damit rechnen zu können. Für den allgemeinen Fall (und für Beweise allgemeiner Aussagen) gibt es die sogenannte Bar-Auflösung.

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.16. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir betrachten den Komplex

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0,$$

in dem  $F_n = \mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}]$  die freie abelsche Gruppe auf der Menge  $G^{\times(n+1)}$  ist, mit den Randabbildungen

$$d: \mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}] \rightarrow \mathbb{Z}[G^{\times n}]: (g_0, \dots, g_n) \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \widehat{g}_i, \dots, g_n),$$

wobei die Notation  $\widehat{g}_i$  wie üblich meint, dass  $g_i$  weggelassen wird. Durch

$$g \cdot (g_0, \dots, g_n) := (gg_0, \dots, gg_n)$$

wird eine  $\mathbb{Z}[G]$ -Modulstruktur auf den  $F_n$  definiert, bezüglich derer die Randabbildungen  $d$  linear sind. Zusätzlich haben wir eine Augmentierung  $\epsilon: F_0 = \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}: \sum n_i g_i \mapsto \sum n_i$ . Zeigen Sie, dass  $\epsilon: F_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$  eine projektive Auflösung des trivialen  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduls  $\mathbb{Z}$  ist.

Wir schreiben die freie  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösung  $F_\bullet$  von  $\mathbb{Z}$  etwas um. Im  $\mathbb{Z}[G]$ -Modul  $\mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}]$  haben wir  $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n)$ , insbesondere ist also der Wert eines  $\mathbb{Z}[G]$ -linearen Homomorphismus auf  $(g_0, \dots, g_n)$  schon durch den Wert auf  $(1, g_0^{-1}g_1, \dots, g_0^{-1}g_n)$  festgelegt. Insbesondere bilden die Tupel  $(1, g_1, \dots, g_n)$  eine  $\mathbb{Z}[G]$ -Basis von  $F_n$ . Wir definieren die folgende "Bar-Notation" für diese Basis-Elemente:

$$[g_1 | \cdots | g_n] := (1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \cdots g_n).$$

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.17. Sei  $G$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Randabbildungen aus Übungsaufgabe 8.1.16 in der Bar-Notation die folgende Form hat:

$$\begin{aligned} d[g_1 | \cdots | g_n] &= g_1[g_2 | \cdots | g_n] \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i [g_1 | \cdots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \cdots | g_n] \\ &+ (-1)^{n+1} [g_1 | \cdots | g_{n-1}]. \end{aligned}$$

ÜBUNGSAUFGABE 8.1.18. Schreiben Sie die Homotopie aus Übungsaufgabe A.3.17 in Bar-Notation aus.

**ÜBUNGSAUFGABE 8.1.19.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  ein  $G$ -Modul. Wir bezeichnen  $C^n(G, M) := \text{Hom}_{\text{Set}}(G^n, M)$  und identifizieren  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(F_n, M) \xrightarrow{\cong} C^n(G, M)$ , indem eine  $\mathbb{Z}[G]$ -lineare Abbildung  $\phi: \mathbb{Z}[G^{\times(n+1)}] \rightarrow M$  auf die Abbildung

$$\psi: G^{\times n} \rightarrow M: [g_1 | \dots | g_n] \mapsto \phi(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_n)$$

geschickt wird. Wir definieren eine Randabbildung  $\partial: C^n(G, M) \rightarrow C^{n+1}(G, M)$  durch

$$\begin{aligned} \partial\psi[g_1 | \dots | g_{n+1}] &= g_1\psi[g_2 | \dots | g_{n+1}] \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i \psi[g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_{n+1}] \\ &+ (-1)^{n+1} \psi[g_1 | \dots | g_n]. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass durch die Identifikationen  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(F_n, M) \xrightarrow{\cong} C^n(G, M)$  ein Isomorphismus von Kokettenkomplexen von abelschen Gruppen gegeben wird:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}((F_\bullet, d), M) \xrightarrow{\cong} (C^\bullet(G, M), \partial).$$

Inbesondere berechnet der Komplex  $(C^\bullet(G, M), \partial)$  die Gruppenhomologie  $H^\bullet(G, M)$ .

**BEMERKUNG 8.1.20.** Wir sehen jetzt auch, dass die Definitionen 8.1.9 und 8.1.14 isomorphe Ergebnisse liefern. Der Komplex aus Übungsaufgabe 8.1.16, der zur Berechnung von  $\text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$  benutzt werden kann, ist genau der zelluläre Komplex für die geometrische Realisierung der simplizialen Menge  $BG_\bullet$  aus Beispiel 8.1.7 und berechnet damit die Homologie des klassifizierenden Raums.

## 8.2. Einfache Beispielrechnungen

**Explizite Auflösungen.** In Spezialfällen ist es manchmal möglich, einfache  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösungen zu konstruieren, um Gruppenhomologie zu berechnen. Ein Beispiel dafür sind die zyklischen Gruppen.

Wir bezeichnen hier die zyklische Gruppe der Ordnung  $n$  mit  $C_n$ . Wir wählen einen Erzeuger  $\sigma \in C_n$  und definieren das Norm-Element  $N = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{n-1}$ . Dann haben wir eine periodische freie  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösung von  $\mathbb{Z}$ :

$$\dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

**ÜBUNGSAUFGABE 8.2.1.** Zeigen Sie die Exaktheit der behaupteten Auflösung für  $C_n$ .

**PROPOSITION 8.2.2.** Sei  $M$  ein Modul für die zyklische Gruppe  $C_n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} H_i(C_n, M) &= \begin{cases} M/(\sigma-1)M & i=0 \\ M^G/NM & i>0 \text{ ungerade} \\ \{m \in M \mid Nm=0\}/(\sigma-1)M & i>0 \text{ gerade} \end{cases} \\ H^i(C_n, M) &= \begin{cases} M^G & i=0 \\ \{m \in M \mid Nm=0\}/(\sigma-1)M & i>0 \text{ ungerade} \\ M^G/NM & i>0 \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

**ÜBUNGSAUFGABE 8.2.3.** Berechnen Sie die Homologie für die unendliche zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}$ .

Etwas allgemeiner erhalten wir periodische Auflösungen für freie Gruppenwirkungen auf Sphären. Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein CW-Komplex mit zellulärer freier  $G$ -Wirkung, so dass  $X$  homöomorph zu  $S^{2n-1}$  ist. An dieser Stelle sind nur ungerade-dimensionale Sphären relevant, da nach Korollar 3.3.8 nur  $C_2$  frei auf gerade-dimensionalen Sphären wirken kann. Nach dem Fixpunktsatz von Lefschetz

wirkt  $G$  trivial auf  $H_{2n-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Der zelluläre Komplex für  $X$ , s. Definition 3.4.4, liefert dann eine exakte Sequenz von  $G$ -Moduln

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} C_{2n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \rightarrow C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Dies ist noch keine  $\mathbb{Z}[G]$ -freie Auflösung (wegen dem  $\mathbb{Z}$  in Grad  $2n$ , das von der Homologie von  $S^{2n-1}$  herkommt), aber wir können jetzt unendlich viele Kopien dieser exakten Sequenz durch die Komposition  $\eta \circ \epsilon: C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} C_{2n-1}(X)$  zu einer periodischen  $\mathbb{Z}[G]$ -freien Auflösung von  $\mathbb{Z}$  zusammenfügen.

**BEISPIEL 8.2.4.** *Ein Spezialfall dieser Konstruktion ist die oben betrachtete Auflösung für die zyklischen Gruppen, die wir aus der Drehwirkung auf  $S^1$  erhalten. Die CW-Struktur für die Drehwirkung von  $C_n$  auf  $S^1$  hat dabei  $n$  0-Zellen und  $n$  1-Zellen. Die relevante exakte Sequenz aus der zellulären Homologie ist*

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\sigma-1} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Die Komposition  $\eta \circ \epsilon$  kann mit der Multiplikation mit dem Norm-Element  $N$  identifiziert werden.  $\square$

**PROPOSITION 8.2.5.** *Sei  $G$  eine Gruppe, die eigentlich, frei und zellulär auf  $S^{2n-1}$  operiert. Dann gilt für alle  $i > 0$  und alle  $G$ -Moduln  $M$*

$$H^{i+2n}(G, M) \cong H^i(G, M).$$

*Insbesondere ist periodische Gruppenhomologie eine notwendige Bedingung dafür, dass eine endliche Gruppe frei auf einer Sphäre operieren kann.*

### Nullte und erste (Ko)Homologie.

**PROPOSITION 8.2.6.** *Sei  $G$  eine diskrete Gruppe und  $M$  ein  $\mathbb{Z}[G]$ -Modul. Dann gilt*

- (1)  $H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} M = M_G := M / \langle gm - m \mid m \in M, g \in G \rangle$
- (2)  $H^0(G, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = M^G := \{m \in M \mid gm = m \forall g \in G\}$ .

**BEMERKUNG 8.2.7.** *Der Modul  $M^G$  ist der Modul der Invarianten, der größte Untermodul von  $M$  mit trivialer  $G$ -Wirkung. Der Modul  $M_G$  ist der Modul der Koinvarianten, der größte Quotient von  $M$  mit trivialer  $G$ -Wirkung. Der Funktor  $M \mapsto M^G$  ist links-exakt, der Funktor  $M \mapsto M_G$  ist rechts-exakt. Gruppenhomologie und -kohomologie sind die derivierten Funktoren der Koinvarianten bzw. Invarianten, in gewissem Sinne höhere Invarianten, die messen inwieweit (Ko)Invarianten bilden nicht exakt ist.*

### ÜBUNGSAUFGABE 8.2.8.

*Geben Sie ein Beispiel für eine Injektion von  $G$ -Moduln, so dass die auf Koinvarianten induzierte Abbildung nicht injektiv ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Surjektion von  $G$ -Moduln, so dass die auf Invarianten induzierte Abbildung nicht surjektiv ist.*

**PROPOSITION 8.2.9.** *Sei  $G$  eine Gruppe. Dann gilt  $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G/[G, G]$ .*

**BEWEIS.** Wir betrachten die Bar-Auflösung in kleinen Graden:

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Hierbei sind  $F_i$  die freien  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln, die von  $i$ -Tupeln  $[g_1 | \cdots | g_i]$  erzeugt werden (mit  $\square$  als einziger Erzeuger im Fall  $F_0$ ). Die Abbildungen sind wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} \epsilon(\square) &= 1 \\ d_1([g]) &= g\square - \square \\ d_2([g_1|g_2]) &= g_1[g_2] - [g_1g_2] + [g_1]. \end{aligned}$$

Wir erhalten  $H_1(G, \mathbb{Z})$ , indem wir diesen Teil der Auflösung mit  $\mathbb{Z}$  tensorieren (triviale  $G$ -Wirkung!), und dann die Homologie an  $F_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$  berechnen. Die Moduln  $F_i \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$  sind dann freie abelsche Gruppen, die von den  $i$ -Tupeln  $[g_1 | \cdots | g_i]$  erzeugt werden. Die Abbildung  $d_1: F_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$  ist dann durch  $[g] \mapsto [] - [] = 0$  gegeben (da  $g$  auf  $[]$  trivial operiert). Die Abbildung  $d_2: F_2 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}$  ist dann durch  $[g_1 | g_2] \mapsto [g_2] - [g_1 g_2] + [g_1]$  gegeben. Damit ist die Homologie also der Quotient der freien abelschen Gruppe mit Erzeugern  $[g]$  durch die Relationen  $[g] + [h] - [gh]$ . Dann ist der gesuchte Isomorphismus durch  $G^{\text{ab}} \rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}): [g] \mapsto [g]$  gegeben.  $\square$

**BEMERKUNG 8.2.10.** Die Gruppe  $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$  wird Abelianisierung von  $G$  genannt. Es ist der größte abelsche Quotient von  $G$ . In der topologischen Sichtweise folgt Proposition 8.2.9 aus dem Satz von Hurewicz.

**DEFINITION 8.2.11.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  ein  $G$ -Modul. Ein gekreuzter Homomorphismus (auch Derivation genannt) ist eine Abbildung  $D: G \rightarrow M$  mit  $D(gh) = D(g) + gD(h)$  für alle  $g, h \in G$ . Die Menge  $\text{Der}(G, M)$  aller gekreuzten Homomorphismen  $D: G \rightarrow M$  ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition  $(D + D')(g) = D(g) + D'(g)$ .

**BEISPIEL 8.2.12.** Abbildungen der Form  $D_a: G \rightarrow M: g \mapsto (m \mapsto gm - m)$  heißen spaltende gekreuzte Homomorphismen (auch innere Derivationen) und bilden eine Untergruppe  $\text{Inn}(G, M) \subset \text{Der}(G, M)$ .  $\square$

**PROPOSITION 8.2.13.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $M$  ein  $G$ -Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$H^1(G, M) \cong \text{Der}(G, M) / \text{Inn}(G, M).$$

**BEWEIS.** Wir schreiben aus, was 1-Kozykel und 1-Koränder im Bar-Komplex sind, s. Übungsaufgabe 8.1.19. Ein 1-Kozykel ist eine Abbildung  $\psi: G \rightarrow M$  mit

$$\partial\psi[g_1 | g_2] = g_1\psi[g_2] - \psi[g_1 g_2] + \psi[g_1] = 0.$$

Dies ist genau die Bedingung, dass  $\psi$  ein gekreuzter Homomorphismus ist. Ein 1-Korand ist eine Abbildung der Form  $\partial\phi$  für eine Abbildung  $\phi: G^{\times 0} \rightarrow M$ . Eine solche Abbildung  $\phi$  ist genau die Wahl eines Elements  $m \in M$  (Bild von  $G^{\times 0} = \{[]\}$ ), und  $\partial\phi[g] = g\phi[] - \phi[] = gm - m$ . Dies sind genau die spaltenden gekreuzten Homomorphismen. Damit haben wir die Behauptung gezeigt.  $\square$

**BEISPIEL 8.2.14.** Im einfachsten Spezialfall eines Moduls  $M$  mit trivialer  $G$ -Wirkung ist dann also  $H^1(G, M) = \text{Hom}_{\text{Grp}}(G, M)$ .  $\square$

**BEISPIEL 8.2.15.** Ein Beispiel für Gruppenhomologie in der Algebra ist Hilberts berühmter Satz 90 (aus dem Zahlbericht). Wir betrachten eine Galois-Erweiterung  $L/K$ . Die relevante Gruppe ist die Galois-Gruppe  $G = \text{Gal}(L/K)$  und der relevante  $G$ -Modul ist  $M = L^\times$  (die multiplikative Gruppe des Körpers  $L$ ). Die heute übliche Formulierung von Hilberts Satz 90 besagt

$$H^1(G, L^\times) = 0.$$

Die ursprüngliche Formulierung für zyklische Galoiserweiterungen  $L/K$  können wir daraus leicht ableiten. Wir bezeichnen wieder mit  $\sigma$  einen Erzeuger der Galoisgruppe  $\text{Gal}(L/K)$ . Nach Proposition 8.2.2 ist

$$H^1(C_n, L^\times) = \{x \in L \mid Nx = 1\} / (\sigma - 1)L^\times.$$

Hierbei ist  $Nx = \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(x)$  genau die Norm  $N_{L/K}(x) \in K^\times$  des Elements  $x \in L^\times$  aus der Galois-theorie. Aus  $H^1(C_n, L^\times) = 0$  folgt dann, dass jedes Element  $y \in L^\times$  mit  $N_{L/K}(y) = 1$  von der Form  $y = \sigma(x)x^{-1}$  für ein geeignetes  $x \in L^\times$ .  $\square$

**Addition mit Übertrag und  $H^2$ .** Höhere Kohomologiegruppen sind immer etwas schwerer zu interpretieren. Ein Beispiel, in dem 2-Kozykel und eine zweite Kohomologiegruppe natürlich auftauchen ist die Addition mit Übertrag. Die folgende Diskussion orientiert sich an

- D.C. Isaksen. A cohomological viewpoint on elementary school arithmetic. Amer. Math. Monthly 109 (2002), no. 9, 796–805.

Um die kohomologische Interpretation der Addition mit Übertrag zu diskutieren, schränken wir uns auf die zweistellige Zahlen im Dezimalsystem ein. Wir betrachten also die Gruppe  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ , aber alle Betrachtungen können genauso gut für andere Zehnerpotenzen oder auch andere Darstellungssysteme für Zahlen (binär, hexadezimal,...) formuliert werden.

Die Gruppe  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$  sitzt in einer Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0,$$

in der  $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  die Zehnerstelle und  $\mathcal{E} = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  die Einerstelle beschreibt. Als Menge können wir  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$  mit  $\mathcal{Z} \times \mathcal{E}$  identifizieren, und Elemente aus  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$  eindeutig als  $[a][b]$  mit  $a \in \mathcal{Z}$  und  $b \in \mathcal{E}$  schreiben.

Wir wollen verstehen, wie in dieser Darstellung die Addition aussieht. Für zwei Elemente  $[a_1][b_1]$  und  $[a_2][b_2]$  haben wir

$$[a_1][b_1] + [a_2][b_2] = [a][b].$$

Für die Einerstelle ist offensichtlich  $b = b_1 + b_2$ . Die Zehnerstelle ist wegen des Übertrags komplizierter: Hier gilt  $a = a_1 + a_2 + z(b_1, b_2)$  in  $\mathcal{Z}$ , wobei

$$z: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z}: (b_1, b_2) \mapsto \begin{cases} 0 & b_1 + b_2 < 10 \\ 1 & b_1 + b_2 \geq 10 \end{cases}$$

die Übertragungsfunktion ist. Wenn wir mit der obigen Formel das Assoziativgesetz  $([a_1][b_1] + [a_2][b_2]) + [a_3][b_3] = [a_1][b_1] + ([a_2][b_2] + [a_3][b_3])$  für die Addition aufschreiben, erhalten wir

$$z(b_1, b_2) + z(b_1 + b_2, b_3) = z(b_2, b_3) + z(b_1, b_2 + b_3).$$

Die Assoziativität der Addition ist also gleichbedeutend mit der Kozykelbedingung für die Übertragungsfunktion  $z$ :

$$z(b_1, b_2) - z(b_1, b_2 + b_3) + z(b_1 + b_2, b_3) - z(b_2, b_3) = 0.$$

Ebenso sehen wir, dass die Bedingung, dass 0 das neutrale Element ist, gleichbedeutend ist mit der Normalisierungsbedingung  $z(b, 0) = z(0, b) = 0$ . Die Kommutativität der Addition ist gleichbedeutend mit  $z(b_1, b_2) = z(b_2, b_1)$ . Umgekehrt sehen wir auch, dass jede Funktion  $z: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Z}$ , die Kozykelbedingung und Normalisierung erfüllt, eine Gruppenstruktur auf  $\mathcal{Z} \times \mathcal{E}$  induziert.

**ÜBUNGSAUFGABE 8.2.16.** Welche Gruppenstrukturen erhalten wir durch ganzzahlige Vielfache der Übertragungsfunktion?

Das Ganze wollen wir jetzt kohomologisch interpretieren. Dafür betrachten wir eine deutlich allgemeinere Situation:

**DEFINITION 8.2.17.** Sei  $G$  eine Gruppe (nicht notwendigerweise kommutativ), und sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Eine zentrale Erweiterung von  $G$  durch  $A$  ist eine Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{q} G \rightarrow 1,$$

so dass  $i: A \hookrightarrow E$  injektiv ist und  $A$  als Untergruppe in das Zentrum von  $E$  einbettet, und  $q: E \rightarrow G = E/A$  die Quotientenabbildung ist.

Wenn wir für jedes Element  $g \in G$  ein Urbild  $\tilde{g} \times E$  wählen, erhalten wir eine Bijektion  $A \times G \xrightarrow{\cong} E$  von Mengen. Das erlaubt uns, jedes Element von  $E$  eindeutig als  $[a][g]$  mit  $a \in A$  und  $g \in G$  zu schreiben. Wir notieren die Gruppenoperation von  $E$  als  $[a_1][g_1] \times [a_2][g_2]$ .

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.18. Für eine zentrale Erweiterung  $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$  erhalten wir durch  $[0][g_1] \times [0][g_2] = [z(g_1, g_2)][g_1 g_2]$  eine Abbildung  $z: G \times G \rightarrow A$ .

(1) Zeigen Sie, dass diese die Kozykelbedingung

$$z(g_1, g_2) - z(g_1 g_2, g_3) + z(g_1, g_2 g_3) - z(g_2, g_3) = 0$$

und die Normalisierung  $z(g, 1) = z(1, g) = 0$  erfüllt.

(2) Zeigen Sie umgekehrt, dass jede Abbildung  $z: G \times G \rightarrow A$ , die die Kozykelbedingung und Normalisierung erfüllt, eine Gruppenstruktur auf  $A \times G$  induziert.

DEFINITION 8.2.19. Sei  $G$  eine Gruppe (nicht notwendigerweise kommutativ), und sei  $A$  eine abelsche Gruppe. Zwei zentrale Erweiterungen von  $G$  durch  $A$  sind isomorph, wenn es ein kommutatives Diagramm wie folgt gibt:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{q_1} & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow = & & \downarrow \cong & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{q_2} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

ÜBUNGSAUFGABE 8.2.20. Seien  $E$  und  $E'$  zwei Erweiterungen von  $G$  durch  $A$ , gegeben durch zwei Kozykel  $z, z': G \times G \rightarrow A$ .

(1) Zeigen Sie: Wenn es eine Abbildung  $h: G \rightarrow A$  gibt, so dass gilt

$$z(g_1, g_2) - z'(g_1, g_2) = h(g_2) - h(g_1 g_2) + h(g_1),$$

dann ist  $\phi: E \rightarrow E': [a][g] \mapsto [a + h(g)][g]$  ein Isomorphismus von Erweiterungen.

(2) Zeigen Sie: Wenn es einen Isomorphismus  $\phi: E \rightarrow E'$  von Erweiterungen gibt, dann ist  $z - z'$  ein Korand, d.h. es gilt

$$z(g_1, g_2) - z'(g_1, g_2) = h(g_2) - h(g_1 g_2) + h(g_1)$$

wobei  $h$  durch  $\phi([0][g]) = [h(g)][g]$  gegeben ist.

Wie interpretieren wir das nun als Kohomologie? Dazu benutzen wir eine Variante des Komplexes aus Übungsaufgabe A.3.17.

BEISPIEL 8.2.21. Sei nun  $G$  eine Gruppe und  $A$  eine abelsche Gruppe mit trivialer  $G$ -Wirkung. Wir können nun zeigen, dass  $H^2(G, A)$  die Isomorphieklassen zentraler Erweiterungen von  $G$  durch  $A$  klassifiziert: Die 2-Kozykel im Komplex  $C^\bullet(G, A)$ , s. Übungsaufgabe 8.1.19, sind Abbildungen  $\phi: G \times G \rightarrow A$ , für die gilt

$$\partial\phi([g_1|g_2|g_3]) = \phi([g_2|g_3]) - \phi([g_1g_2|g_3]) + \phi([g_1|g_2g_3]) - \phi([g_1|g_2]) = 0,$$

und wir erhalten genau die Bedingung aus Übungsaufgabe 8.2.18. Die 2-Koränder im Komplex  $C^\bullet(G, A)$  sind diejenigen 2-Koketten von der Form

$$\partial h([g_1|g_2]) = h([g_2]) - h([g_1g_2]) + h([g_1])$$

für Abbildungen  $h: G \rightarrow A$ , und wir erhalten genau die Bedingung aus Übungsaufgabe 8.2.20. Zusammengefasst erhalten wir eine Bijektion zwischen  $H^2(G, A)$  und den Isomorphieklassen zentraler Erweiterungen von  $G$  durch  $A$ .  $\square$

Was passiert im Spezialfall, dass  $G$  auch eine abelsche Gruppe ist? In diesem Fall haben wir ja ebenfalls einen Erweiterungsbegriff in Anhang A.6, Definition A.6.17, definiert und Ext-Gruppen benutzt, um diese Erweiterungen zu klassifizieren. Hierbei ist ein subtiler Unterschied zu beachten: betrachten wir Erweiterungen von  $G$  durch  $A$  im Sinne von Definition A.6.17 dann sind dies abelsche Gruppen, während die zentralen Erweiterungen in Definition 8.2.17 nicht notwendigerweise abelsch sind. Die genaue Beziehung zwischen beiden Klassifikationen wird durch den universellen Koeffizientensatz A.6.14 gegeben: für den Komplex  $C_\bullet(G, A)$  erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(G, \mathbb{Z}), A) \rightarrow H^2(G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(G, \mathbb{Z}), A) \rightarrow 0.$$

Nach Proposition 8.2.9 ist  $H_1(G, \mathbb{Z}) \cong G^{\text{ab}}$ , also isomorph zu  $G$ , wenn  $G$  abelsch ist. Der erste Term in der universellen Koeffizientensequenz ist klassifiziert damit genau die zentralen Erweiterungen von  $G$  durch  $A$ , bei denen die Erweiterungsgruppe  $E$  abelsch ist. Der letzte Term in der universellen Koeffizientensequenz ist dann verantwortlich für die Klassifikation der Erweiterungen von  $G$  durch  $A$ , bei denen  $E$  nicht abelsch ist. Für  $G$  abelsch gilt  $H_2(G, \mathbb{Z}) \cong \bigwedge^2 G$ , s. Proposition 8.3.17, so dass der letzte Term in der universellen Koeffizientensequenz die abelsche Gruppe  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2 G, A)$  der alternierenden  $A$ -wertigen Bilinearformen auf  $G$  ist. Für eine Erweiterung  $0 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0$  ist die zugehörige Bilinearform  $\phi(g_1, g_2) = [\tilde{g}_1, \tilde{g}_2]$  durch den Kommutator von Lifts der Elemente  $g_1$  und  $g_2$  in  $E$  gegeben.

Um auf den Spezialfall  $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$  zurückzukommen: in diesem Fall ist  $\bigwedge^2 \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} = 0$ , so dass alle Erweiterungen automatisch abelsch sind. Die kohomologische Interpretation besagt nun, dass die Übertragungsfunktion ein 2-Kozykel in der Gruppenkohomologie  $H^2(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}]}^2(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/10\mathbb{Z})$  ist, der genau zur Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

gehört. Die Erweiterung ist nichttrivial, weil es beim Addieren einen Übertrag gibt.

**BEMERKUNG 8.2.22.** *Weitere Beispiele für zentrale Erweiterungen in der Mathematik:*

- (1) *Die Heisenberg-Gruppe  $H_3(\mathbb{Z})$  der strikten oberen Dreiecksmatrizen in  $\text{SL}_3(\mathbb{Z})$ . Die Heisenberg-Gruppe kann als zentrale Erweiterung  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow 0$  geschrieben werden. In der oben diskutierten universellen Koeffizientensequenz ist der Ext-Term trivial (da  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  frei ist) und wir erhalten einen Isomorphismus  $H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigwedge^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ . Die Heisenberg-Gruppe entspricht dabei der alternierenden Bilinearform, für die der Kommutator der beiden Erzeuger von  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ein Erzeuger von  $\mathbb{Z}$  ist. In der Quantenmechanik taucht die Heisenberg-Gruppe (bzw. die allgemeinere Form einer zentralen Erweiterung eines symplektischen Vektorraums um  $\mathbb{R}$ ) in der Formulierung der Unschärferrelation auf, die beiden Erzeuger von  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  sind dabei Ort  $p$  und Impuls  $q$ .*
- (2) *Klassifikation zentraler Algebren durch die Brauer-Gruppe. Für eine endliche Galois-Erweiterung  $L/K$  ist die relative Brauer-Gruppe  $\text{Br}(L/K)$  die Gruppe der Isomorphieklassen zentraler einfacher  $K$ -Algebren  $A$  mit  $A \otimes_K L \cong \text{Mat}_{n \times n}(L)$  für  $n = [L : K]$  (und der Gruppenoperation  $A + A' = A''$  gegeben durch  $A \otimes_K A' \cong \text{Mat}_{n \times n}(A'')$ ). Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$H^2(\text{Gal}(L/K), L^\times) \xrightarrow{\cong} \text{Br}(L/K).$$

### 8.3. Formale Eigenschaften

Wir diskutieren ein paar der formalen Eigenschaften von Gruppenhomologie. Die einfacheren Aussagen folgen direkt aus der homologischen Algebra, s. Anhang A, die etwas komplizierteren beschäftigen sich mit dem Wechsel der Gruppe.

Zuerst folgt direkt aus der Definition 8.1.14, dass sowohl Gruppenhomologie als auch Kohomologie für eine feste Gruppe  $G$  kovariante Funktoren

$$H_n(G, -), H^n(G, -): \mathbb{Z}[G]\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

auf der Kategorie der  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln definieren. Für einen Homomorphismus  $f: M \rightarrow N$  von  $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln erhalten wir die induzierte Abbildung

$$f_*: H_n(G, M) \rightarrow H_n(G, N)$$

durch Tensorieren von  $f$  mit der Bar-Auflösung für  $G$ . Analog erhalten wir die induzierte Abbildung auf der Kohomologie durch Zusammensetzen mit  $f$ .

**PROPOSITION 8.3.1.** *Sei  $G$  eine Gruppe und  $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_2 \xrightarrow{p} M_3 \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $G$ -Moduln.*

(1) *Es existieren Randabbildungen  $\partial: H_n(G, M_3) \rightarrow H_{n-1}(G, M_1)$  und eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_{n+1}(G, M_3) \xrightarrow{\partial} H_n(G, M_1) \xrightarrow{i_*} H_n(G, M_2) \xrightarrow{p_*} H_n(G, M_3) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

(2) *Es existieren Randabbildungen  $\partial: H^n(G, M_3) \rightarrow H^{n+1}(G, M_1)$  und eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{p^*} H^{n-1}(G, M_3) \xrightarrow{\partial} H^n(G, M_1) \xrightarrow{i^*} H^n(G, M_2) \xrightarrow{p^*} H^n(G, M_3) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

**PROPOSITION 8.3.2.** (1) *Gruppenhomologie mit direkten Summen und gerichteten Kolimiten. Für projektive  $G$ -Moduln  $M$  gilt  $H_\bullet(G, M) = 0$ .*

(2) *Gruppenkohomologie vertauscht mit direkten Produkten. Für injektive  $G$ -Moduln  $M$  gilt  $H^\bullet(G, M) = 0$ .*

Diese exakten Aussagen folgen direkt aus Proposition A.4.13 bzw. A.6.9. Außerdem gibt es für Gruppen(ko)homologie universelle Koeffizientensequenzen, s. Satz A.4.16 bzw. Satz A.6.14.

Als nächstes soll es um die formalen Eigenschaften gehen, die die Homologie verschiedener Gruppen in Beziehung setzen.

**Restriktion.** Sei  $\rho: H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus. Damit können wir einen  $G$ -Modul als  $H$ -Modul auffassen. Dies liefert einen exakten Funktor  $\text{Res}_G^H: \mathbb{Z}[G]\text{-Mod} \rightarrow \mathbb{Z}[H]\text{-Mod}$ , genannt *Restriktion*.

**ÜBUNGSAUFGABE 8.3.3.** *Sei  $\rho: H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus und  $M$  ein freier  $G$ -Modul. Zeigen Sie, dass  $\text{Res}_G^H(M)$  ein freier  $H$ -Modul ist.*

**PROPOSITION 8.3.4.** *Sei  $\rho: H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus und  $M$  ein  $G$ -Modul. Sei  $P_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$  eine projektive  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösung von  $\mathbb{Z}$ . Dann ist  $\text{Res}_G^H(P_\bullet)$  eine projektive  $\mathbb{Z}[H]$ -Auflösung von  $\mathbb{Z}$ . Wir erhalten induzierte Homomorphismen*

$$\text{Cor}_G^H: H_\bullet(H, \text{Res}_G^H(M)) \rightarrow H_\bullet(G, M) \text{ und } \text{Res}_G^H: H^\bullet(G, M) \rightarrow H^\bullet(H, \text{Res}_G^H(M))$$

*die Korestriktion bzw. Restriktion genannt werden. Korestriktion und Restriktion sind natürliche Transformationen von Funktoren  $\mathbb{Z}[G]\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ .*

Wir können die Funktorialität hier allgemeiner formulieren. Dazu betrachten wir die Kategorie  $\mathbf{Grp} - \mathbf{Mod}$ : die Objekte sind Paare  $(G, M)$  bestehend aus einer Gruppe  $G$  und einem  $G$ -Modul  $M$ , Morphismen  $(H, N) \rightarrow (G, M)$  sind Paare  $(\rho: H \rightarrow G, \phi: N \rightarrow \text{Res}_G^H(M))$  bestehend aus einem Gruppenhomomorphismus

$\rho: H \rightarrow G$  und einem  $H$ -Modulhomomorphismus  $\phi: N \rightarrow \text{Res}_G^H(M)$ . Gruppenhomologie definiert dann einen kovarianten Funktor

$$\mathbf{H}_\bullet: \mathbf{Grp} - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}: (G, M) \mapsto \mathbf{H}_\bullet(G, M).$$

**Induzierte und koinduzierte Moduln.** Sei  $\rho: H \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus. Der Restriktionsfunktor  $\text{Res}_G^H$  hat zwei adjungierte Funktoren, die den Skalar-Erweiterungen entlang  $\mathbb{Z}[H] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$  entsprechen.

DEFINITION 8.3.5. Für einen Gruppenhomomorphismus  $\rho: H \rightarrow G$  und einen  $H$ -Modul  $M$  definieren wir den induzierten Modul

$$\text{Ind}_H^G(M) := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

und den koinduzierten Modul

$$\text{Coind}_H^G(M) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M).$$

BEMERKUNG 8.3.6. Induktion ist links-adjungiert zur Restriktion, Coinduktion ist rechts-adjungiert.

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.7. Sei  $H \leq G$  eine Untergruppe. Zeigen Sie  $\text{Ind}_H^G(M) = \bigoplus_{g \in G/H} gM$ , wobei in der direkten Summe  $g$  die  $H$ -Nebenklassen von  $G$  durchläuft. Insbesondere haben wir für einen  $G$ -Modul  $N$  einen Isomorphismus

$$\text{Ind}_H^G \text{Res}_G^H N \cong \mathbb{Z}[G/H] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} N$$

PROPOSITION 8.3.8 (Eckmann–Shapiro-Lemma). Sei  $H \subset G$  eine Untergruppe von  $G$  und  $M$  ein  $H$ -Modul. Dann haben wir Isomorphismen

$$\mathbf{H}_\bullet(H, M) \cong \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Ind}_H^G(M)).$$

$$\mathbf{H}^\bullet(H, M) \cong \mathbf{H}^\bullet(G, \text{Coind}_H^G(M)).$$

BEWEIS. Nach Proposition 8.3.4 ist die Restriktion einer projektiven  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösung  $P_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$  von  $\mathbb{Z}$  eine projektive  $\mathbb{Z}[H]$ -Auflösung. Das bedeutet, dass die Homologie des Komplexes

$$P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M) \cong P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M$$

sowohl  $\text{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M) \cong \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Ind}_H^G(M))$  als auch  $\text{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}, M) \cong \mathbf{H}_\bullet(H, M)$  berechnet. Ein analoger Beweis zeigt die Aussage für den koinduzierten Modul.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.9. Geben Sie eine explizite Abbildung mit Hilfe der Bar-Auflösungen an, die diese Isomorphismen induziert.

LEMMA 8.3.10. Sei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  von endlichem Index, d.h. dass es nur endlich viele  $H$ -Nebenklassen in  $G$  gibt. Dann gilt  $\text{Ind}_H^G(M) \cong \text{Coind}_H^G(M)$  für alle  $H$ -Moduln  $M$ .

BEWEIS. Die Isomorphismen sind wie folgt gegeben:

$$\alpha: \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M): g \otimes m \mapsto (\phi_{g,m}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow M)$$

$$\phi_{g,m}: \mathbb{Z}[G] \rightarrow M: s \mapsto \begin{cases} sgm & sg \in H \\ 0 & sg \notin H \end{cases}$$

$$\beta: \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M) \rightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M: \psi \mapsto \sum_{g \in G/H} g \otimes \psi(g^{-1}).$$

$\square$

**Transfer-Abbildungen.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $H \subset G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Für einen  $G$ -Modul  $M$  erhalten wir mit der Identifikation aus Lemma 8.3.10 kanonische Abbildungen (Einheit und Koeinheit der entsprechenden Adjunktionen) :

$$\Phi: M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M) = \text{Coind}_H^G(\text{Res}_G^H(M)): m \mapsto (g \mapsto g \cdot m)$$

$$\Psi: \text{Ind}_H^G(\text{Res}_G^H(M)) \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M \rightarrow M: g \otimes m \mapsto g \cdot m$$

Mit diesen Abbildungen können wir jetzt Transferabbildungen definieren:

DEFINITION 8.3.11. Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \subset G$  eine Untergruppe von endlichem Index, und  $M$  ein  $G$ -Modul.

- Die Transferabbildung auf der Gruppenhomologie wird durch die folgende Komposition definiert:

$$\begin{aligned} \text{tr}_G^H: \mathbf{H}_\bullet(G, M) &\xrightarrow{\Phi_*} \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Coind}_H^G(\text{Res}_G^H(M))) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Ind}_H^G(\text{Res}_G^H(M))) \\ &\xrightarrow{\Psi_*} \mathbf{H}_\bullet(H, \text{Res}_G^H(M)). \end{aligned}$$

Dabei folgt der erste Isomorphismus aus Lemma 8.3.10 und der zweite Isomorphismus aus dem Eckmann–Shapiro-Lemma 8.3.8.

- Analog wird die Transferabbildung auf der Gruppenkohomologie durch die folgende Komposition definiert:

$$\begin{aligned} \text{tr}_H^G: \mathbf{H}^\bullet(H, \text{Res}_G^H(M)) &\xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Coind}_H^G(\text{Res}_G^H(M))) \\ &\xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_\bullet(G, \text{Ind}_H^G(\text{Res}_G^H(M))) \\ &\xrightarrow{\Psi_*} \mathbf{H}^\bullet(G, M). \end{aligned}$$

BEMERKUNG 8.3.12. Für eine Gruppe  $G$  und eine Untergruppe  $H \subset G$  von endlichem Index ist die induzierte Abbildung  $BH \rightarrow BG$  eine Überlagerung von Grad  $[G : H]$ . Der Transfer der Gruppenhomologie ist dann eine Verallgemeinerung des Transfers, den wir in Proposition 5.6.1 (allerdings nur für zweifache Überlagerungen) betrachtet haben.

BEMERKUNG 8.3.13. Die Transferabbildungen können expliziter beschrieben werden. Für  $G$ -Moduln  $L$  und  $M$  haben wir eine wohldefinierte  $\mathbb{Z}[G]$ -lineare Abbildung

$$\text{tr}_H^G: \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(L, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(L, M): \phi \mapsto \sum_{g \in G/H} g\phi g^{-1}.$$

Dabei ist  $g\phi g^{-1}$  die Komposition  $L \xrightarrow{g^{-1}} L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{g} M$ . Für eine projektive  $\mathbb{Z}[G]$ -Auflösung  $P_\bullet \rightarrow \mathbb{Z}$  von  $\mathbb{Z}$  und einen  $G$ -Modul  $M$  erhalten wir dann eine Kettenabbildung

$$\text{tr}_H^G: \text{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P_\bullet, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, M),$$

die auf der Kohomologie die Transferabbildungen induziert. Analog kann die Transferabbildung auf der Gruppenhomologie beschrieben werden.

Aus der expliziten Beschreibung des Transfers erhalten wir die folgende Aussage.

PROPOSITION 8.3.14. Sei  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine endliche Untergruppe von endlichem Index. Dann ist die Komposition

$$\text{tr}_H^G \circ \text{Res}_G^H: \mathbf{H}^\bullet(G, M) \rightarrow \mathbf{H}^\bullet(G, M)$$

gleich der Multiplikation mit dem Index  $[G : H]$ . Eine analoge Aussage gilt für die Gruppenhomologie.

KOROLLAR 8.3.15. Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Für jeden  $G$ -Modul  $M$  und alle  $i > 0$  gilt

$$\#G \cdot H_i(G, M) = 0 \text{ und } \#G \cdot H^i(G, M) = 0.$$

Insbesondere haben endliche Gruppen keine höhere rationale Kohomologie, und höhere  $\mathbb{F}_p$ -Kohomologie nur für Primzahlen, die die Gruppenordnung teilen.

ÜBUNGSAUFGABE 8.3.16. Zeigen Sie, dass Korollar 8.3.15 auch für Gruppen gilt, die eine freie Untergruppe von endlichem Index haben.

**Cup-Produkt und Künneth-Formel.** Seien  $G_1, G_2$  Gruppen  $M_i$  Moduln über  $\mathbb{Z}[G_i]$ . Mit der Diagonalwirkung  $(g_1, g_2) \cdot (m_1 \otimes m_2) = g_1 m_1 \otimes g_2 m_2$  ist  $M_1 \otimes M_2$  ein  $\mathbb{Z}[G_1 \times G_2]$ -Modul. Wenn die Moduln über dem jeweiligen Gruppenring projektiv sind, dann ist auch  $M_1 \otimes M_2$  über  $\mathbb{Z}[G_1 \times G_2]$  projektiv. Für  $\mathbb{Z}[G_i]$ -projektive Auflösungen  $F_{i,\bullet} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist dann  $F_{1,\bullet} \otimes F_{2,\bullet}$  eine  $\mathbb{Z}[G_1 \times G_2]$ -projektive Auflösung von  $\mathbb{Z}$ .

Die natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} (F_{1,\bullet} \otimes_{G_1} M_1) \otimes (F_{2,\bullet} \otimes_{G_2} M_2) &\rightarrow (F_{1,\bullet} \otimes F_{2,\bullet}) \otimes_{G_1 \times G_2} (M_1 \otimes M_2): \\ (x_1 \otimes m_1) \otimes (x_2 \otimes m_2) &\mapsto (x_1 \otimes x_2) \otimes (m_1 \otimes m_2) \end{aligned}$$

induziert in der Homologie eine Produktabbildung

$$\boxtimes: H_p(G_1, M_1) \otimes H_q(G_2, M_2) \rightarrow H_{p+q}(G_1 \times G_2, M_1 \otimes M_2).$$

Diese Abbildung heißt *äußeres Produkt* oder *Kreuzprodukt*. Analog gibt es auch auf der Kohomologie ein entsprechendes Produkt

$$\boxtimes: H^p(G_1, M_1) \otimes H^q(G_2, M_2) \rightarrow H^{p+q}(G_1 \times G_2, M_1 \otimes M_2).$$

Aus der algebraischen Künneth-Formel A.5.2 erhalten wir dann die folgende Version der Künneth-Formel, wenn einer der Moduln  $M$  oder  $M'$  als  $\mathbb{Z}$ -Moduln frei ist:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(G_1, M_1) \otimes H_q(G_2, M_2) &\rightarrow H_n(G_1 \times G_2, M_1 \otimes M_2) \rightarrow \\ &\rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(G_1, M_1), H_q(G_2, M_2)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

In der Kohomologie können wir das äußere Produkt mit der Einschränkung entlang der Diagonalen  $\Delta: G \rightarrow G \times G$  kombinieren, um ein allgemeines Cup-Produkt für Gruppenkohomologie zu erhalten:

$$\cup: H^p(G, M_1) \otimes H^q(G, M_2) \xrightarrow{\boxtimes} H^{p+q}(G \times G, M_1 \otimes M_2) \xrightarrow{\Delta} H^{p+q}(G, M_1 \otimes M_2)$$

Wie das Cup-Produkt in der singulären Kohomologie ist dieses Cup-Produkt ist natürlich bezüglich  $G$ -Modul-Homomorphismen, kompatibel mit Randabbildungen in langen exakten Sequenzen, assoziativ und graduiert kommutativ.

Wenn  $G$  eine abelsche Gruppe ist, ist die Multiplikationsabbildung  $\mu: G \times G \rightarrow G$  ein Gruppenhomomorphismus. Dann können wir auch das äußere Produkt mit  $\mu_*$  kombinieren, um eine Produktstruktur auf der *Homologie* zu erhalten. Für einen Koeffizientenring  $R$  (mit trivialer  $G$ -Wirkung) ist das *Pontryagin-Produkt* definiert durch

$$H_p(G, R) \otimes H_q(G, R) \xrightarrow{\boxtimes} H_{p+q}(G \times G, R \otimes R) \xrightarrow{\mu_*} H_{p+q}(G, R)$$

Mit dem Pontryaginprodukt wird  $H_\bullet(G, R)$  für eine abelsche Gruppe  $G$  eine assoziative anti-kommutative graduierte  $R$ -Algebra.

Das Pontryagin-Produkt kann benutzt werden, um die Kohomologie abelscher Gruppen zu beschreiben. Dabei benutzen wir  $H_1(G, R) = G \otimes_{\mathbb{Z}} R$  und erhalten durch Pontryaginprodukt eine Algebrenabbildung

$$\psi: \bigwedge^{\bullet} (G \otimes_{\mathbb{Z}} R) \rightarrow H_{\bullet}(G, R).$$

PROPOSITION 8.3.17. *Sei  $R$  ein Hauptidealring.*

- (1) *Die Abbildung  $\psi: \bigwedge^{\bullet} (G \otimes_{\mathbb{Z}} R) \rightarrow H_{\bullet}(G, R)$  ist injektiv. Wenn  $G$  endlich erzeugt ist, ist  $\psi$  eine spaltende Injektion.*
- (2) *Wenn jede Primzahl  $p$  mit  ${}_pG \neq 0$  in  $R$  invertierbar ist, dann ist  $\psi$  ein Isomorphismus.*
- (3) *Wenn  $R$  Charakteristik 0 hat, dann ist  $\psi$  ein Isomorphismus in Grad 2.*

## Spezielle Kapitel: Topologie von Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz spezielle Aspekte der algebraischen Topologie für Mannigfaltigkeiten. Anwendungen der algebraischen Topologie in der Analysis oder Geometrie beziehen sich meistens auf Mannigfaltigkeiten, und die algebraische Topologie stellt auch verschiedene Werkzeuge für Klassifikationsfragen (topologische, glatte oder PL-Mannigfaltigkeiten) zur Verfügung. Für den Moment beschränken wir uns auf die wohl wichtigste Aussage zur Topologie von Mannigfaltigkeiten, die Poincaré-Dualität.

Für diesen Abschnitt werden Grundkenntnisse zu Mannigfaltigkeiten (topologische und glatte Mannigfaltigkeiten, Tangentialbündel) vorausgesetzt, wie sie z.B. im Skript Analysis auf Mannigfaltigkeiten ausgeführt sind.

Ein *topologische Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum  $M$ , der hausdorffsch, zweitabzählbar und lokal euklidisch ist. Eine Karte  $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  ist ein Tupel, bestehend aus einer offenen Menge  $U \subset M$  und einem Homöomorphismus  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand heißt *geschlossen*.

### 9.1. Orientierung und Fundamentalklasse

Wir diskutieren zuerst die Definition von Orientierung für topologische Mannigfaltigkeiten. Die Grundidee ist, dass jeder Punkt  $x \in M$  in einer Mannigfaltigkeit  $M$  eine Umgebung hat  $U$ , die homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist und damit  $U \setminus \{x\}$  auf eine Sphäre retrahierbar ist. Für die lokale Homologie  $H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$ , s. Bemerkung 5.5.6, haben wir dann (für  $n \geq 1$ ) Isomorphismen

$$H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R) \cong \tilde{H}_{n-1}^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}, R) \cong \tilde{H}_{n-1}^{\text{sing}}(S^{n-1}, R) \cong R,$$

die die lokale Homologie am Punkt  $x$  mit der (reduzierten) Homologie einer  $(n-1)$ -Sphäre um  $x$  identifizieren. Für die lokale Homologie  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  am Punkt  $x$  gilt dann mit Ausschneidung eine analoge Aussage.

**DEFINITION 9.1.1.** *Sei  $R$  ein Koeffizientenring. Eine lokale  $R$ -Orientierung einer Mannigfaltigkeit  $M$  am Punkt  $x \in M$  ist durch die Wahl eines Erzeugers von  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  (als  $R$ -Modul) gegeben.*

**BEMERKUNG 9.1.2.** (1) *Mit den Aussagen aus der Theorie des Abbildungsgrads, s. Lemma 3.3.2, Korollar 3.3.4 sowie Übungsaufgabe 3.3.10, sehen wir, dass Rotationen um den Punkt  $x$  die Orientierung erhalten und Spiegelungen (sofern sie den Punkt  $x$  fixieren) die Orientierung mit  $-1$  multiplizieren.*

(2) *Für zwei Punkte  $x, y \in \mathbb{R}^n$  können wir einen  $n$ -dimensionalen Ball  $B \subset \mathbb{R}^n$  betrachten, der  $x$  und  $y$  enthält. Über die von den Inklusionen  $\mathbb{R} \setminus B \hookrightarrow \mathbb{R} \setminus \{x\}, \mathbb{R} \setminus \{y\}$  induzierten Isomorphismen*

$$H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R) \cong H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B; R) \cong H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\}; R)$$

*ist dann durch die Wahl einer Orientierung an  $x$  eine Orientierung an allen anderen Punkten  $y \in \mathbb{R}^n$  festgelegt.*

(3) Für eine Mannigfaltigkeit  $M$  und eine Karte  $(U \subset M, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  haben wir für Punkte  $x, y \in U$  Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R) &\cong H_n^{\text{sing}}(U, U \setminus \{x\}; R) \\ &\cong H_n^{\text{sing}}(\phi(U), \phi(U) \setminus \{\phi(x)\}; R) \\ &\cong H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(x)\}; R) \\ &\cong H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\phi(y)\}; R) \\ &\cong H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{y\}; R), \end{aligned}$$

die Orientierungen an  $x$  und  $y$  vergleichen. Alle Isomorphismen hier sind kanonisch, induziert durch  $U \hookrightarrow M$ ,  $\phi: U \rightarrow \phi(U)$  oder  $\phi(U) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ; im vierten Schritt benutzen wir Teil (2) der Bemerkung.

DEFINITION 9.1.3. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $R$  ein Koeffizientenring. Eine  $R$ -Orientierung einer Mannigfaltigkeit ist eine Abbildung, die jedem Punkt  $x \in M$  eine lokale  $R$ -Orientierung  $\mu_x \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  von  $M$  an diesem Punkt zuordnet, so dass für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  um  $x$  existiert und für alle Punkte  $y \in U$  die lokalen Orientierungen an  $x$  und  $y$  unter den Isomorphismen aus Teil (2) von Bemerkung 9.1.2 kompatibel sind.

Eine Mannigfaltigkeit  $M$  heißt  $R$ -orientierbar, wenn es eine  $R$ -Orientierung auf  $M$  gibt.

ÜBUNGSAUFGABE 9.1.4. Zeigen Sie, dass jede Mannigfaltigkeit  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientierbar ist.

DEFINITION 9.1.5. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit. Wir definieren

$$\widetilde{M} = \{\mu_x \mid x \in M, \mu_x \text{ lokale } \mathbb{Z}\text{-Orientierung von } M \text{ am Punkt } x\}$$

und  $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M: \mu_x \mapsto x$ .

Die Menge  $\widetilde{M}$  ist eine Mannigfaltigkeit: für eine Karte  $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  von  $M$  und eine lokale  $\mathbb{Z}$ -Orientierung  $\mu_x$  an einem Punkt  $x \in U$  erhalten wir wie in Bemerkung 9.1.2 kompatible lokale  $\mathbb{Z}$ -Orientierungen  $\mu_y(U)$  an allen Punkten  $y \in U$ . Dann ist

$$\{\mu_y(U) \mid y \in U\} \xrightarrow{\pi} U \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$$

eine Karte von  $\widetilde{M}$  um den Punkt  $\mu_x$ . Mit dieser Topologie ist die Abbildung  $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$  eine Überlagerung vom Grad 2.

Diese Überlagerung heißt Orientierungsüberlagerung. Der Totalraum  $\widetilde{M}$  der Überlagerung ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit. Tatsächlich hat  $\widetilde{M}$  eine kanonische Orientierung: die Projektion  $\pi$  induziert Isomorphismen

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing}}(\widetilde{M}, \widetilde{M} \setminus \{\mu_x\}; \mathbb{Z}) &\cong H_n^{\text{sing}}(\widetilde{U}, \widetilde{U} \setminus \{\mu_x\}; \mathbb{Z}) \\ \xrightarrow{\pi_*} H_n^{\text{sing}}(U, U \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) &\cong H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

und die kanonische lokale Orientierung  $\tilde{\mu}_x \in H_n^{\text{sing}}(\widetilde{M}, \widetilde{M} \setminus \{\mu_x\}; \mathbb{Z})$  von  $\widetilde{M}$  am Punkt  $\mu_x$  ist der Erzeuger, der unter diesen Isomorphismen auf den Erzeuger  $\mu_x \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$  abgebildet wird.

BEMERKUNG 9.1.6. Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Für einen Punkt  $x \in M$  haben wir eine Äquivalenzrelation auf angeordneten Basen von  $T_x M$ : zwei Basen  $[v_1, \dots, v_n]$  und  $[w_1, \dots, w_n]$  sind genau dann äquivalent, wenn die Basiswechselformatix positive Determinante hat. Diese Äquivalenzrelation hat genau zwei Äquivalenzklassen. Eine lokale Orientierung von  $M$  am Punkt  $x \in M$  (im Sinne der Differentialtopologie, s. Skript "Analysis auf Mannigfaltigkeiten", Abschnitt 7.1) ist die Wahl einer solchen Äquivalenzklasse von Basen des Tangentialraums  $T_x M$ .

Auf  $\mathbb{R}^n$  haben wir die Standardorientierung, die durch die Tangentialvektoren  $\frac{\partial}{\partial r^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r^n}$  für die Standardkoordinatenfunktionen  $r^1, \dots, r^n$  auf  $\mathbb{R}^n$  gegeben ist. Eine (globale) Orientierung von  $M$  ist wie in Definition 9.1.3 eine Abbildung, die jedem Punkt  $x \in M$  eine lokale Orientierung am Punkt  $x$  zuordnet, so dass für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $(U, \phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n)$  um  $x$  existiert und für alle Punkte  $y \in U$  die gewählte lokale Orientierung mit der durch die Karte  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\mathbb{R}^n$  induzierte Orientierung übereinstimmen. Alternativ ist eine Orientierung auf  $M$  durch einen nirgends verschwindenden Schnitt des Vektorbündels  $\wedge^n TM \rightarrow M$  gegeben. Dual dazu kann eine Orientierung auch durch eine nirgends-verschwindende  $n$ -Form angegeben werden.

Das Bündel  $\nu: \wedge^n TM \rightarrow M$  ist ein Geradenbündel. Wählen wir eine geeignete Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  von  $M$  und lokale Trivialisierungen  $\tau_i: \nu^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}$  erhalten wir Übergangsfunktionen  $\tau_i \circ \tau_j: (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}$ , mit denen das Geradenbündel durch Zusammenkleben trivialer Geradenbündel auf  $U_i \times \mathbb{R}$  rekonstruiert werden kann. Diese Übergangsfunktion können wir als glatte Abbildungen  $\tau_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^\times$  auffassen. Setzen wir diese Übergangsfunktionen mit

$$\mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times: a \mapsto \begin{cases} 1 & |a| > 0 \\ -1 & |a| < 0 \end{cases}$$

zusammen, erhalten wir wieder Übergangsfunktionen für ein zu  $\wedge^n TM \rightarrow M$  isomorphes Geradenbündel. (Dies entspricht einer Reduktion der Strukturgruppe von  $GL_1(\mathbb{R})$  zu  $O(1)$ .) In diesem Geradenbündel  $\tilde{\nu}: \mathcal{L} \rightarrow M$  können wir (aufgrund der Form der Übergangsfunktionen) für jeden Punkt  $x \in M$  die Teilmenge  $\{1, -1\}$  in  $\tilde{\nu}^{-1}(x)$  eindeutig identifizieren. Dann erhalten wir durch

$$\{\{\pm 1\} \in \tilde{\nu}^{-1}(x) \mid x \in M\}$$

eine Mannigfaltigkeit, die diffeomorph zum Totalraum der Orientierungsüberlagerung ist.

PROPOSITION 9.1.7. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$  ist genau dann  $\mathbb{Z}$ -orientierbar, wenn der Totalraum der Orientierungsüberlagerung  $\tilde{M}$  zwei Zusammenhangskomponenten hat.

BEWEIS. Wenn  $M$  zusammenhängend ist, hat  $\tilde{M}$  entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten. Wenn  $\tilde{M}$  zwei Zusammenhangskomponenten hat, sind beide homöomorph zu  $M$ . Ein Schnitt  $M \rightarrow \tilde{M}$  von  $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$  liefert einen Homöomorphismus von  $M$  auf eine Zusammenhangskomponente von  $\tilde{M}$  und entspricht der Wahl einer Orientierung von  $M$ . Umgekehrt liefert jede Orientierung einen Schnitt von  $M \rightarrow \tilde{M}$ , so dass  $\tilde{M}$  zwei Zusammenhangskomponenten haben muss.  $\square$

KOROLLAR 9.1.8. Eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist orientierbar, wenn es keine Surjektion  $\pi_1(M) \rightarrow C_2$  von der Fundamentalgruppe auf die zyklische Gruppe mit zwei Elementen gibt.

BEISPIEL 9.1.9. Die Orientierungsüberlagerung von  $\mathbb{R}P^n$  für gerades  $n$  hat  $S^n$  als Totalraum. Die Orientierungsüberlagerung für die Kleinsche Flasche hat den 2-Torus  $T^2$  als Totalraum.  $\square$

Allgemeiner können wir für eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  und einen Koeffizientenring eine Mannigfaltigkeit

$$M_R = \{\alpha_x \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R) \mid x \in M\}$$

mit Überlagerungsabbildung  $\pi: M_R \rightarrow M: \alpha_x \mapsto x$  definieren. Eine  $R$ -Orientierung von  $M$  ist dann ein Schnitt  $\sigma: M \rightarrow M_R$  für  $\pi$ , so dass für jeden Punkt  $x \in M$  das Bild  $\sigma(x) \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  ein Erzeuger der lokalen Homologiegruppe ist.

LEMMA 9.1.10. *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und sei  $A \subset M$  eine kompakte Teilmenge.*

- (1) *Sei  $\sigma: M \rightarrow M_R: x \mapsto \sigma(x)$  ein Schnitt der Überlagerung  $M_R \rightarrow M$ . Dann existiert eine eindeutige Homologieklassse  $\sigma_A \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus A; R)$ , deren Einschränkung in  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  für alle  $x \in A$  gleich  $\sigma(x)$  ist.*
- (2) *Für alle  $i > n$  gilt  $H_i^{\text{sing}}(M, M \setminus A; R) = 0$ .*

BEWEIS. (i) Wir zeigen zuerst, dass wenn das Lemma für kompakte Teilmengen  $A, B$  und  $A \cap B$  gilt, dann auch für  $A \cup B$ . Dazu betrachten wir die Mayer–Vietoris-Sequenz (und lassen die Koeffizienten  $R$  zur besseren Lesbarkeit weg):

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cap B)) & \rightarrow & H_i^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\Phi} \\ \xrightarrow{\Phi} H_i^{\text{sing}}(M, M \setminus A) \oplus H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus B) & \xrightarrow{\Psi} & H_i^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cap B)) \end{array}$$

Für  $i > n$  sind der erste und der dritte Term 0, da nach Voraussetzung die Behauptung (2) des Lemmas für  $A, B$  bzw.  $A \cap B$  gilt. Daraus folgt die Behauptung (2) für  $A \cup B$ .

Für  $i = n$  ist der erste Term  $H_{n+1}^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cap B)) = 0$ , insbesondere ist die Abbildung  $\Phi: \alpha \mapsto (\alpha, -\alpha)$  injektiv. Aus der Behauptung (1) für  $A$  und  $B$  folgt die Existenz von eindeutigen Klassen  $\sigma_A \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus A)$ ,  $\sigma_B \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus B)$  und  $\sigma_{A \cap B} \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cap B))$ , deren Bilder in  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\})$  jeweils gleich  $\sigma(x)$  sind. Wegen dieser Eindeutigkeit sind die Bilder von  $\sigma_A$  und  $\sigma_B$  in  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cap B))$  gleich  $\sigma_{A \cap B}$ . Aus der obigen Mayer–Vietoris-Sequenz folgt dann die Existenz einer eindeutigen Klasse  $\sigma_{A \cup B} \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus (A \cup B))$  mit  $\Phi(\sigma_{A \cup B}) = (\sigma_A, -\sigma_B)$ , die die Bedingung (1) erfüllt.

(ii) Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $K \subset M$  eine kompakte Teilmenge. Dann existieren eine endliche Menge  $I$ , kompakte Teilmengen  $K_i, i \in I$  und Karten  $(U_i, \phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n), i \in I$ , so dass  $K = \bigcup_{i \in I} K_i$  und  $K_i \subset U_i$ . Die Behauptung des Lemmas folgt dann durch Induktion über  $\#I$  aus dem Fall  $M = \mathbb{R}^n$ : der Induktionsanfang  $\#I = 1$  ist (mit Ausschneidung) der Fall  $M = \mathbb{R}^n$ , der Induktionsschritt folgt aus Schritt (i) des Beweises. Wir haben damit auf den Fall  $M = \mathbb{R}^n$  reduziert.

(iii) Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe kompakte Menge gilt die Behauptung, da für jeden Punkt  $x \in A$  die Abbildung  $H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  ein Isomorphismus ist. Durch ein Induktionsargument wie in Schritt (ii) des Beweises folgt die Behauptung für den Fall, dass  $A$  eine Vereinigung von endlich vielen konvexen kompakten Teilmengen ist.

(iv) Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge. Wir wählen als Repräsentanten von  $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$  einen relativen Zykel  $z$  und bezeichnen mit  $C \subset \mathbb{R}^n \setminus A$  die Vereinigung der Bilder der singulären Simplizes in  $\partial z$ . Dann ist  $C$  kompakt und hat damit positiven Abstand  $\delta := \inf\{\|x - y\| \mid x \in C, y \in A\}$  von  $A$ . Wir überdecken  $A$  mit endlich vielen abgeschlossenen  $\epsilon$ -Bällen  $\overline{B}(x, \epsilon)$  für  $x \in A$  und  $\epsilon < \delta$ . Die Vereinigung  $K$  dieser Bälle ist immer noch disjunkt von  $C$ . Der relative Zykel  $z$  liefert eine Klasse  $\alpha_K \in H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K)$ , die sich auf  $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$  einschränkt.

Da  $K$  Vereinigung von endlich vielen konvexen kompakten Teilmengen ist, gelten die Behauptungen für  $K$ . Insbesondere folgt aus Schritt (iii) des Beweises für  $i > n$  schon  $H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) = 0$ . Damit ist  $\alpha_K = 0$ , also  $\alpha = 0$ , woraus  $H_i^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 0$  folgt (Behauptung (2) des Lemmas). Im Fall  $i = n$  sei nun  $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$  so, dass  $\alpha_x = 0 \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  für alle  $x \in A$ . Für einen

Ball  $\bar{B}(x, \epsilon)$  für  $x \in A$  und  $\epsilon < \delta$  ist  $H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}(x, \epsilon)) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ , woraus für die Klasse  $\alpha_K$  auch  $\alpha_K|_x = 0 \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  für alle  $x \in K$  folgt. Aus Schritt (iii) des Beweises folgt  $\alpha_K = 0$  und damit  $\alpha = 0$ . Dies zeigt die Eindeutigkeit in Behauptung (1). Für die Existenz können wir einfach das Bild eines Elements  $\alpha_B$  für einen Ball mit  $A \subset B$  nehmen.  $\square$

PROPOSITION 9.1.11.

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeit.

(1) Wenn  $M$   $R$ -orientierbar ist, dann ist die Einschränkungabbildung

$$H_n^{\text{sing}}(M, R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$$

für alle  $x \in M$  ein Isomorphismus.

(2) Wenn  $M$  nicht  $R$ -orientierbar ist, dann ist für alle  $x \in M$  die Einschränkungabbildung  $H_n^{\text{sing}}(M, R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R) \cong R$  injektiv und hat als Bild die Menge  $\{r \in R \mid 2r = 0\}$ .

(3) Für  $i > n$  gilt  $H_i^{\text{sing}}(M, R) = 0$ .

BEWEIS. Folgt aus Lemma 9.1.10. Nach Annahme ist  $M$  kompakt und wir benutzen den Fall  $A = M$  des Lemmas. Behauptung (3) folgt direkt aus Aussage (2) des Lemmas. Bezeichnen wir mit  $\Gamma_R(M)$  die Menge der Schnitte  $M \rightarrow M_R$  der Überlagerung  $M_R \rightarrow M$  erhalten wir einen Homomorphismus

$$H_n^{\text{sing}}(M, R) \rightarrow \Gamma_R(M): \alpha \mapsto (x \mapsto \alpha_x),$$

wobei  $\alpha_x$  das Bild von  $\alpha$  unter der Abbildung  $H_n^{\text{sing}}(M, R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  bezeichnet. Aussage (1) des Lemmas sagt, dass dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Wenn  $M$  zusammenhängend ist, ist ein Schnitt  $M \rightarrow M_R$  bereits durch den Wert an einem einzigen Punkt bestimmt, damit folgen die Behauptungen (1) und (2).  $\square$

DEFINITION 9.1.12. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $R$  ein Koeffizientenring. Eine Fundamentalklasse (auch Orientierungsklasse) für  $M$  mit Koeffizienten in  $R$  ist eine Homologieklass  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, R)$ , deren Bild in  $H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  für alle  $x \in M$  ein Erzeuger ist.

BEMERKUNG 9.1.13. Nach Proposition 9.1.11 existiert eine Fundamentalklasse mit Koeffizienten in  $R$  für geschlossene und  $R$ -orientierbare Mannigfaltigkeiten. Umgekehrt bedeutet die Existenz einer Fundamentalklasse für  $M$  mit Koeffizienten in  $R$ , dass  $M$  kompakt und  $R$ -orientierbar ist: für eine Fundamentalklasse  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, R)$  liefert die Zuordnung  $x \mapsto [M]_x \in H_n^{\text{sing}}(M, M \setminus \{x\}; R)$  eine  $R$ -Orientierung. Da  $[M]_x \neq 0$  nur für Punkte  $x$  im Bild eines Zykelrepräsentanten von  $[M]$  sein kann, muss  $M$  kompakt sein.

BEISPIEL 9.1.14. Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit. Wir nehmen an, dass  $M$  trianguliert ist, d.h.  $M$  ist homöomorph zu geometrischen Realisierung  $|X|$  eines Simplizialkomplexes. Für diesen Simplizialkomplex gilt dann, dass jedes Simplex in einem Simplex der Dimension  $n$  enthalten ist. Dann ist ein Repräsentant der  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -Fundamentalklasse  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  durch die Summe  $\sum_{\sigma \in X_n} \sigma$  aller  $n$ -dimensionalen Simplizes gegeben. Wenn  $M$  orientierbar ist, dann gibt es Vorzeichenwahlen für die  $n$ -dimensionalen Simplizes so dass  $\sum_{\sigma \in X_n} \pm \sigma$  ein Repräsentant einer  $\mathbb{Z}$ -Fundamentalklasse  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z})$  ist.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE 9.1.15. Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann ist die Torsionsuntergruppe von  $H_{n-1}^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z})$  trivial, falls  $M$   $\mathbb{Z}$ -orientierbar ist, und  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , falls  $M$  nicht  $\mathbb{Z}$ -orientierbar ist.

PROPOSITION 9.1.16. *Für einen Koeffizientenring  $R$  und eine  $n$ -dimensionale nicht-kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $M$  gilt  $H_i^{\text{sing}}(M, R) = 0$  für alle  $i \geq n$ .*

BEWEIS. Sei der Zykel  $z$  ein Repräsentant für eine Klasse in  $H_i^{\text{sing}}(M, R)$ . Die Vereinigung der Bilder der Simplizes in  $z$  ist eine kompakte Teilmenge in  $M$ , also existiert eine offene Menge  $U \subset M$  mit kompaktem Abschluss  $\bar{U} \subset M$ , die das Bild von  $z$  enthält. Für  $V = M \setminus \bar{U}$  betrachten wir das folgende kommutative Diagramm, in dem die obere Zeile ein Teil der langen exakten Sequenz für das Tripel  $(M, U \cup V, V)$  ist:

$$\begin{array}{ccccc} H_{i+1}^{\text{sing}}(M, U \cup V; R) & \longrightarrow & H_i^{\text{sing}}(U \cup V, V; R) & \longrightarrow & H_i^{\text{sing}}(M, V; R) \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \\ & & H_i^{\text{sing}}(U, R) & \longrightarrow & H_i^{\text{sing}}(M, R) \end{array}$$

Da  $U \cup V$  und  $V$  kompaktes Komplement haben, können wir Lemma 9.1.10 anwenden, um zu sehen, dass für  $i > n$  die beiden Gruppen  $H_{i+1}^{\text{sing}}(M, U \cup V; R)$  und  $H_i^{\text{sing}}(M, V; R)$  verschwinden. Damit folgt  $H_i^{\text{sing}}(U, R) \cong H_i^{\text{sing}}(U \cup V, V; R) = 0$ . Also ist die Klasse von  $z$  in  $H_i^{\text{sing}}(U, R)$  und damit in  $H_i^{\text{sing}}(M, R)$  trivial.

Für  $i = n$  definiert die Klasse  $[z] \in H_n^{\text{sing}}(M, R)$  einen Schnitt von  $M_R \rightarrow M$ . Da  $M$  zusammenhängend ist, ist dieser Schnitt bereits durch den Wert an einem Punkt bestimmt. Da  $z$  kompaktes Bild in  $M$  hat und  $M$  nicht kompakt ist, gibt es einen Punkt, der nicht im Bild von  $z$  liegt, an dem der Schnitt  $x \mapsto [z]_x$  also 0 ist. Aus Lemma 9.1.10 folgt, dass  $[z] = 0$  in  $H_n^{\text{sing}}(M, V; R)$ . Da  $H_{i+1}^{\text{sing}}(M, U \cup V; R) = 0$  (mit Lemma 9.1.10) ist die Abbildung  $H_n^{\text{sing}}(U, R) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(M, V; R)$  injektiv. Also ist  $[z] = 0$  in  $H_n^{\text{sing}}(U, R)$  und damit in  $H_n^{\text{sing}}(M, R)$ . Da  $z$  beliebig war, ist  $H_n^{\text{sing}}(M, R) = 0$ .  $\square$

DEFINITION 9.1.17. *Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen geschlossenen orientierten  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Der Abbildungsgrad von  $f$  ist die eindeutige ganze Zahl  $\deg(f)$ , für die gilt*

$$f_*([M]) = \deg(f) \cdot [N].$$

BEMERKUNG 9.1.18. *Sei  $f: M \rightarrow N$  eine Abbildung zwischen zusammenhängenden geschlossenen orientierbaren  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit gewählten Fundamentalklassen  $[M]$  bzw.  $[N]$ . Sei  $B \subset N$  ein  $\epsilon$ -Ball, so dass  $f^{-1}(B)$  disjunkte Vereinigung von Bällen  $B_i$  ist, die unter  $f$  homöomorph auf  $B$  abgebildet werden. Dann ist der Abbildungsgrad  $\deg f$  durch  $\sum \epsilon_i$  gegeben, wobei  $\epsilon_i = \pm 1$ , wobei sich das Vorzeichen dadurch bestimmt, ob der Homöomorphismus  $f: B_i \rightarrow B$  orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend (bezüglich der von den Fundamentalklassen  $[M]$  und  $[N]$  induzierten Orientierungen) ist. Interpretation über Urbilder mit Vielfachheiten, Vergleich mit Abbildungsgrad zwischen Sphären aus Abschnitt 3.3.*

ÜBUNGSAUFGABE 9.1.19. *Sei  $M$  eine zusammenhängende geschlossene orientierte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung  $M \rightarrow S^n$  von Grad 1 gibt.*

ÜBUNGSAUFGABE 9.1.20.

- (1) *Zeigen Sie, dass es keine Abbildung  $S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$  von Grad 1 gibt.*
- (2) *Wir bezeichnen mit  $\Sigma_g$  eine kompakte geschlossene orientierbare Fläche von Geschlecht  $g$ . Zeigen Sie, dass es genau dann eine Abbildung  $\Sigma_{g_1} \rightarrow \Sigma_{g_2}$  von Grad 1 gibt, wenn für  $g_1 \geq g_2$ .*

BEISPIEL 9.1.21. Jeder Homöomorphismus  $\phi: \mathbb{C}\mathbb{P}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2n}$  erhält die Orientierung. Es reicht zu zeigen, dass der Grad von  $\phi$  gleich 1 ist. Der Kohomologiering von  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n}$  ist  $\mathbb{Z}[u]/(u^{2n+1})$ , insbesondere ist  $u^{2n}$  ein Erzeuger von  $H^{2n}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n}, \mathbb{Z})$ . Für den Homöomorphismus  $\phi$  gilt  $\phi^*(u) = \pm u$ , also  $\phi^*(u^{2n}) = \phi^*(u^n \cup u^n) = u^n \cup u^n$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## 9.2. Cap- vs Cup-Produkt

DEFINITION 9.2.1 (Cap-Produkt). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  eine Ring. Für ein  $k$ -Simplex  $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$  und eine  $l$ -Kokette  $\phi: C_{\text{sing}}^l(X, R)$  mit  $k \geq l$  definieren wir das Cap-Produkt

$$\sigma \cap \phi = \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_l, \dots, v_k]}$$

Dies induziert ein  $R$ -bilineares Cap-Produkt

$$\cap: C_k^{\text{sing}}(X, R) \times C_{\text{sing}}^l(X, R) \rightarrow C_{k-l}^{\text{sing}}(X, R)$$

LEMMA 9.2.2. Für einen topologischen Raum  $X$  und einen Ring  $R$  induziert das Cap-Produkt aus Definition 9.2.1 ein Cap-Produkt auf der Homologie bzw. Kohomologie:

$$\cap: H_k^{\text{sing}}(X, R) \times H_{\text{sing}}^l(X, R) \rightarrow H_{k-l}^{\text{sing}}(X, R).$$

BEWEIS. Wir zeigen zuerst, dass für ein  $k$ -Simplex  $\sigma$  und eine  $l$ -Kokette  $\phi \in C_{\text{sing}}^l(X, R)$  gilt

$$\partial(\sigma \cap \phi) = (-1)^l(\partial\sigma \cap \phi - \sigma \cap \delta\phi).$$

Dies überprüfen wir durch direkte Berechnung der einzelnen Terme:

$$\begin{aligned} \partial\sigma \cap \phi &= \sum_{i=0}^l (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{l+1}]})\sigma|_{[v_{l+1}, \dots, v_k]} \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^k (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_l, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]} \\ \sigma \cap \delta\phi &= \sum_{i=0}^{l+1} (-1)^i \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{l+1}]})\sigma|_{[v_{l+1}, \dots, v_k]} \\ \partial(\sigma \cap \phi) &= \sum_{i=l}^k (-1)^{i-l} \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]})\sigma|_{[v_l, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_k]}. \end{aligned}$$

Aus der Aussage  $\partial(\sigma \cap \phi) = (-1)^l(\partial\sigma \cap \phi - \sigma \cap \delta\phi)$  folgt, dass das Cap-Produkt eines Zyklus  $\sigma$  und eines Kozyklus  $\phi$  wieder ein Zykel ist. Für  $\partial\sigma = 0$  gilt  $\partial(\sigma \cap \phi) = (-1)^l(\sigma \cap \delta\phi)$ , so dass das Cap-Produkt eines Zyklus und eines Korands wieder ein Korand ist. Umgekehrt folgt aus  $\delta\phi = 0$  auch  $\partial(\sigma \cap \phi) = (-1)^l(\partial\sigma \cap \phi)$ , so dass das Cap-Produkt eines Rands mit einem Kozykel auch wieder ein Rand ist. Dies liefert die Behauptung.  $\square$

BEMERKUNG 9.2.3. Wie für das Cup-Produkt gibt es auch relative Varianten des Cap-Produkts:

$$\begin{aligned} H_k^{\text{sing}}(X, A; R) \times H_{\text{sing}}^l(X, R) &\xrightarrow{\cap} H_{k-l}^{\text{sing}}(X, A; R) \\ H_k^{\text{sing}}(X, A; R) \times H_{\text{sing}}^l(X, A, R) &\xrightarrow{\cap} H_{k-l}^{\text{sing}}(X, R) \end{aligned}$$

LEMMA 9.2.4 (Projektionsformel). Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung topologischer Räume und  $R$  ein Ring. Für  $\alpha \in H_k^{\text{sing}}(X, R)$  und  $\phi \in H_{\text{sing}}^l(Y, R)$  gilt in  $H_{k-l}^{\text{sing}}(Y, R)$

$$f_*(\alpha) \cap \phi = f_*(\alpha \cap f^*(\phi)).$$

PROPOSITION 9.2.5. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Ring. Für  $\alpha \in C_{k+l}^{\text{sing}}(X, R)$ ,  $\phi \in C_{\text{sing}}^k(X, R)$  und  $\psi \in C_{\text{sing}}^l(X, R)$  gilt

$$\psi(\alpha \cap \phi) = (\phi \cup \psi)(\alpha).$$

Inbesondere haben wir ein kommutatives Diagramm, in dem die vertikalen Abbildungen die Projektionen aus dem universellen Koeffizienten-Satz 6.1.4 sind:

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{sing}}^l(X, R) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(H_l^{\text{sing}}(X, R), R) \\ \phi \cup - \downarrow & & \downarrow (-\cap \phi)^\vee \\ H_{\text{sing}}^{k+l}(X, R) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(H_{k+l}^{\text{sing}}(X, R), R) \end{array}$$

### 9.3. Kohomologie mit kompaktem Träger

BEMERKUNG 9.3.1. Für eine Teilmenge  $A \subset X$  benutzen wir die folgende Notation für die lokalen Kohomologiegruppen (bzw. Kohomologie mit Träger in  $A$ ):

$$H_A^i(X, R) := H_{\text{sing}}^i(X, X \setminus A, R).$$

DEFINITION 9.3.2. Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $R$  ein Koeffizientenring. Eine  $n$ -Kokette  $\phi \in C_n^{\text{sing}}(X, R)$  hat kompakten Träger, wenn es eine kompakte Menge  $K \subset X$  gibt, so dass  $\phi$  auf allen Ketten in  $X \setminus K$  verschwindet. Der Modul der  $n$ -Koketten mit kompaktem Träger wird mit  $C_{\text{s,sing}}^n(X, R)$  bezeichnet.

Da der Korand einer Kokette mit kompaktem Träger wieder kompakten Träger hat, bilden die  $C_{\text{c,sing}}^\bullet(X, R)$  einen Unterkomplex des singulären Kokettenkomplexes. Wir definieren die Kohomologie mit kompaktem Träger als

$$H_{\text{c,sing}}^i(X, R) := H^i(C_{\text{c,sing}}^\bullet(X, R)).$$

ÜBUNGSAUFGABE 9.3.3. Für eine Inklusion  $K \subset L$  kompakter Teilmengen in  $X$  haben wir eine Inklusion  $C^\bullet(X, X \setminus K; R) \hookrightarrow (X, X \setminus L; R)$  von Unterkomplexen in  $C_{\text{sing}}^\bullet(X; R)$ . Diese Inklusion induziert natürliche Homomorphismen  $H_K^i(X, R) \rightarrow H_L^i(X, R)$ . Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\text{colim}_K H_K^i(X, R) \rightarrow H_c^i(X, R)$$

ein Isomorphismus ist.

ÜBUNGSAUFGABE 9.3.4. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen heißt eigentlich, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind. Zeigen Sie, dass für eine eigentliche Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eine wohldefinierte Abbildung  $f^*: H_c^\bullet(Y, R) \rightarrow H_c^\bullet(X, R)$  auf der Kohomologie mit kompaktem Träger induziert wird. Damit erhalten wir einen Funktor auf der Kategorie der topologischen Räume mit eigentlichen Abbildungen.

ÜBUNGSAUFGABE 9.3.5. Zeigen Sie

$$H_c^i(\mathbb{R}^n, R) \cong \begin{cases} R & i = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

### 9.4. Poincaré-Dualität

Nach den Vorbereitungen können wir nun Poincaré-Dualität formulieren und beweisen. Zwei Ideen sind grundlegend.

- (1) Mannigfaltigkeiten sind lokal euklidisch, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe ist. Damit ist die Kohomologie mit Träger in einem Punkt

$$H_{\{x\}}^i(M, R) \cong \begin{cases} R & i = \dim M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

in einem einzigen Grad konzentriert. Insbesondere haben wir eine Identifikation  $H_{\{x\}}^k(M, R) \cong H_{n-k, \{x\}}(M, R)$ .

- (2) Mit einer Orientierung können diese lokalen Identifikationen zu einer globalen Dualitätsabbildung zwischen Kohomologie mit kompaktem Träger und Homologie der Mannigfaltigkeit zusammengeklebt werden.

DEFINITION 9.4.1. Sei  $M$  eine  $R$ -orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für eine kompakte Teilmenge  $K \subset M$  haben wir das Cap-Produkt

$$\cap: H_n(M, M \setminus K; R) \times H_K^k(M, R) \rightarrow H_{n-k}(M, R)$$

Für eine Inklusion  $K \subset L$  kompakter Teilmengen von  $M$  haben wir induzierte Abbildungen

$$\begin{aligned} i_*: H_n(M, M \setminus L; R) &\rightarrow H_n(M, M \setminus K; R) \\ i^*: H_K^k(M, R) &\rightarrow H_L^k(M, R) \end{aligned}$$

Für die Klassen  $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$  und  $\mu_L \in H_n(M, M \setminus L; R)$  gilt nach der Eindeutigkeit in Lemma 9.1.10  $i_*(\mu_L) = \mu_K$ . Mit der Projektionsformel aus Lemma 9.2.4 haben wir  $\mu_K \cap x = i_*(\mu_L) \cap x = \mu_L \cap i^*(x)$  für alle  $x \in H_K^k(M, R)$ .

Dadurch erhalten wir ein kompatibles System von Homomorphismen

$$H_K^k(M, R) \rightarrow H_{n-k}(M, R): x \mapsto \mu_K \cap x.$$

Durch Übergang zum Kolimes über alle kompakten Teilmengen  $K \subset M$  erhalten wir die Dualitätsabbildung

$$D_M: H_{c, \text{sing}}^k(M, R) \rightarrow H_{n-k}^{\text{sing}}(M, R)$$

SATZ 9.4.2 (Poincaré-Dualität). Sei  $M$  eine  $R$ -orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist die Dualitätsabbildung für alle  $k$  ein Isomorphismus:

$$D_M: H_{c, \text{sing}}^k(M, R) \rightarrow H_{n-k}^{\text{sing}}(M, R)$$

Als Spezialfall für kompakte Mannigfaltigkeiten erhalten wir die folgende Aussage:

SATZ 9.4.3 (Poincaré-Dualität). Sei  $M$  eine geschlossene  $R$ -orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse  $[M] \in H_n(M, R)$ . Dann ist die folgende Abbildung für alle  $k$  ein Isomorphismus

$$D: H_{\text{sing}}^k(M, R) \rightarrow H_{n-k}^{\text{sing}}(M, R): \alpha \mapsto D(\alpha) = [M] \cap \alpha.$$

Im Folgenden ist der Koeffizientenring immer  $R$ .

LEMMA 9.4.4. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, und  $U \subset V$  zwei offene Teilmengen mit  $U \cup V = M$ . Dann existiert ein bis auf Vorzeichen kommutatives Diagramm von Mayer-Vietoris-Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^k(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) & \longrightarrow & H_c^k(M) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow D & & \downarrow (D_U, -D_V) & & \downarrow D \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n-k}^{\text{sing}}(U \cap V) & \longrightarrow & H_{n-k}^{\text{sing}}(U) \oplus H_{n-k}^{\text{sing}}(V) & \longrightarrow & H_{n-k}^{\text{sing}}(M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

BEWEIS. Seien  $K \subset U$  und  $L \subset V$  kompakte Teilmengen. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathbf{H}_{K \cap L}^k(M) & \longrightarrow & \mathbf{H}_K^k(M) \oplus \mathbf{H}_L^k(M) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{K \cup L}^k(M) \longrightarrow \cdots \\
& & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \mu_{K \cup L} \cap - \\
& & \mathbf{H}_{K \cap L}^k(U \cap V) & & \mathbf{H}_K^k(U) \oplus \mathbf{H}_L^k(V) & & \\
& & \downarrow \mu_{K \cap L} \cap - & & \downarrow (\mu_K \cap -, -\mu_L \cap -) & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & \mathbf{H}_{n-k}(U \cap V) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{n-k}(U) \oplus \mathbf{H}_{n-k}(V) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{n-k}(M) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Die beiden horizontalen Isomorphismen folgen aus dem Ausschneidungssatz.

Wir zeigen, dass dieses Diagramm kommutiert. Die Behauptung folgt dann durch Übergang zum Kolimes dieser Diagramme über alle kompakten Teilmengen  $K \subset U$  bzw.  $L \subset V$ . Die Kommutativität der Quadrate, deren horizontale Abbildungen von den Inklusionen induziert sind, kann direkt nachgerechnet werden. Wir müssen nur die Kommutativität der Quadrate zeigen, deren horizontale Abbildungen Randabbildungen in den jeweiligen Mayer-Vietoris-Sequenzen sind.

Wir betrachten also das folgende Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{H}_{K \cup L}^k(M) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}_{K \cap L}^{k+1}(M) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}_{K \cap L}^{k+1}(U \cap V) \\
\downarrow \mu_{K \cup L} \cap - & & \downarrow \mu_{K \cap L} \cap - \\
\mathbf{H}_{n-k}^{\text{sing}}(M) & \xrightarrow{\partial} & \mathbf{H}_{n-k-1}^{\text{sing}}(U \cap V)
\end{array}$$

Die Randabbildung  $\delta: \mathbf{H}_{K \cup L}^k(M) \rightarrow \mathbf{H}_{K \cap L}^{k+1}(M)$  erhalten wir aus der kurzen exakten Sequenz von Kokettenkomplexen

$$0 \rightarrow C^\bullet(M, A + B) \rightarrow C^\bullet(M, A) \oplus C^\bullet(M, B) \rightarrow C^\bullet(M, A \cap B) \rightarrow 0,$$

wobei wir die Notation  $A = M \setminus K$  und  $B = M \setminus L$  benutzen.

Wir wollen für einen Kozykel  $\phi \in C^k(M, A \cap B)$  den Korand  $\delta\phi$  berechnen. Wir wählen Koketten  $\phi_A \in C^k(M, A)$  und  $\phi_B \in C^k(M, B)$  mit  $\phi = \phi_A - \phi_B$ . Wenden wir die Abbildung  $d^k: C^k(M, A) \oplus C^k(M, B) \rightarrow C^{k+1}(M, A) \oplus C^{k+1}(M, B)$  an, haben wir  $d^k\phi = d^k\phi_A - d^k\phi_B = 0$  weil  $\phi$  ein Kozykel ist. Damit ist  $d^k\phi_A = d^k\phi_B \in C^k(M, A + B)$  ein Repräsentant des Korands  $\delta\phi$ .

Da  $M = (U \setminus L) \cup (U \cap V) \cup (V \setminus K)$  können wir nach baryzentrischer Unterteilung die Klasse  $\mu_{K \cup L}$  durch eine Kette  $\alpha$  der Form  $\alpha = \alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V} + \alpha_{V \setminus K}$  repräsentieren. Die Klasse von  $\alpha_{U \cap V}$  ist dann gleich  $\mu_{K \cap L}$ , da die Ketten  $\alpha_{U \setminus L}$  und  $\alpha_{V \setminus K}$  in  $M \setminus K \cap L$  liegen und damit in  $\mathbf{H}_n^{\text{sing}}(M, M \setminus K \cap L) \cong \mathbf{H}_n^{\text{sing}}(U \cap V, U \cap V \setminus K \cap L)$  verschwinden. Analog ist die Klasse von  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$  gleich  $\mu_K$ .

Für die Kommutativität des Quadrats sei  $\phi \in \mathbf{H}_{K \cup L}^k(M)$  ein Kozykel. Wie eben diskutiert, ist der Korand  $\delta\phi$  durch  $d^k\phi_A$  gegeben. Um das Cap-Produkt mit  $\mu_{K \cap L}$  zu bestimmen benutzen wir für  $\mu_{K \cap L}$  den Repräsentanten  $\alpha_{U \cap V}$ . Dann ist  $\alpha_{U \cap V} \cap \phi_A$  eine Kette in  $U \cap V$  und mit

$$\partial(\alpha_{U \cap V} \cap \phi_A) = (-1)^k(\partial\alpha_{U \cap V} \cap \phi_A - \alpha_{U \cap V} \cap \delta\phi_A)$$

sehen wir, dass die Klassen von  $\alpha_{U \cap V} \cap \delta\phi_A$  und  $\partial\alpha_{U \cap V} \cap \phi_A$  in  $\mathbf{H}_{n-k-1}^{\text{sing}}(U \cap V)$  übereinstimmen.

Um  $\partial(\mu_{K \cup L} \cap \phi)$  zu berechnen, benutzen wir die Repräsentanten  $\alpha$  für  $\mu_{K \cup L}$  und die oben diskutierte Zerlegung von  $\alpha$  liefert

$$\alpha \cap \phi = \alpha_{U \setminus L} \cap \phi + \alpha_{U \cap V} \cap \phi + \alpha_{V \setminus K} \cap \phi.$$

Für den Rand des ersten Summanden haben wir

$$\begin{aligned}\partial(\alpha_{U \setminus L} \cap \phi) &= (-1)^k \partial \alpha_{U \setminus L} \cap \phi \\ &= (-1)^k \partial \alpha_{U \setminus L} \cap \phi_A \\ &= (-1)^{k+1} \partial \alpha_{U \cap V} \cap \phi_A.\end{aligned}$$

Im ersten Schritt benutzen wir, dass  $\phi$  ein Kozykel ist, im zweiten Schritt benutzen wir dass  $\partial \alpha_{U \cap L} \cap \phi_B = 0$  da  $\phi_B$  auf Ketten in  $M \setminus L$  gleich 0 ist. Im letzten Schritt benutzen wir  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}) \cap \phi_A = 0$ , da  $\partial(\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V})$  eine Kette in  $U \setminus K$  ist (wie weiter oben diskutiert repräsentiert  $\alpha_{U \setminus L} + \alpha_{U \cap V}$  die Klasse  $\mu_K$ ) und  $\phi_A$  verschwindet auf Ketten in  $M \setminus K$ .

Bis auf Vorzeichen erhalten wir also das gleiche Ergebnis, d.h. das Quadrat kommutiert bis auf Vorzeichen.  $\square$

BEWEIS. Wenn für offene Teilmengen  $U, V \subset M$  mit  $U \cup V = M$  die Dualitätsabbildungen  $D_U, D_V$  und  $D_{U \cap V}$  Isomorphismen sind, dann folgt mit dem 5-Lemma A.2.7 und Lemma 9.4.4, dass auch  $D_M$  ein Isomorphismus ist.

Wenn  $M$  Vereinigung einer Kette  $U_1 \subset U_2 \subset \dots$  von offenen Mengen ist, so dass für alle  $i$  die Dualitätsabbildung  $D_{U_i}: H_{c, \text{sing}}^k(U_i) \rightarrow H_{n-k}^{\text{sing}}(U_i)$  ein Isomorphismus ist, dann ist auch  $D_M$  ein Isomorphismus. Mit Ausschneidung können wir  $H_{c, \text{sing}}^k(U_i) = \lim_K H_K^k(M)$  schreiben, wobei  $K$  die kompakten Teilmengen von  $U_i$  durchläuft. Dann haben wir natürliche induzierte Abbildungen  $H_{c, \text{sing}}^k(U_i) \rightarrow H_{c, \text{sing}}^k(U_{i+1})$  und erhalten einen Isomorphismus

$$\text{colim}_i H_{c, \text{sing}}^k(U_i) \cong H_{c, \text{sing}}^k(M),$$

da jede kompakte Teilmenge von  $M$  in einer der Teilmengen  $U_i$  enthalten sein muss. Aus Übungsaufgabe 5.2.16 erhalten wir  $H_{n-k}^{\text{sing}}(M) \cong \text{colim}_i H_{n-k}^{\text{sing}}(U_i)$ , damit ist  $D_M$  der Kolimes der Isomorphismen  $D_{U_i}$ , das liefert die Behauptung.

(1) Im Fall  $M = \mathbb{R}^n$  betrachten wir  $M$  als Inneres von  $\Delta^n$  und identifizieren die Dualitätsabbildung als  $[\Delta^n] \cap -: H_{\text{sing}}^k(\Delta^n, \partial \Delta^n) \rightarrow H_{n-k}^{\text{sing}}(\Delta^n)$ . Für  $k = n$  ist ein Erzeuger von  $H_{\text{sing}}^n(\Delta^n, \partial \Delta^n; R) \cong \text{Hom}_R(H_n(\Delta^n, \partial \Delta^n), R)$  durch einen Kozykel repräsentiert, der auf  $\Delta^n$  den Wert 1 annimmt. Das Cap-Produkt  $\Delta^n \cap \phi$  ist dann der letzte Eckpunkt von  $\Delta^n$ , ein Erzeuger von  $H_0^{\text{sing}}(\Delta^n, R)$ .

(2) Eine beliebige offene Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  kann als aufsteigende Vereinigung von endlichen Vereinigungen beschränkter konvexer offener Teilmengen geschrieben werden. Aus den beiden Vorüberlegungen (zu Poincaré-Dualität für endliche Vereinigungen und aufsteigende Ketten) folgt dann die Behauptung.

(3) Analog folgt der Fall einer Mannigfaltigkeit, die höchstens abzählbar unendliche Vereinigung offener Teilmengen ist. Im allgemeinen Fall müssen wir zusätzlich noch einmal das Lemma von Zorn bemühen.  $\square$

## 9.5. Anwendungen

PROPOSITION 9.5.1. *Für eine geschlossene ungerade-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  gilt  $\chi(M) = 0$ .*

BEWEIS. Wir benutzen Übungsaufgabe A.4.23, um die Euler-Charakteristik als

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{F}_2)$$

zu identifizieren. Da jede Mannigfaltigkeit  $\mathbb{F}_2$ -orientierbar ist, haben wir mit dem universellen Koeffizienten-Satz 6.1.4 und Poincaré-Dualität 9.4.3

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H_{n-i}(M, \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} H^{n-i}(M, \mathbb{F}_2) = \dim_{\mathbb{F}_2} H_i(M, \mathbb{F}_2).$$

Wenn  $n$  ungerade ist, haben wir durch diese Symmetrie

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{F}_2) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \left( (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_2} H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{F}_2) + (-1)^{n-i} \dim_{\mathbb{F}_2} H_{n-i}^{\text{sing}}(M, \mathbb{F}_2) \right) = 0\end{aligned}$$

□

**KOROLLAR 9.5.2.** *Sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist  $\chi(\partial M) \equiv 0 \pmod{2}$ .*

**BEWEIS.** Wir verkleben zwei Kopien von  $M$  entlang des Randes und erhalten eine geschlossene Mannigfaltigkeit  $M \cup_{\partial M} M$ . Mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip für die Euler-Charakteristik, s. Proposition 3.5.6, haben wir

$$\chi(M \cup_{\partial M} M) = 2\chi(M) - \chi(\partial M).$$

Wenn  $\dim M$  ungerade ist, dann ist  $\dim M \cup_{\partial M} M$  ungerade, d.h. mit Proposition 9.5.1 gilt  $\chi(M \cup_{\partial M} M) = 0$ . Daraus folgt  $\chi(\partial M) = 2\chi(M)$ . Falls  $\dim M$  gerade ist, dann ist  $\dim \partial M$  ungerade, und mit Proposition 9.5.1 erhalten wir wieder  $\chi(\partial M) \equiv 0 \pmod{2}$ . □

**BEISPIEL 9.5.3.** *Damit haben wir eine einfache notwendige Bedingung an Randmannigfaltigkeiten. Insbesondere sind die gerade-dimensionale projektive Räume  $\mathbb{R}P^{2n}$  und  $\mathbb{C}P^{2n}$  nicht Rand einer anderen Mannigfaltigkeit.* □

Poincaré-Dualität hat auch Konsequenzen für das Cup-Produkt.

**DEFINITION 9.5.4.** *Für eine geschlossene  $R$ -orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Fundamentalklasse  $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, R)$  definieren wir eine bilineare Paarung*

$$\cup: H_{\text{sing}}^k(M, R) \times H_{\text{sing}}^{n-k}(M, R) \rightarrow R: (\phi, \psi) \mapsto (\phi \cup \psi)[M].$$

**BEMERKUNG 9.5.5.** *Dual zur Cup-Produkt-Paarung gibt es das Schnittprodukt*

$$\cap: H_k^{\text{sing}}(M, R) \times H_{n-k}^{\text{sing}}(M, R) \rightarrow R.$$

**PROPOSITION 9.5.6.** *Sei  $M$  eine geschlossene orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. In den folgenden Fällen ist die Cup-Produkt-Paarung nicht-ausgeartet*

- *Der Koeffizientenring  $R$  ist ein Körper.*
- *Der Koeffizientenring ist  $R = \mathbb{Z}$ , und wir betrachten die Cup-Produkt-Paarung auf  $H_{\text{sing}}^{\bullet}(M, \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ .*

**BEWEIS.** Wir betrachten die Komposition

$$H_{\text{sing}}^{n-k}(M, R) \xrightarrow{h} \text{Hom}_R(H_{n-k}(M, R), R) \xrightarrow{D^\vee} \text{Hom}_R(H^k(M, R), R)$$

wobei die Abbildung  $h$  die Projektion aus dem universellen Koeffizienten-Satz 6.1.4 ist, und  $D^\vee$  die zur Poincaré-Dualitäts-Abbildung  $D$  aus Definition 9.4.1 duale Abbildung. Die Komposition ist gegeben durch

$$\psi \in H_{\text{sing}}^{n-k}(M, R) \mapsto (\phi \in H^k(M, R) \mapsto \psi([M] \cap \phi) = (\phi \cup \psi)[M])$$

Nach dem universellen Koeffizientensatz 6.1.4 ist  $h$  unter den Voraussetzungen ein Isomorphismus, und nach Poincaré-Dualität ist  $D$  ein Isomorphismus. Damit haben, dass die Paarung in der ersten Variablen nicht-ausgeartet ist, die Behauptung für die zweite Variable folgt aus der graduierten Kommutativität des Cup-Produkts. □

KOROLLAR 9.5.7. Sei  $M$  eine geschlossene  $\mathbb{Z}$ -orientierbare  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für  $n \equiv 0 \pmod{2}$  erhalten wir eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf  $H_{\text{sing}}^{\frac{n}{2}}(M, \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ . Diese Bilinearform ist symmetrisch für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  und alternierend für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

PROPOSITION 9.5.8. Sei  $M$  eine geschlossene  $\mathbb{Z}$ -orientierbare Mannigfaltigkeit mit  $\dim M \equiv 2 \pmod{4}$ . Dann ist  $\chi(M) \equiv 0 \pmod{2}$ .

BEWEIS. Wir bezeichnen mit  $n = 2k$  die Dimension von  $M$ . Wie in Proposition 9.5.1 benutzen wir wieder Poincaré-Dualität und universellen Koeffizientensatz, um

$$\text{rk } H_{n-i}(M, \mathbb{Z}) = \text{rk } H^{n-i}(M, \mathbb{Z}) = \text{rk } H_i(M, \mathbb{Z})$$

zu identifizieren. Da  $n$  gerade und  $k$  ungerade ist, haben wir

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_i (-1)^i \text{rk } H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) \\ &= -\text{rk } H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \left( (-1)^i \text{rk } H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) + (-1)^{n-i} \text{rk } H_{n-i}^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) \right) \\ &= -\text{rk } H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) + 2 \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \text{rk } H_i^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Das bedeutet insbesondere  $\chi(M) \equiv \text{rk } H_k^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) \pmod{2}$ .

Auf  $H^k(M, \mathbb{R})$  erhalten wir dann mit der Cup-Produkt-Paarung eine nicht-ausgeartete symplektische Form. Der Satz von Darboux (Lineare Algebra II) besagt, dass eine solche nicht-ausgeartete symplektische Form nur existieren kann, wenn

$$\dim_{\mathbb{R}} H^k(M, \mathbb{R}) = \text{rk } H^k(M, \mathbb{Z}) \equiv 0 \pmod{2}.$$

□

BEMERKUNG 9.5.9. Für  $4k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten erhalten wir durch die Cup-Produkt-Form auf  $H^{2k}(M, \mathbb{Z})$  (bzw. dual dazu durch die Schnitt-Form auf  $H_{2k}(M, \mathbb{Z})$ ) eine sehr interessante Invariante. Zum Beispiel können wir nach der Signatur der entsprechenden symmetrischen Bilinearform fragen. Diese spielt in verschiedenen Sätzen der Differentialtopologie (z.B. dem Signatursatz von Hirzebruch) eine wichtige Rolle.

## 9.6. Glatte Mannigfaltigkeiten: Integration und De-Rham-Kohomologie

### 9.7. Satz von de Rham

anderer Beweis Poincaré-Dualität (mit rationalen Koeffizienten) über de Rham-Kohomologie durch Integration



## Grundlagen: Kategorientheorie und homologische Algebra

### A.1. Kategorien und Funktoren

DEFINITION A.1.1. Eine Kategorie  $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{Hom}_{\mathbf{C}}, \circ)$  ist ein Tupel, wobei

- $\text{Obj}(\mathbf{C})$  eine Ansammlung von Objekten ist,
- $(A, B) \in \text{Obj}(\mathbf{C}) \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  je zwei Objekten die Morphismen von  $A$  nach  $B$  zuordnet, und
- $\circ: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, C): (f, g) \mapsto g \circ f$  eine Kompositionsvorschrift ist, die einem Paar von Morphismen ihre Zusammensetzung zuordnet,

so dass gilt:

- (1) Es gibt einen Identitätsmorphismus  $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, A)$  für jedes Objekt  $A \in \mathbf{C}$ , so dass für alle  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  und alle  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$  gilt

$$f \circ \text{id}_A = f, \quad \text{id}_A \circ g = g.$$

- (2) Die Komposition  $\circ$  ist assoziativ.

BEMERKUNG A.1.2. Die Objekte  $\text{Obj}(\mathbf{C})$  bilden nicht notwendigerweise eine Menge. Man kann also auch von der Kategorie der Mengen sprechen.

In der Notation wird oft  $\text{Obj}(\mathbf{C})$  mit  $\mathbf{C}$  verwechselt. Für  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  kann auch  $\mathbf{C}(A, B)$  geschrieben werden.

BEISPIEL A.1.3.

- **Set**, die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen
- **Grp**, die Kategorie der Gruppen mit Gruppenhomomorphismen
- **Vect<sub>K</sub>**, die Kategorie der  $K$ -Vektorräume mit  $K$ -linearen Abbildungen
- **Top**, die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen. Modifikationen:
  - **Top<sub>•</sub>**, die Kategorie der punktierten topologischen Räume mit punktierten Abbildungen
  - **Top<sup>2</sup>**, die Kategorie der Raumpaare  $(X, A)$  mit  $A \subset X$ .
- **Man**, die Kategorie der Mannigfaltigkeiten mit glatten Abbildungen.
- Für eine Kategorie  $\mathbf{C}$  haben wir die Kategorie  $\mathbf{C}^{\text{op}}$ , bei der einfach die Richtungen der Pfeile vertauscht werden:  $\mathbf{C}^{\text{op}}(A, B) = \mathbf{C}(B, A)$ .
- **$\Delta$** , die simpliziale Kategorie (endliche Ordinalzahlen mit monotonen Abbildungen)
- **Ch(Mod- $R$ )**, die Kategorie der Kettenkomplexe von Rechts- $R$ -Moduln.
- Wir können eine Gruppe  $G$  als Kategorie mit einem Objekt  $*$  und  $\text{Hom}_G(*, *) = G$  auffassen. Die Komposition von Morphismen ist dann durch die Multiplikation von Elementen in  $G$  gegeben.

□

DEFINITION A.1.4. Sei  $\mathbf{C}$  eine Kategorie. Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  heißt

- Monomorphismus, wenn für je zwei Morphismen  $g_1, g_2: Z \rightarrow X$  aus  $f \circ g_1 = f \circ g_2$  schon  $g_1 = g_2$  folgt,
- Epimorphismus, wenn für je zwei Morphismen  $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$  aus  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  schon  $g_1 = g_2$  folgt,
- Isomorphismus, wenn es eine Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $f \circ g = \text{id}_Y$  und  $g \circ f = \text{id}_X$  gilt.

DEFINITION A.1.5. Eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind, heißt Gruppoid.

DEFINITION A.1.6. Ein Funktor  $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  besteht aus einer Zuordnung

$$F: \text{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{D})$$

und Abbildungen

$$F: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B))$$

für alle  $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ , so dass gilt

- (1)  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$  für alle  $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ , und
- (2)  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  für alle  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$  und  $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, C)$ .

BEMERKUNG A.1.7. Solche Funktoren heißen kovariant. Funktoren  $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$  heißen kontravariante Funktoren (da die Richtungen der Pfeile umgedreht werden).

BEISPIEL A.1.8. • für Vektorräume: Dualraum, symmetrische Potenz, äußere Potenz von Vektorräumen sind Endofunktoren von  $\mathbf{Vect}_K$ . Tensorprodukt ist ein Funktor  $\mathbf{Vect}_K \times \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ .

- Derivationen  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R})$  von  $\mathbb{R}$ -Algebren sind ein kontravarianter Funktor  $\mathbf{Alg}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ .
- für Mannigfaltigkeiten: Tangentialraum an einem gewählten Punkt ist ein Funktor  $\mathbf{Man}_{\bullet} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$  von der Kategorie der punktierten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der Vektorräume. Tangentialbündel ist ein Endofunktor der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten. Glatte Abbildungen liefern einen kontravarianter Funktor von Mannigfaltigkeiten in  $\mathbb{R}$ -Algebren:

$$\mathbf{Man}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{R}}: M \mapsto C^{\infty}(M).$$

- Eine simpliziale Menge ist ein Funktor  $\mathbf{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ . Allgemeiner kann man simpliziale Objekte in anderen Kategorien betrachten.
- Homologie ist ein Funktor  $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$  von topologischen Räumen in  $\mathbb{Z}$ -graduierte abelsche Gruppen.

□

DEFINITION A.1.9 (natürliche Transformationen). Seien  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  zwei Kategorien. Eine natürliche Transformation  $\alpha: F \Rightarrow G$  zwischen zwei Funktoren  $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$  ordnet jedem Objekt  $X \in \mathbf{C}$  einen Morphismus  $\alpha_X: F(X) \rightarrow G(X)$  in  $\mathbf{D}$  zu, so dass für alle Morphismen  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathbf{C}$  das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \alpha_X \downarrow & & \downarrow \alpha_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

BEMERKUNG A.1.10. Für zwei Kategorien  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  haben wir eine Funktorkategorie  $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ , deren Objekte Funktoren und deren Morphismen natürliche Transformationen sind. Ein natürlicher Isomorphismus zwischen Funktoren ist ein Isomorphismus in der Funktorkategorie.

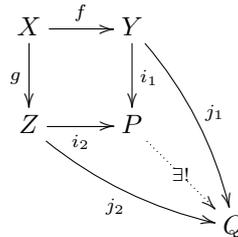
BEISPIEL A.1.11. • Die Identifikation von  $T_p M$  und  $\text{Der}_{\mathbb{R}}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$  ist ein Beispiel für eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren  $\mathbf{Man}_\bullet \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ . □

adjungierte Funktoren und universelle Eigenschaften: Beispiele Produkte, Quotienten, Kern

DEFINITION A.1.12. Sei  $\mathbf{C}$  eine Kategorie. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z.$$

Ein Kolimit für dieses Diagramm (auch Pushout genannt) ist ein Objekt  $P$  mit zwei Morphismen  $i_1: Y \rightarrow P$  und  $i_2: Z \rightarrow P$ , so dass für jedes andere Objekt  $Q$  und Morphismen  $j_1: Y \rightarrow Q$  und  $j_2: Z \rightarrow Q$  mit  $j_1 \circ f = j_2 \circ g$  ein eindeutiger Morphismus  $P \rightarrow Q$  existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:



BEISPIEL A.1.13. • Die einfachsten Beispiele von Pushouts topologischer Räume sind die disjunkte Vereinigung ( $X = \emptyset$ ) und die Wedge-Summe ( $X = \text{pt}$ ). Allgemein ist der Pushout von topologischen Räumen in der obigen Situation durch

$$(Y \sqcup Z) / \{f(x) \sim g(x) \mid x \in X\}$$

gegeben. Das Ankleben einer  $n$ -Zelle an  $X$  ist ein Pushout für ein Diagramm der Form

$$D^n \hookrightarrow \partial D^n = S^{n-1} \xrightarrow{\phi} X.$$

- In der Kategorie der Gruppen heißen Pushouts Amalgame/amalgamierte Summen.
- Tensorprodukte sind die Pushouts in der Kategorie der kommutativen Ringe. □

## A.2. Exakte Sequenzen

Im folgenden diskutieren wir grundlegende Eigenschaften exakter Sequenzen. Alle Aussagen gelten für (Links- oder Rechts-)Moduln über einem Ring  $R$  mit 1. Für die Vorlesung brauchen wir aber eigentlich nur die Fälle, in denen  $R$  ein Körper oder (ein Quotient von)  $\mathbb{Z}$  ist.

DEFINITION A.2.1 (exakte Sequenz). (1) Eine Sequenz  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  heißt exakt an der Stelle  $B$ , wenn  $\ker(g) = \text{Im}(f)$ .

(2) Eine kurze exakte Sequenz ist eine Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

die an allen Stellen exakt ist. Dies bedeutet insbesondere, dass  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.2.2. Welche abelschen Gruppen  $A$  passen in eine kurze exakte Sequenz der folgenden Form?

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

LEMMA A.2.3 (spaltende exakte Sequenzen). Für eine kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

von  $R$ -Moduln sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $r: C \rightarrow B$  mit  $p \circ r = \text{id}_C$ .
- (2) Es existiert ein  $R$ -Modulhomomorphismus  $s: B \rightarrow A$  mit  $s \circ i = \text{id}_A$ .

BEWEIS. Für die Implikation (2)  $\Rightarrow$  (1) sei  $s: B \rightarrow A$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus mit  $s \circ i = \text{id}_A$ . Wir definieren

$$\tilde{r}: B \rightarrow B: b \mapsto b - i \circ s(b).$$

Dann gilt  $\ker p \subset \ker \tilde{r}$ : Für ein  $b \in \ker p$  existiert  $a \in A$  mit  $i(a) = b$ , also  $\tilde{r}(b) = i(a) - i(s(i(a))) = i(a) - i(a) = 0$ . Nach dem Homomorphiesatz induziert  $\tilde{r}$  einen Homomorphismus  $r: C \cong B/\ker p \rightarrow B$ , der nach Konstruktion  $p \circ r = \text{id}_C$  erfüllt.

Die andere Implikation folgt analog. □

BEMERKUNG A.2.4. In diesem Fall sind  $A \oplus C \rightarrow B: (a, c) \mapsto i(a) + r(c)$  und  $B \rightarrow A \oplus C: b \mapsto (s(b), p(c))$  Isomorphismen, und die Sequenz heißt spaltend.

ÜBUNGSAUFGABE A.2.5. Jede kurze exakte Sequenz von endlich-dimensionalen Vektorräumen über einem Körper spaltet.

ÜBUNGSAUFGABE A.2.6. Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine spaltende kurze exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Dann ist die duale Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, R) \rightarrow \text{Hom}_R(B, R) \rightarrow \text{Hom}_R(A, R) \rightarrow 0$$

eine spaltende kurze exakte Sequenz.

LEMMA A.2.7 (5-Lemma). Wir betrachten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ f_A \downarrow & & f_B \downarrow & & f_C \downarrow & & f_D \downarrow & & f_E \downarrow \\ A' & \xrightarrow{a'} & A' & \xrightarrow{b'} & C' & \xrightarrow{c'} & D' & \xrightarrow{d'} & E' \end{array}$$

- (1) Wenn  $f_B$  und  $f_D$  injektiv sind und  $f_A$  surjektiv, dann ist  $f_C$  injektiv.
- (2) Wenn  $f_B$  und  $f_D$  surjektiv sind und  $f_E$  injektiv, dann ist  $f_C$  surjektiv.

BEWEIS. (2) Diagrammjagd: Wir wollen zeigen, dass  $f_C$  surjektiv ist. Sei  $x \in C'$ . Da  $f_D$  surjektiv ist, existiert  $y \in D$  mit  $f_D(y) = c'(x)$ . Wegen der Kommutativität des letzten Quadrats ist  $f_E(d(y)) = d'(c'(x))$ . Wegen der Exaktheit der unteren Zeile ist  $d'(c'(x)) = 0$ . Wegen Injektivität von  $f_E$  ist  $d(y) = 0$ . Es existiert also ein  $z \in C$  mit  $c(z) = y$ . Wegen der Kommutativität des dritten Quadrats ist  $c'(f_C(z)) = f_D(c(z)) = f_D(y) = c'(x)$ . Insbesondere ist  $x - f_C(z) \in \ker c'$ , und es reicht zu zeigen, dass  $x - f_C(z)$  im Bild von  $f_C$  liegt.

Da  $x - f_C(z) \in \ker c'$  ist, existiert ein  $u \in B'$  mit  $b'(u) = x - f_C(z)$ . Wegen Surjektivität von  $f_B$  existiert  $v \in B$  mit  $f_B(v) = u$ . Dann gilt  $f_C(b(v)) = b'(f_B(v)) = b'(u) = x - f_C(z)$ , und das gewünschte Urbild von  $x - f_C(z)$  ist  $b(v)$ .  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.2.8 (Schlangenlemma). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccc} A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}(f) \rightarrow \operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h),$$

wobei  $\partial(x) \in \ker h$  das eindeutige Urbild von  $g(y)$  für ein gewähltes  $y \in B'$  mit  $p(y) = x$  ist. Wenn  $A' \rightarrow B'$  injektiv ist, dann auch  $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$ . Wenn  $B \rightarrow C$  surjektiv ist, dann auch  $\operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h)$ .

ÜBUNGSAUFGABE A.2.9 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz). *Wir betrachten ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen*

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \xrightarrow{c_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{a_k} & B_k & \xrightarrow{b_k} & C_k & \xrightarrow{c_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{a_{k-1}} & \cdots \\ & & f_{A,k} \downarrow & & f_{B,k} \downarrow & & f_{C,k} \downarrow & & f_{A,k-1} \downarrow & & \\ \cdots & \xrightarrow{c'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{a'_k} & B'_k & \xrightarrow{b'_k} & C'_k & \xrightarrow{c'_k} & A'_{k-1} & \xrightarrow{a'_{k-1}} & \cdots \end{array}$$

Sei  $f_{C,k}: C_k \rightarrow C'_k$  ein Isomorphismus. Wir definieren  $\Delta_k: B'_k \rightarrow A_{k-1}$  als  $\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k$ . Dann ist die folgende Sequenz exakt:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k}, -a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k + f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \rightarrow \cdots$$

BEMERKUNG A.2.10. *Perspektive evtl. abelsche und exakte Kategorien*

### A.3. Homologische Algebra

DEFINITION A.3.1. *Sei  $R$  ein Ring. Ein algebraischer Kettenkomplex*

$$\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

von  $R$ -Moduln besteht aus einer Sequenz  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , von  $R$ -Moduln und  $R$ -Modulhomomorphismen  $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ , den Randabbildungen, so dass  $d_n \circ d_{n+1} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt.

Ein Homomorphismus  $f_\bullet: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$  von Kettenkomplexen von  $R$ -Moduln besteht aus einer Sequenz  $f_n: C_n \rightarrow C'_n$  von  $R$ -Modulhomomorphismen, so dass für alle  $n$  das entsprechende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & C'_n \\ d_n \downarrow & & \downarrow d'_n \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C'_{n-1} \end{array}$$

Für einen Ring  $R$  bilden die Kettenkomplexe von  $R$ -Moduln mit Homomorphismen von Komplexen eine Kategorie, die mit  $\mathbf{Ch}(R\text{-mod})$  bezeichnet wird.

DEFINITION A.3.2. Für einen Kettenkomplex  $(C_\bullet, d)$  definieren wir die Homologie

$$H_n(C_\bullet, d) := \frac{\ker(d_n: C_n \rightarrow C_{n-1})}{\operatorname{Im}(d_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n)}.$$

Für einen Homomorphismus  $f_\bullet: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$  von Kettenkomplexen erhalten wir induzierte Abbildungen

$$f_*: H_n(C_\bullet, d) \rightarrow H_n(C'_\bullet, d').$$

ÜBUNGSAUFGABE A.3.3. Zeigen Sie, dass Definition A.3.2 einen Funktor

$$H_n: \mathbf{Ch}(R\text{-mod}) \rightarrow R\text{-mod}$$

definiert.

DEFINITION A.3.4. Sei  $R$  ein Ring. Ein Kokettenkomplex  $(C^\bullet, d)$

$$\dots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C^n \xrightarrow{d_n} C^{n+1} \rightarrow \dots$$

von  $R$ -Moduln besteht aus einer Sequenz von  $R$ -Moduln  $C^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , und  $R$ -Modulhomomorphismen  $d_n: C^n \rightarrow C^{n+1}$ , so dass  $d_n \circ d_{n-1} = 0$  gilt. Die Abbildungen  $d$  heißen auch Korandabbildungen. Die Kohomologiegruppen eines Kokettenkomplexes  $(C^\bullet, d)$  sind definiert durch

$$H^\bullet(C^\bullet, d) := \frac{\ker(d_n: C^n \rightarrow C^{n+1})}{\operatorname{Im}(d_{n-1}: C^{n-1} \rightarrow C^n)}.$$

Elemente in  $\ker d_n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  heißen auch Kozykel.

Analog zu Definition A.3.1 und A.3.2 haben wir den Begriff von Homomorphismen von Kokettenkomplex und auf der Kohomologie induzierten Abbildungen.

BEISPIEL A.3.5. Sei  $R$  ein Ring und  $(C_\bullet, \partial)$  ein Kettenkomplex von  $R$ -Moduln. Der duale Kettenkomplex hat als Einträge  $C^n := \operatorname{Hom}_R(C_n, R)$  die zu  $C_n$  dualen  $R$ -Moduln, und die Korandabbildungen  $d_n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  sind die zu den Randabbildungen  $\partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$  dualen Abbildungen

$$d_n: \operatorname{Hom}_R(C_n, R) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(C_{n+1}, R) : (f: C_n \rightarrow R) \mapsto f \circ \partial_{n+1}.$$

Hier folgt  $d_n \circ d_{n-1} = 0$  direkt aus der Definition und  $\partial^2 = 0$ . □

BEMERKUNG A.3.6. Es gibt eigentlich keinen wesentlichen Unterschied zwischen den Definition von Kettenkomplex A.3.1 und Kokettenkomplex A.3.4, insbesondere wenn wir als Indexmenge  $\mathbb{Z}$  zulassen. Die Unterschiede sind eigentlich nur im Grad des Differentials  $d$ : für Kettenkomplex hat das Differential Grad  $-1$  und wir sprechen von "homologischer Graduierung"; für Kokettenkomplexe hat das Differential Grad  $+1$  und wir sprechen von "kohomologischer Graduierung".

DEFINITION A.3.7. Ein Homomorphismus  $f: (C_\bullet, d) \rightarrow (D_\bullet, d')$  von Kettenkomplexen heißt Quasi-Isomorphismus, wenn die auf Homologie induzierten Homomorphismen  $f_*: H_n(C_\bullet, d) \rightarrow H_n(D_\bullet, d')$  für alle  $n$  Isomorphismen sind.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.8. Geben Sie zwei Komplex  $C_\bullet$  und  $D_\bullet$  an, so dass ein Quasi-Isomorphismus  $f: C_\bullet \rightarrow D_\bullet$  existiert, aber kein Quasi-Isomorphismus  $g: D_\bullet \rightarrow C_\bullet$  existiert.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.9. Sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie, dass jeder Kettenkomplex  $(C_\bullet, d)$  von  $K$ -Vektorräumen quasi-isomorph zum Komplex seiner Homologiegruppen  $(H_\bullet(C_\bullet), 0)$  mit trivialem Differential ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.10. Seien  $C_\alpha^\bullet$ ,  $\alpha \in I$  Kokettenkomplexe für eine beliebige Indexmenge. Zeigen Sie, dass Kohomologie mit direkten Produkten vertauscht, d.h.

$$H^\bullet\left(\prod_{\alpha \in I} C_\alpha^\bullet\right) \cong \prod_{\alpha \in I} H^\bullet(C_\alpha^\bullet).$$

DEFINITION A.3.11. Sei  $0 \rightarrow (A_\bullet, d_A) \rightarrow (B_\bullet, d_B) \rightarrow (C_\bullet, d_C) \rightarrow 0$  eine Sequenz von Homomorphismen von Kettenkomplexen von  $R$ -Moduln. Die Sequenz heißt exakt, wenn für jedes  $n$  die entsprechende Sequenz  $0 \rightarrow A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.12. Kern und Bild für Kettenkomplexe und übliche Formeln

PROPOSITION A.3.13. Sei  $0 \rightarrow (A_\bullet, d_A) \xrightarrow{f} (B_\bullet, d_B) \xrightarrow{g} (C_\bullet, d_C) \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann gibt es eine lange exakte Homologie-Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet, d_A) \xrightarrow{f_*} H_n(B_\bullet, d_B) \xrightarrow{g_*} H_n(C_\bullet, d_C) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

Die Randabbildung ist natürlich für Morphismen von kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen.

BEWEIS. Die Abbildungen  $f_*$  und  $g_*$  sind die von  $f$  bzw.  $g$  induzierten Abbildungen auf der Homologie.

Für die Beschreibung der Randabbildung  $\partial_{n+1}: H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \rightarrow H_n(A_\bullet, d_A)$  betrachten wir die Abbildung  $\partial: \ker d_C \rightarrow \operatorname{coker} d_A$  aus Lemma A.2.8 für das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & d_A \downarrow & & d_B \downarrow & & d_C \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Für  $c \in \ker d_{C,n}$  ist  $\partial c \in \ker d_{A,n-1}$ , da die Abbildung  $f_{n-2}: A_{n-2} \rightarrow B_{n-2}$  injektiv ist und die Komposition  $B_n \xrightarrow{d_B} B_{n-1} \xrightarrow{d_B} B_{n-2}$  die Nullabbildung ist. Für  $c \in \operatorname{Im} d_{C,n+1}$  können wir ein Urbild  $b \in B_{n+1}$  wählen, dann ist  $d_B(b)$  ein Lift für  $c \in C_n$ . Dann ist  $d_B^2(b) = 0$ , also  $\partial(c) = 0$ . Insbesondere induziert die Randabbildung  $\partial: \ker d_C \rightarrow \operatorname{coker} d_A$  eine wohldefinierte Abbildung  $\partial_{n+1}: H_{n+1}(C_\bullet, d_C) \rightarrow H_n(A_\bullet, d_A)$ .

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle  $H_n(A_\bullet, d_A)$ . Zuerst sehen wir, dass  $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \subseteq \ker f_*$ : um  $f_* \circ \partial(c)$  zu berechnen, wählen wir  $b \in B_{n+1}$  mit  $g(b) = c$ . Dann ist  $f_* \circ \partial(c) = d_B(b)$ , dies liegt im Bild von  $d_B$ , hat also triviale Homologiekategorie. Für die umgekehrte Inklusion  $\ker f_* \subseteq \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$  betrachten wir  $a \in \ker d_A \subseteq A_n$  mit  $f(a) = d_B(b)$  für ein  $b \in B_{n+1}$ . Dann ist  $d_C(g(b)) = g(d_B(b)) = g(f(a)) = 0$ , und nach Definition der Randabbildung ist  $\partial_{n+1}(g(b)) = a$ .

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle  $H_n(B_\bullet, d_B)$ . Wir sehen direkt, dass  $g_* \circ f_* = 0$ , da wir eine exakte Sequenz von Komplexen haben. Für die andere Richtung sei  $b \in B_n$  ein Repräsentant einer Homologiekategorie in  $\ker g_*$ , d.h., es existiert ein  $c \in C_{n+1}$  mit  $d_C(c) = g(b)$ . Da  $g_{n+1}: B_{n+1} \rightarrow C_{n+1}$  surjektiv ist, existiert ein Lift  $\tilde{b} \in B_{n+1}$  von  $c$ . Es gilt  $g_n(b - d_B(\tilde{b})) = g_n(b) - g_n(d_B(\tilde{b})) = g_n(b) - d_C(g_n(\tilde{b})) = g_n(b) - d_C(c) = 0$ . Damit ist  $b - d_B(\tilde{b}) = f(a)$  für ein  $a \in A_n$ . Es gilt  $f(d_A(a)) = d_B(f(a)) = d_B(b - d_B(\tilde{b})) = d_B(b) = 0$ , also ist  $d_A(a) = 0$ . Die Homologiekategorie von  $a$  ist das gesuchte Urbild der Homologiekategorie von  $b$ .

Wir beweisen die Exaktheit an der Stelle  $H_n(C_\bullet, d_C)$ . Wir sehen zuerst, dass  $\operatorname{Im} g_* \subseteq \ker \partial_n$ : für  $b \in \ker d_B$  ist  $\partial_n(g(b)) = 0$  nach Definition. Um die Inklusion  $\ker \partial_n \subseteq \operatorname{Im} g_*$  zu zeigen, sei  $c \in C_n$  eine Repräsentant einer Homologiekategorie

in  $\ker \partial_n$ , d.h.  $\partial(c) = d_A(a)$  für ein  $a \in A_n$ . Für einen Lift  $b \in B_n$  von  $c$  ist  $d_B(b - f(a)) = d_B(b) - d_B(f(a)) = d_B(b) - f(d_A(a)) = 0$  (der letzte Schritt nach Definition der Abbildung aus Lemma A.2.8). Ausserdem ist  $g(b - f(a)) = g(b) - g(f(a)) = g(b) = c$ , damit ist die Homologieklassse von  $b - f(a)$  das gesuchte Urbild der Homologieklassse von  $c$ .  $\square$

DEFINITION A.3.14. Seien  $f, g: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$  zwei Homomorphismen von Kettenkomplexen. Eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$  ist eine Sequenz von Abbildungen  $h_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$  so dass für alle  $n$  gilt

$$f_n - g_n = h_{n-1} \circ d_n + d'_{n+1} \circ h_n$$

Die Abbildungen  $f$  und  $g$  heißen (ketten-)homotop, wenn es eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$  gibt. Abbildungen, die homotop zur Nullabbildung sind, heißen nullhomotop.

Eine Abbildung  $f: C_\bullet \rightarrow C'_\bullet$  von Kettenkomplexen heißt Kettenhomotopie-äquivalenz, wenn es eine Abbildung  $g: C'_\bullet \rightarrow C_\bullet$  gibt, so dass die Kompositionen  $f \circ g$  und  $g \circ f$  kettenhomotop zur jeweiligen Identitätsabbildung sind.

ÜBUNGSAUFGABE A.3.15. Zeigen Sie, dass Kettenhomotopie eine Äquivalenzrelation zwischen Homomorphismen von Kettenkomplexen induziert.

PROPOSITION A.3.16. Seien  $f, g: (C_\bullet, d) \rightarrow (C'_\bullet, d')$  zwei homotope Homomorphismen von Kettenkomplexen. Dann sind die induzierten Abbildungen gleich:

$$f_* = g_*: H_n(C_\bullet, d) \rightarrow H_n(C'_\bullet, d')$$

BEWEIS. Sei  $h_\bullet: C_\bullet \rightarrow C'_{\bullet+1}$  eine Kettenhomotopie, und sei  $z \in C_n$  ein Repräsentant von  $\bar{z} \in H_n(C_\bullet, d)$ . Mit  $d_n(z) = 0$  haben wir

$$f(z) - g(z) = h_{n-1}(d_n(z)) + d'_{n+1}(h_n(z)) = d'_{n+1}(h_n(z))$$

Die rechte Seite ist aber nach Definition 0 in  $H_n(C'_\bullet, d')$ , also folgt  $f_*(z) = g_*(z)$ .  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.3.17. Sei  $G$  eine Gruppe. Wir betrachten den Kettenkomplex  $(B_\bullet, \partial)$ , wobei

- $B_n$  ist für  $n \geq 0$  die freie abelsche Gruppe auf der Menge  $G^{\times(n+1)}$ , die Erzeuger sind also geordnete  $n + 1$ -Tupel von Elementen aus  $G$ .
- Die Randabbildung  $\partial: B_n \rightarrow B_{n-1}$  ist gegeben durch  $\partial = \sum_i (-1)^i d_i$  mit  $d_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$ ; dabei bezeichnet  $\hat{g}_i$ , dass das  $i$ -te Element  $g_i$  weggelassen wird.
- Zusätzlich haben wir noch eine Kopie von  $\mathbb{Z}$  im Grad  $-1$ , und die Augmentierungsabbildung  $\partial_0: \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}: g \mapsto 1$ .

Zeigen Sie, dass der obige augmentierte Kettenkomplex für  $G$  azyklisch ist, d.h.  $H_\bullet(B_\bullet, \partial) = 0$ , indem Sie eine Kettenhomotopie zwischen der Identität und der Nullabbildung konstruieren.

Abbildungskegel und Zylinder, Quasi-Isomorphismus gdw Abbildungskegel zusammenziehbar

#### A.4. Tor-Gruppen und universelle Koeffizienten für Homologie

ÜBUNGSAUFGABE A.4.1. Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein Links- $R$ -Modul. Zeigen Sie, dass  $(-)\otimes M: \mathbf{Mod}\text{-}R \rightarrow \mathbf{Ab}$  ein rechts-exakter Funktor ist, d.h. für eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von Rechts- $R$ -Moduln ist die folgende Sequenz von abelschen Gruppen exakt:

$$A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0$$

BEMERKUNG A.4.2. *Allgemeiner heißt ein Funktor  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  zwischen abelschen Kategorien rechts-exakt, wenn für jede exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  die zugehörige Bildsequenz  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$  exakt ist. Dual dazu heißt ein Funktor  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  zwischen abelschen Kategorien links-exakt, wenn für jede exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  die zugehörige Bildsequenz  $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  exakt ist.*

DEFINITION A.4.3. *Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Modul  $P$  heißt projektiv, wenn für jede surjektive Abbildung  $g: B \rightarrow C$  und jede Abbildung  $\phi: P \rightarrow C$  eine Anhebung  $\tilde{\phi}$  existiert, sodass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow \phi & & \\ \exists \tilde{\phi} & \swarrow & & \searrow & \\ B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ÜBUNGSAUFGABE A.4.4. *Formulieren Sie den dazu dualen Begriff von injektiven Moduln. Zeigen Sie, dass eine abelsche Gruppe genau dann injektiv ist, wenn sie divisibel ist.*

ÜBUNGSAUFGABE A.4.5. *Zeigen Sie, dass ein  $R$ -Modul genau dann projektiv ist, wenn er direkter Summand eines freien  $R$ -Moduls ist. (Insbesondere sind endlich erzeugte projektive  $\mathbb{Z}$ -Moduln frei.)*

*Zeigen Sie, dass Tensorprodukt mit projektiven Moduln exakt ist: für einen projektiven Modul  $M$  und eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  ist auch die folgende Sequenz wieder exakt:*

$$0 \rightarrow A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0.$$

DEFINITION A.4.6. *Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Eine projektive Auflösung von  $M$  ist ein Kettenkomplex  $(P_\bullet, d)$  von projektiven  $R$ -Moduln mit  $P_i = 0$  für  $i < 0$  zusammen mit einer Augmentierung  $\epsilon: P_0 \rightarrow M$ , so dass der augmentierte Komplex exakt ist:*

$$\dots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$$

BEMERKUNG A.4.7. *Analog gibt es den dualen Begriff der injektiven Auflösungen. Alternativ können wir eine projektive Auflösung definieren als einen Komplex  $P_\bullet$  von projektiven Moduln zusammen mit einem Quasi-Isomorphismus von Komplexen  $P_\bullet \rightarrow M[0]$ . Dabei bezeichnet  $M[0]$  den Kettenkomplex, der als einzigen nichttrivialen Modul  $M$  im Grad 0 hat.*

LEMMA A.4.8. *Sei  $R$  ein Ring. Jeder  $R$ -Modul hat eine projektive Auflösung.*

BEWEIS. Für jeden  $R$ -Modul  $M$  existiert eine Surjektion  $\epsilon_0: P_0 \rightarrow M$ . Wir können zum Beispiel einfach den freien Modul  $F(M)$  nehmen, der von den Elementen von  $M$  erzeugt wird, und die natürliche Abbildung  $F(M) \rightarrow M$  die einen Erzeuger von  $F(M)$ , der zu  $m \in M$  gehört, auf  $m$  schickt. Freie Moduln sind projektiv.<sup>1</sup> Damit haben wir den ersten Schritt bei der Konstruktion erledigt.

Nehmen wir nun an, dass wir die Auflösung bis zum  $n$ -ten Schritt konstruiert haben. Wir betrachten den Modul  $M_n = \ker(d_n: P_n \rightarrow P_{n-1})$ . Dann existiert (wie im ersten Schritt) ein projektiver Modul  $P_{n+1}$  und eine Surjektion  $p_{n+1}: P_{n+1} \rightarrow M_n$ . Nach Konstruktion gilt für die Abbildung  $d_{n+1}: P_{n+1} \xrightarrow{p_n} M_n \subseteq P_n$  dann  $\text{Im } d_{n+1} = \ker d_n$ , und wir erhalten den nächsten Schritt der Auflösung.  $\square$

<sup>1</sup>Wir benutzen hier das Auswahlaxiom.

SATZ A.4.9. Sei  $R$  ein Ring,  $f: M \rightarrow N$  ein Homomorphismus von  $R$ -Moduln und  $\epsilon: P_\bullet \rightarrow M$  eine projektive Auflöfung. Für jede projektive Auflöfung  $\eta: Q_\bullet \rightarrow N$  existiert ein Homomorphismus  $f_\bullet: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$  von Komplexen, der mit  $f$  kompatibel ist, d.h. dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \xrightarrow{\eta} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die Abbildung  $f_\bullet$  ist eindeutig bis auf Kettenhomotopieäquivalenz.

BEWEIS. Wir konstruieren  $f_n$  induktiv, beginnend bei  $f_{-1} = f$ . Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass  $f_i$  für  $i \leq n$  bereits konstruiert sind, so dass  $f_{i-1} \circ d = d \circ f_i$  gilt. Wir bezeichnen mit  $Z_n(P) = \ker(d: P_n \rightarrow P_{n-1})$  und  $Z_n(Q) = \ker(d: Q_n \rightarrow Q_{n-1})$  die jeweiligen Moduln von  $n$ -Zykeln. Im Spezialfall  $n = -1$  setzen wir  $Z_{-1}(P) = M$  und  $Z_{-1}(Q) = N$ . Aus  $f_{n-1} \circ d = d \circ f_n$  folgt, dass sich  $f_n$  zu einer Abbildung  $f'_n: Z_n(P) \rightarrow Z_n(Q)$  einschränkt. Wir wenden dann die Definition von projektiven Moduln an, um  $f_{n+1}$  im folgenden Diagramm zu erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{d} & P_{n+1} & \xrightarrow{d} & Z_n(P) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \exists f_{n+1} & & \downarrow f'_n & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_{n+1} & \xrightarrow{d} & Z_n(Q) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach Konstruktion kommutiert auch das Quadrat, so dass wir  $f_n \circ d = d \circ f_{n+1}$  haben. Damit ist die Konstruktion der Kettenabbildung abgeschlossen.

Es bleibt die Eindeutigkeit bis auf Kettenhomotopie zu zeigen. Sei also  $g_\bullet: P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$  eine andere Kettenabbildung. Wir konstruieren induktiv eine Kettenhomotopie zwischen  $f$  und  $g$ , nach Definition A.3.14 also Abbildungen  $h_n: P_n \rightarrow Q_{n+1}$  mit  $f_n - g_n = h_{n-1} \circ d + d \circ h_n$ .

Für  $n < 0$  ist  $P_n = 0$  und wir setzen  $h_n = 0$ . Für  $n = 0$  ist  $\eta(f_0 - g_0) = \epsilon(f - g) = 0$ , also liegt das Bild von  $f_0 - g_0$  in  $Z_0(Q)$ . Wir können die Anhebungseigenschaft benutzen, um wie zuvor eine Abbildung  $P_0 \rightarrow Q_1$  zu erhalten, die das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ \exists h_1 \nearrow & \downarrow f_0 - g_0 & \\ Q_1 & \longrightarrow & Z_0(Q) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Damit haben wir  $f_0 - g_0 = d \circ h_1$ , was wegen  $h_0 = 0$  genau die Kettenhomotopie-Bedingung ist.

Für den Induktionsschritt nehmen wir jetzt an, dass wir für die Kettenhomotopie  $h_i$  für  $i < n$  konstruiert haben, so dass insbesondere  $f_{n-1} - g_{n-1} = d \circ h_{n-1} + h_{n-2} \circ d$  gilt. Wir betrachten die Abbildung  $f_n - g_n - h_{n-1} \circ d: P_n \rightarrow Q_n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d \circ (f_n - g_n - h_{n-1} \circ d) &= d \circ f_n - d \circ g_n - (f_{n-1} - g_{n-1} - h_{n-2} \circ d) \circ d \\ &= d \circ (f_n - g_n) - (f_{n-1} - g_{n-1}) \circ d \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hier benutzen wir die Induktionsvoraussetzung der Kettenhomotopie,  $d^2 = 0$  und die Tatsache, dass  $f_\bullet - g_\bullet$  eine Kettenabbildung ist. Insbesondere liegt das Bild von

$f_n - g_n - h_{n-1} \circ d: P_n \rightarrow Q_n$  in  $Z_n(Q)$  und wir können wieder die Anhebungseigenschaft benutzen, um  $h_n$  zu konstruieren:

$$\begin{array}{ccccc} & & P_n & & \\ & \swarrow \exists h_n & \downarrow f_n - g_n - h_{n-1} \circ d & & \\ Q_{n+1} & \longrightarrow & Z_n(Q) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Diese Abbildung erfüllt nach Konstruktion  $f_n - g_n = d \circ h_n + h_{n-1} \circ d$ , damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen.  $\square$

DEFINITION A.4.10. Sei  $R$  ein Ring und sei  $B$  ein Links- $R$ -Modul. Für einen Rechts- $R$ -Modul  $A$  wählen wir eine projektive Auflösung  $P_\bullet \rightarrow A$  (durch Rechts- $R$ -Moduln). Dann ist  $P_\bullet \otimes_R B$  ein Komplex von abelschen Gruppen und wir definieren die Tor-Gruppen

$$\text{Tor}_n^R(A, B) := H_n(P_\bullet \otimes_R B).$$

BEMERKUNG A.4.11. Zur Berechnung der Tor-Gruppen könnten wir alternativ auch eine Auflösung  $Q_\bullet \rightarrow B$  wählen und die Homologie  $H_n(A \otimes_R Q_\bullet)$  betrachten. Dies liefert dasselbe Ergebnis. Der Beweis dafür ist etwas umfangreicher und an dieser Stelle nicht so relevant, s. [Wei94, Abschnitt 2.6].

BEMERKUNG A.4.12. Um Tor-Gruppen auszurechnen, reicht es, Auflösungen durch flache Moduln zu benutzen. Dabei heißt ein  $R$ -Modul  $M$  flach, wenn  $(-) \otimes_R M$  exakt ist (wie in Übungsaufgabe A.4.5). Ein Beispiel für einen flachen, nicht projektiven  $\mathbb{Z}$ -Modul ist  $\mathbb{Q}$ .

Wir sammeln ein paar grundlegende Eigenschaften der Tor-Gruppen.

PROPOSITION A.4.13. Sei  $R$  ein Ring.

- (1) Die Tor-Gruppen  $\text{Tor}_n^R(A, B)$  sind unabhängig von der Wahl einer projektiven Auflösung  $P_\bullet \rightarrow A$ .
- (2)

$$\text{Tor}_\bullet(A, \bigoplus_{i \in I} B_i) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Tor}_\bullet(A, B_i)$$

Tor vertauscht mit gerichteten Kolimiten.

- (3)  $\text{Tor}_n^R(A, B) \cong \text{Tor}_n^R(B, A)$ .
- (4) Für einen  $R$ -Modul  $M$  und eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von  $R$ -Moduln haben wir eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, A) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, B) \rightarrow \text{Tor}_i^R(M, C) \xrightarrow{\partial} \text{Tor}_{i-1}^R(M, A) \rightarrow \cdots$$

BEWEIS. (1) folgt direkt aus dem Vergleichssatz A.4.9 und Proposition A.3.16.

(2) Die direkte Summe von projektiven Auflösungen für  $B_i$  ist eine projektive Auflösung für  $\bigoplus_i B_i$ . Die Aussage für gerichtete Kolimiten wird in [Wei94, Abschnitt 2.6] bewiesen.

(3) wird in [Wei94, Abschnitt 2.7] bewiesen. Dafür wird benutzt, dass Tor als abgeleiteter Funktor eine gewisse universelle Eigenschaft hat, die wir hier nicht diskutieren wollen. Ein direkter Beweis für  $R = \mathbb{Z}$  wird in [Hat02, Proposition 3A.5] gegeben.

(4) folgt aus Proposition A.3.13. Wir wählen eine projektive Auflösung  $P_\bullet \rightarrow M$  und betrachten die Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow P_\bullet \otimes_R A \rightarrow P_\bullet \otimes_R B \rightarrow P_\bullet \otimes_R C \rightarrow 0.$$

Diese Sequenz ist exakt, da Tensorprodukt mit projektiven Moduln exakte Sequenzen erhält, cf. Übungsaufgabe A.4.5. Die Behauptung folgt mit Proposition A.3.13.  $\square$

Für den Ring  $R = \mathbb{Z}$  können wir die Tor-Gruppen sehr konkret berechnen.

PROPOSITION A.4.14. *Seien  $A$  und  $B$  abelsche Gruppen.*

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = \begin{cases} B/nB & i = 0 \\ nB := \ker(n: B \rightarrow B) & i = 1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

Allgemein ist  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$  eine Torsionsgruppe, und  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$  für  $i \geq 2$ . Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe  $A$  gilt  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$  für  $i \neq 0$ .

BEWEIS. Wir haben eine freie Auflösung  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$  für  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Die Tor-Gruppen sind dann definiert als die Homologie des Tensor-Komplexes  $P_{\bullet} \otimes B$ , der dann die Form  $0 \rightarrow B \xrightarrow{n} B \rightarrow 0$  hat.

Die allgemeinen Aussagen folgen, indem wir  $A$  als gerichteten Kolimes der endlich erzeugten Untergruppen  $A_j$  schreiben. Eine solche Untergruppe hat die Form  $A_j \cong \mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_l^{n_l}\mathbb{Z}$ . Da  $\mathbb{Z}^m$  frei ist, ist  $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{Z}^m, B) = 0$  für  $i \neq 0$ . Dann ist

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A_j, B) \cong \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_1^{n_1}, B) \oplus \dots \oplus \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p_l^{n_l}, B)$$

und die Behauptung folgt aus dem Spezialfall  $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Auch die Behauptung für torsionsfreie Gruppen folgt, indem wir  $A$  als direkten Limes der endlich erzeugten Untergruppen schreiben. Diese sind torsionsfrei, also isomorph zu  $\mathbb{Z}^m$ , also verschwindet Tor. Einen alternativen/direkteren Beweis gibt es in [Hat02, Proposition 3A.5].  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.4.15. *Berechnen Sie Tor für Moduln über  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .*

SATZ A.4.16 (Universelle Koeffizienten für Homologie). *Sei  $(C_{\bullet}, d)$  ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen. Dann haben wir für jede abelsche Gruppe  $M$  und jedes natürliche Zahl  $n$  eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H_n(C_{\bullet}) \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow H_n(C_{\bullet} \otimes_{\mathbb{Z}} M) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C_{\bullet}), M) \rightarrow 0.$$

Die Sequenz spaltet nicht-kanonisch.

BEWEIS. Wir benutzen die Notation  $Z_n = \ker(d: C_n \rightarrow C_{n-1})$  und  $B_n = \mathrm{Im}(d: C_{n+1} \rightarrow C_n)$ . Da  $B_n \subset C_n$  eine Untergruppe einer freien abelschen Gruppe ist, ist  $B_n$  frei. Insbesondere ist  $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(B_{n-1}, M) = 0$ , und wir erhalten kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow Z_n \otimes M \rightarrow C_n \otimes M \rightarrow B_{n-1} \otimes M \rightarrow 0.$$

Damit haben wir also eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen von abelschen Gruppen

$$0 \rightarrow (Z_{\bullet}, 0) \otimes M \rightarrow (C_{\bullet}, d) \otimes M \rightarrow (B_{\bullet-1}, 0) \otimes M \rightarrow 0.$$

Da die Randabbildungen in den Kettenkomplexen  $Z_{\bullet}$  und  $B_{\bullet-1}$  trivial sind, hat die zugehörige lange exakte Homologiesequenz die folgende Form:

$$B_n \otimes M \xrightarrow{\partial} Z_n \otimes M \rightarrow H_n(C_{\bullet} \otimes M) \rightarrow B_{n-1} \otimes M \xrightarrow{\partial} Z_{n-1} \otimes M.$$

Aus der Definition der Randabbildung  $\partial$  folgt, dass die Randabbildung durch  $\iota \otimes M: B_n \otimes M \rightarrow Z_n \otimes M$  gegeben ist, wobei  $\iota: B_n \hookrightarrow Z_n$  die natürliche Inklusion bezeichnet. Andererseits ist  $0 \rightarrow B_n \xrightarrow{\iota} Z_n \rightarrow H_n(C_{\bullet}) \rightarrow 0$  eine freie Auflösung. Damit ist  $\mathrm{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{Z}}(H_n(C_{\bullet}), M)$  die Homologie des Komplexes

$$0 \rightarrow B_n \otimes M \xrightarrow{\partial} Z_n \otimes M \rightarrow 0.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Für die Spaltung bemerken wir, dass die surjektive Abbildung  $d: C_n \rightarrow B_{n-1}$  spaltet, da  $B_{n-1}$  frei ist. Wir erhalten also eine nicht-kanonische Zerlegung  $C_n \cong$

$Z_n \oplus B_{n-1}$ . Nach Tensorieren mit  $M$  haben wir  $C_n \otimes M \cong Z_n \otimes M \oplus B_{n-1} \otimes M$ , insbesondere spaltet die Inklusion

$$Z_n \otimes_R M \hookrightarrow \ker(d_n \otimes M: C_n \otimes M \rightarrow C_{n-1} \otimes M).$$

Modulo  $B_n \otimes M$  ist also  $H_n(C_\bullet) \otimes M$  ein direkter Summand von  $H_n(C_\bullet \otimes M)$  und die Sequenz spaltet wie behauptet.  $\square$

**BEMERKUNG A.4.17.** *Die exakte Sequenz aus Satz A.4.16 bekommen wir in allgemeineren Situationen, über beliebigen Ringen. Voraussetzung dafür ist, dass der Komplex  $(C_\bullet, d)$  aus flachen Moduln besteht und auch die Moduln  $B_n = \text{Im } d_{n+1}$  wieder flach sind. Die Spaltung ist eine spezielle Aussage über  $\mathbb{Z}$ .*

**BEMERKUNG A.4.18.** *Im Kontext der Vorlesung können wir Tor-Gruppen als Homologie für  $R$ -Moduln interpretieren. Analog zu den einfachsten Bausteinen für topologische Räume (Zellen für CW-Komplexe oder Simplizes für Simplicialkomplexe) haben wir hier die projektiven Moduln als einfachste Bestandteile. Zusammenziehbarkeit der Zellen wird ersetzt durch Exaktheit des Tensorprodukts. Eine projektive Auflösung beschreibt, wie ein  $R$ -Modul aus projektiven Moduln zusammengebaut wird:  $P_0$  in der projektiven Auflösung kodiert Erzeuger,  $P_1$  Relationen,  $P_2$  Relationen zwischen Relationen, etc. Die Tor-Gruppen beschreiben, wie dadurch kompliziertere Strukturen entstehen, die insbesondere zur Nicht-Exaktheit des Tensor-Produkts führen.*

*In der Gruppenhomologie wird diese Interpretation besonders deutlich: die Homologie  $H_\bullet(\text{BG}, -)$  des klassifizierenden Raums einer Gruppe  $G$  (mit geeigneten lokalen Koeffizienten) kann mit  $\text{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$  identifiziert werden.*

*Die Tor-Gruppen sind in unterschiedlichen Bereichen insbesondere der kommutativen Algebra und algebraischen Geometrie relevant, zum Beispiel in der Tor-Formel von Serre zur Berechnung von Schnittvielfachheiten.*

**BEMERKUNG A.4.19.** *Bemerkung: allgemeines Bild derivierten Funktoren für Funktoren zwischen abelschen Kategorien*

**PROPOSITION A.4.20.** *Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Dann haben wir für jede abelsche Gruppe  $G$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  eine (nicht-kanonisch) spaltende exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} G \rightarrow H_n^{\text{sing}}(X, A; G) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}^{\text{sing}}(X, A), G) \rightarrow 0$$

*Diese Sequenzen sind funktoriell bezüglich Abbildungen  $(X, A) \rightarrow (Y, B)$  von Raumpaaren.*

**BEWEIS.** Folgt direkt aus Proposition A.4.16.  $\square$

**KOROLLAR A.4.21.** *Sei  $(X, A)$  ein Raumpaard. Dann gilt*

$$H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Q}) \cong H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

*Insbesondere ist der Rang der ganzzahligen Homologie gleich der Dimension der rationalen Homologie, vorausgesetzt der Rang ist endlich.*

**KOROLLAR A.4.22.** (1)  $H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Z}) = 0$  für alle  $n$  genau dann, wenn  $H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{Q}) = 0$  und  $H_n^{\text{sing}}(X, A; \mathbb{F}_p) = 0$  für alle  $n$  und alle Primzahlen  $p$ .

(2) *Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert Isomorphismen auf Homologie mit  $\mathbb{Z}$ -Koeffizienten, wenn sie Isomorphismen auf Homologie mit  $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten und  $\mathbb{F}_p$ -Koeffizienten für alle Primzahlen  $p$  induziert.*

BEWEIS. Über die lange exakte Sequenz für Raumpaare folgt (2) aus (1). Für (1) folgt eine Richtung ( $\Rightarrow$ ) direkt aus Theorem A.4.16. Für die andere Richtung reicht es zu zeigen, dass eine abelsche Gruppe  $A$  mit  $A \otimes \mathbb{Q} = 0$  und  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{F}_p) = 0$  schon trivial ist. Mit der Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{F}_p) \rightarrow A \xrightarrow{p} A \rightarrow A \otimes \mathbb{F}_p \rightarrow 0$$

aus der Definition der Tor-Gruppen sehen wir, dass  $\text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{F}_p) = 0$  schon die Injektivität von  $p: A \rightarrow A$  impliziert. Gilt dies für alle Primzahlen, ist  $A$  torsionsfrei. Es bleibt also zu zeigen, dass torsionsfreie abelsche Gruppen  $A$  mit  $A \otimes \mathbb{Q} = 0$  schon trivial sind. Wir benutzen die projektive Auflösung  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$  und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q} \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Für  $A$  torsionsfrei ist dann nach Proposition A.4.14 der erste Term trivial, also  $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}$  injektiv. Die Behauptung folgt.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.4.23. Sei  $X$  ein topologischer Raum, so dass  $H_{\bullet}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$  endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, dass für jeden Körper  $K$  gilt

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \text{rg } H_i^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) = \sum_i (-1)^i \dim_K H_i^{\text{sing}}(X, K).$$

Die Euler-Charakteristik kann also mit jedem beliebigen Koeffizientenkörper ermittelt werden.

### A.5. Tensorprodukte und Künneth-Formel

DEFINITION A.5.1. Definition von Tensor-Produkt von Komplexen

SATZ A.5.2 (algebraische Künneth-Formel). Seien  $P$  und  $Q$  Komplexe von freien abelschen Gruppen. Dann gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p+q=n} H_p(P_{\bullet}) \otimes H_q(Q_{\bullet}) \rightarrow H_n(P \otimes Q) \rightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(P_{\bullet}), H_q(Q_{\bullet})) \rightarrow 0$$

BEWEIS. analoger Beweis  $\square$

### A.6. Ext-Gruppen und Erweiterungen

PROPOSITION A.6.1. Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Der Funktor

$$\text{Hom}_R(M, -): R\text{-mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

ist links-exakt, d.h. für jede exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  von  $R$ -Moduln ist die folgende Sequenz exakt:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(M, C)$$

BEWEIS. Exaktheit an der ersten Stelle: Sei  $\phi: M \rightarrow A$  ein Homomorphismus von  $R$ -Moduln so dass die Komposition  $M \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{f} B$  die Nullabbildung ist. Da  $f$  injektiv ist, muss  $\phi$  bereits die Nullabbildung sein.

Exaktheit an der zweiten Stelle: Die Komposition  $g_* \circ f_*$  bildet  $\phi: M \rightarrow A$  auf  $g \circ f \circ \phi$  ab. Da  $g \circ f = 0$  gilt, folgt  $g_* \circ f_* = 0$ . Sei nun  $\psi: M \rightarrow B$  eine Abbildung so dass die Komposition  $M \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{g} C$  die Nullabbildung ist. Dann faktorisiert  $\psi: M \rightarrow B$  durch  $\ker g = A$ .  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.6.2. Sei  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Zeigen Sie, dass  $\text{Hom}_R(-, M)$  ein kontravarianter links-exakter Funktor ist, d.h., dass für jede exakte Sequenz von  $R$ -Moduln  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  die entsprechende Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$$

exakt ist. Geben Sie ein Beispiel einer kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ , für die die duale Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, R) \rightarrow \text{Hom}_R(B, R) \rightarrow \text{Hom}_R(A, R) \rightarrow 0$$

nicht exakt ist.

LEMMA A.6.3. Sei  $R$  ein Ring. Ein  $R$ -Modul  $M$  ist genau dann projektiv, wenn  $\text{Hom}_R(M, -)$  exakt ist, d.h. für jede exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  von  $R$ -Moduln ist die folgende Sequenz auch wieder exakt:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(M, C) \rightarrow 0$$

BEWEIS. Wir nehmen an, dass  $\text{Hom}_R(M, -)$  exakt ist und wir eine Surjektion  $g: B \rightarrow C$  und eine Abbildung  $\phi: M \rightarrow C$  wie in Definition A.4.3 gegeben haben. Da  $g_*$  surjektiv ist, existiert eine Anhebung  $\tilde{\phi}: M \rightarrow B$  mit  $g \circ \tilde{\phi} = \phi$ . Also ist  $M$  projektiv.

Sei nun  $M$  projektiv. Für die Exaktheit benötigen wir nach Proposition A.6.1 nur noch die Surjektivität von  $g_*$ . Ein Urbild für  $\phi: M \rightarrow C$  unter  $g_*$  wird aber genau durch die Abbildung  $\tilde{\phi}: M \rightarrow B$  aus Definition A.4.3 gegeben.  $\square$

BEMERKUNG A.6.4. Das Lemma besagt genauer, dass für eine gegebene Surjektion  $g: B \rightarrow C$  die Anhebungseigenschaft in Definition A.4.3 äquivalent zur Surjektivität der Abbildung  $g_*: \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$  ist.

DEFINITION A.6.5. Sei  $R$  ein Ring und  $B$  ein Links- $R$ -Modul. Für einen Links- $R$ -Modul  $A$  wählen wir eine projektive Auflöser  $P_\bullet \rightarrow A$  und definieren die Ext-Gruppen

$$\text{Ext}_R^i(A, B) := H_i(\text{Hom}_R(P_\bullet, B)).$$

BEMERKUNG A.6.6. Wie in der Bemerkung zu den Tor-Gruppen können wir auch die Ext-Gruppen auf eine alternative Art berechnen: Sei  $R$  ein Ring und sei  $A$  ein Links- $R$ -Modul. Für einen Links- $R$ -Modul  $B$  können wir eine injektive Auflöser  $B \rightarrow I^\bullet$  wählen und die Ext-Gruppen als Kohomologie eines Hom-Komplexes berechnen:

$$\text{Ext}_R^i(A, B) := H^i(\text{Hom}_R(A, I^\bullet)).$$

Der Beweis wird hier nicht gegeben, s. [Wei94, Abschnitt 2.6].

ÜBUNGSAUFGABE A.6.7. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1)  $B$  ist ein injektiver  $R$ -Modul.
- (2)  $\text{Hom}_R(-, B)$  ist exakt.
- (3)  $\text{Ext}_R^i(A, B) = 0$  für alle  $i \neq 0$  und alle  $A$ .
- (4)  $\text{Ext}_R^1(A, B) = 0$  für alle  $A$ .

ÜBUNGSAUFGABE A.6.8. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (1)  $A$  ist ein projektiver  $R$ -Modul.
- (2)  $\text{Hom}_R(A, -)$  ist exakt.
- (3)  $\text{Ext}_R^i(A, B) = 0$  für alle  $i \neq 0$  und alle  $B$ .
- (4)  $\text{Ext}_R^1(A, B) = 0$  für alle  $B$ .

Wir sammeln wieder ein paar grundlegende Eigenschaften.

PROPOSITION A.6.9. (1) Die Ext-Gruppen  $\text{Ext}_R^n(A, B)$  sind unabhängig von der Wahl der Auflösung  $P_\bullet \rightarrow A$  bzw.  $B \rightarrow I^\bullet$ .

(2)  $\text{Ext}_R^i(\bigoplus_l A_l, B) \cong \prod_l \text{Ext}_R^i(A_l, B)$

(3)  $\text{Ext}_R^i(A, \prod_l B_l) \cong \prod_l \text{Ext}_R^i(A, B_l)$

(4) Für einen  $R$ -Modul  $M$  und eine exakte Sequenz  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  haben wir lange exakte Sequenzen

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, A) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, B) \rightarrow \text{Ext}_R^i(M, C) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_R^{i+1}(M, A) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \text{Ext}_R^i(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^i(A, M) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_R^{i+1}(C, M) \rightarrow \cdots$$

BEWEIS. (1) folgt direkt aus dem Vergleichssatz A.4.9 und Proposition A.3.16.

(2) und (3): Die direkte Summe von projektiven Auflösungen von  $A_l$  ist eine projektive Auflösung von  $\bigoplus_l A_l$ . Das direkte Produkt injektiver Auflösungen von  $B_l$  ist eine injektive Auflösung von  $\prod_l B_l$ . Die Aussage folgt aus Übungsaufgabe A.3.10 und den beiden Aussagen

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_\alpha P_\alpha, B\right) \cong \prod_\alpha \text{Hom}(P_\alpha, B)$$

$$\text{Hom}\left(A, \prod_\beta I_\beta\right) \cong \prod_\beta \text{Hom}(A, I_\beta).$$

(4) folgt ebenfalls wieder aus der Definition, und Proposition A.3.13 zusammen mit den Übungsaufgaben A.6.7 und A.6.8. □

PROPOSITION A.6.10. Sei  $B$  eine abelsche Gruppe.

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, B) = \begin{cases} nB & i = 0 \\ B/nB & i = 1 \\ 0 & i \geq 2 \end{cases}$$

Allgemein ist  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(A, B) = 0$  für  $i \geq 2$ .

BEWEIS. Die explizite Berechnung folgt auch wieder aus der projektiven Auflösung  $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$ .

Für die allgemeine Aussage sei  $B$  eine abelsche Gruppe und  $B \hookrightarrow I^0$  ein injektiver Homomorphismus in eine divisible Gruppe. Der Quotient  $I^1 = I^0/B$  ist immer noch divisible, also injektiv. Wir erhalten also eine injektive Auflösung  $0 \rightarrow B \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow 0$ , und  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^i(A, B)$  ist die Kohomologie des Komplexes  $0 \rightarrow \text{Hom}(A, I^0) \rightarrow \text{Hom}(A, I^1) \rightarrow 0$ . Die Behauptung folgt. □

ÜBUNGSAUFGABE A.6.11. Für eine abelsche Gruppe  $A$  bezeichnen wir mit  $A^* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  das Pontryagin-Dual von  $A$ . Zeigen Sie, dass  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong A^*$  gilt.

ÜBUNGSAUFGABE A.6.12. Berechnen Sie  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

BEMERKUNG A.6.13. Für endlich erzeugte abelsche Gruppen können wir dann aus den obigen Ergebnissen (und der Klassifikation endlich erzeugter abelscher Gruppen aus dem Elementarteilersatz) die Ext-Gruppen berechnen. Ext für nicht endlich erzeugte abelsche Gruppen ist viel subtiler, wie das Whitehead-Problem zeigt:

Ist jede abelsche Gruppe  $A$  mit  $\text{Ext}^1(A, \mathbb{Z}) = 0$  eine freie abelsche Gruppe?

Saharon Shelah bewies 1974, dass das Whitehead-Problem von ZFC unabhängig ist – im konstruierbaren Universum hat das Problem eine positive Antwort, unter Martins Axiom und der Negation der Kontinuumshypothese hat das Problem eine negative Antwort.

SATZ A.6.14 (Universelle Koeffizienten für Kohomologie). Sei  $(C_\bullet, \partial)$  ein Komplex von freien abelschen Gruppen mit Homologie  $H_n(C_\bullet, \partial)$ . Dann gibt es für die Kohomologiegruppen  $H^n(C^\bullet, d)$  des dualen Kokettenkomplexes eine spaltende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(C_\bullet, \partial), \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(C^\bullet, d) \xrightarrow{h} \text{Hom}(H_n(C_\bullet, \partial), \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

BEWEIS. Wir bezeichnen mit  $Z_n = \ker(\partial: C_n \rightarrow C_{n-1})$  die Zyklen, und mit  $B_n = \text{Im}(\partial: C_{n+1} \rightarrow C_n)$  die Ränder. Damit haben wir (spaltende) exakte Sequenzen  $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial} B_{n-1} \rightarrow 0$ , die eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen liefern:

$$0 \rightarrow (Z_\bullet, 0) \rightarrow (C_\bullet, \partial) \rightarrow (B_{\bullet-1}, 0) \rightarrow 0.$$

Dass die Randabbildungen für  $Z_\bullet$  und  $B_\bullet$  trivial sind, folgt aus  $\partial^2 = 0$ . Wir dualisieren den Kettenkomplex, und bezeichnen mit  $A^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z})$  die dualen Moduln. Wir erhalten eine exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

$$0 \rightarrow (B_{\bullet-1}^\vee, 0) \rightarrow (C^\bullet, d) \rightarrow (Z_n^\vee, 0) \rightarrow 0,$$

dabei benutzen wir Übungsaufgabe A.2.6. Da die Korandabbildungen der Komplexe  $B_{\bullet-1}^\vee$  und  $Z_n^\vee$  trivial sind, hat die lange exakte Kohomologiesequenz für diese kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen die Form

$$\cdots \rightarrow Z_{n-1}^\vee \xrightarrow{\iota_{n-1}^\vee} B_{n-1}^\vee \rightarrow H^n(C^\bullet, d) \rightarrow Z_n^\vee \xrightarrow{\iota_n^\vee} B_n^\vee \rightarrow \cdots$$

Nach Konstruktion der Randabbildung für die lange exakte Sequenz, cf. Proposition A.3.13, sind die Randabbildungen  $Z_n^\vee \rightarrow B_n^\vee$  die dualen Abbildungen zu den Inklusionen  $\iota_n: B_n \rightarrow Z_n$ : wir betrachten ein Urbild von  $\phi_0 \in Z_n^\vee$  unter der Projektion  $C^n = C_n^\vee \rightarrow Z_n^\vee$ , d.h. wir erweitern die Abbildung  $\phi_0: Z_n \rightarrow \mathbb{Z}$  zu einer Abbildung  $\phi: C_n \rightarrow \mathbb{Z}$ , z.B. durch Komposition mit der Projektion  $p_n: C_n \rightarrow Z_n$ . Dann wenden wir die Korandabbildung an und sehen, dass  $d(\phi) = \phi \circ \partial$  durch die folgende Komposition gegeben ist:

$$C_{n+1} \xrightarrow{\partial} C_n \xrightarrow{p_n} Z_n \rightarrow \mathbb{Z}$$

Setzen wir diese Abbildung noch mit  $Z_{n+1} \rightarrow C_{n+1}$  zusammen, erhalten wir nach Definition von  $Z_{n+1}$  die Nullabbildung, d.h. die Komposition faktorisiert durch  $B_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{p_n} Z_n \rightarrow \mathbb{Z}$ . Nach Definition von  $p_n$  ist aber die Komposition  $B_n \hookrightarrow C_n \xrightarrow{p_n} Z_n$  einfach die Inklusion  $\iota_n: B_n \hookrightarrow Z_n$ .

Wir zerlegen die lange exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow \text{coker } \iota_{n-1}^\vee \rightarrow H^n(C^\bullet, d) \rightarrow \ker \iota_n^\vee \rightarrow 0.$$

Wir benutzen wieder, dass  $0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n(C_\bullet) \rightarrow 0$  eine freie Auflösung der Homologie ist. Nach Definition sind die Ext-Gruppen dann die Homologie des Komplexes

$$0 \rightarrow Z_n^\vee \xrightarrow{\iota_n^\vee} B_n^\vee \rightarrow 0.$$

Hierbei ist  $\ker \iota_n^\vee$  die Gruppe der Homomorphismen  $\phi: Z_n \rightarrow \mathbb{Z}$ , die auf  $B_n$  verschwinden, kann also über den Homomorphiesatz mit  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(C_\bullet), \mathbb{Z})$  identifiziert werden. Der Kokern von  $\iota_{n-1}^\vee$  ist nach Definition  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(C_\bullet), \mathbb{Z})$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

ÜBUNGSAUFGABE A.6.15. Sei  $0 \rightarrow A_\bullet \rightarrow B_\bullet \rightarrow C_\bullet \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen von freien  $R$ -Moduln. Wir bezeichnen mit  $\partial: H_n(C_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(A_\bullet)$  die Randabbildung der langen exakten Homologiesequenz aus Proposition A.3.13. Nun sei  $0 \rightarrow \text{Hom}_R(C_\bullet, R) \rightarrow \text{Hom}_R(B_\bullet, R) \rightarrow \text{Hom}_R(A_\bullet, R) \rightarrow 0$  die duale exakte Sequenz von Kokettenkomplexen und  $\delta: H^{n-1}(\text{Hom}_R(A_\bullet, R)) \rightarrow$

$H^n(\text{Hom}_R(C_\bullet, R))$  die Randabbildung für die entsprechende lange exakte Kohomologiesequenz. Zeigen Sie, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{CD} H^{n-1}(\text{Hom}_R(A_\bullet, R)) @>\delta>> H^n(\text{Hom}_R(C_\bullet, R)) \\ @VhVV @VVhV \\ \text{Hom}_R(H_{n-1}(A_\bullet), R) @>\partial^\vee>> \text{Hom}_R(H_n(C_\bullet), R). \end{CD}$$

Hierbei ist die untere horizontale Abbildung die zu  $\partial$  duale Abbildung und die vertikalen Abbildungen sind die aus Satz A.6.14.

**KOROLLAR A.6.16.** Sei  $(C_\bullet, \partial)$  ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen und  $(C^\bullet, d)$  der duale Kokettenkomplex. Wir bezeichnen mit  $T_i = H_i(C_\bullet, \partial)_{\text{tor}}$  die entsprechenden Torsionsuntergruppen. Wenn  $H_n(C_\bullet, \partial)$  und  $H_{n-1}(C_\bullet, \partial)$  endlich erzeugt sind, dann gilt

$$H^n(C^\bullet, d) \cong (H_n(C_\bullet, \partial)/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

Wir diskutieren kurz die Beziehung zwischen Ext-Gruppen und Erweiterungen.

**DEFINITION A.6.17.** Gegeben ein Ring  $R$  und  $R$ -Moduln  $A, B$ . Eine Erweiterung  $\Xi$  von  $A$  durch  $B$  ist eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Zwei Erweiterungen heißen äquivalent, wenn es ein kommutatives Diagramm gibt:

$$\begin{CD} 0 @>>> A @>>> X @>>> B @>>> 0 \\ @. @V=VV @V\cong VV @V=VV @. \\ 0 @>>> A @>>> X' @>>> B @>>> 0 \end{CD}$$

Eine Erweiterung spaltet, wenn sie äquivalent zur Erweiterung  $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$  ist.

Für gegebene  $R$ -Moduln  $A$  und  $B$  können wir für den Moment die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von  $A$  durch  $B$  mit  $\mathcal{E}(B, A)$  bezeichnen und die Funktorialität von  $\mathcal{E}(-, -)$  diskutieren:

- kontravariante Funktorialität im ersten Argument: Für einen Homomorphismus  $\phi: B' \rightarrow B$  gibt es eine induzierte Abbildung  $\phi^*: \mathcal{E}(B, A) \rightarrow \mathcal{E}(B', A)$ . Aus einer Erweiterung  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$  erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{CD} 0 @>>> A @>>> X \times_B B' @>g'>> B' @>>> 0 \\ @. @V=VV @V\phi'VV @V\phi VV @. \\ 0 @>>> A @>f>> X @>g>> B @>>> 0 \end{CD}$$

Dabei ist  $X \times_B B' = \{(x, b) \in X \times B' \mid g(x) = \phi(b)\}$  der Pullback von Moduln, und die Abbildungen  $g': X \times_B B' \rightarrow B'$  bzw.  $\phi': X \times_B B' \rightarrow X$  sind die jeweiligen Projektionen. Die punktierte Abbildung ist die eindeutige durch die universelle Eigenschaft des Pullbacks induzierte Abbildung  $A \rightarrow X \times_B B': a \mapsto (f(a), 0)$ . Die obere Sequenz ist dann wieder eine Erweiterung (s. Übungsaufgabe). Auf diese Art erhalten wir die induzierte Abbildung, die dann mit Komposition von Modulhomomorphismen kompatibel ist.

- kovariante Funktorialität im zweiten Argument: Für einen Homomorphismus  $\phi: A \rightarrow A'$  gibt es eine induzierte Abbildung  $\phi_*: \mathcal{E}(B, A) \rightarrow \mathcal{E}(B, A')$ . Aus einer Erweiterung  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} B \rightarrow 0$  erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi' & & \downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & A' \cup_A X & \xrightarrow{\quad} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dabei ist

$$A' \cup_A X = \text{coker}(A \rightarrow A' \oplus X: a \mapsto (\phi(a), f(a)))$$

der Pushout von Moduln, und die Abbildungen  $f': A' \rightarrow A' \cup_A X$  bzw.  $\phi': X \rightarrow A' \cup_A X$  sind induziert von den jeweiligen Injektionen. Die punktierte Abbildung ist die eindeutige durch die universelle Eigenschaft des Pushouts induzierte Abbildung  $A' \cup_A X \rightarrow B: (a, x) \mapsto g(x)$ . Die untere Sequenz ist dann wieder eine Erweiterung (s. Übungsaufgabe). Auf diese Art erhalten wir die induzierte Abbildung, die dann mit Komposition von Modulhomomorphismen kompatibel ist.

ÜBUNGSAUFGABE A.6.18. *Beweisen Sie, dass in der vorigen Diskussion die Sequenzen  $0 \rightarrow A \rightarrow X \times_B B' \rightarrow B' \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow A' \rightarrow A' \cup_A X \rightarrow B \rightarrow 0$  wieder Erweiterungen sind.*

DEFINITION A.6.19. *Seien  $\Xi: 0 \rightarrow A \rightarrow X \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  und  $\Xi': 0 \rightarrow A \rightarrow X' \xrightarrow{f'} B \rightarrow 0$  zwei Erweiterungen. Wir definieren die Baer-Summe  $\Xi \oplus \Xi'$  als Bild der direkten Summe der Erweiterungen*

$$0 \rightarrow A \oplus A \rightarrow X \oplus X' \rightarrow B \oplus B \rightarrow 0$$

unter den von der Diagonale  $\Delta_B: B \hookrightarrow B \oplus B$  und der Summe  $+_A: A \oplus A \rightarrow A$  induzierten Abbildungen

$$\mathcal{E}(B \oplus B, A \oplus A) \xrightarrow{\Delta_B^*} \mathcal{E}(B, A \oplus A) \xrightarrow{(+_A)_*} \mathcal{E}(B, A).$$

BEMERKUNG A.6.20. *Mit dieser Definition wird  $\mathcal{E}(B, A)$  zu einer abelschen Gruppe, deren neutrales Element die spaltende Erweiterung ist.*

DEFINITION A.6.21. *Sei  $R$  ein Ring und  $\Xi: 0 \rightarrow A \rightarrow X \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  eine Erweiterung. Wir können  $\text{Ext}_R^\bullet(B, -)$  anwenden und bekommen aus Proposition A.6.9 eine lange exakte Sequenz mit Randabbildung  $\partial: \text{Hom}_R(B, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, A)$ . Wir bezeichnen mit  $[\Xi] := \partial(\text{id}_B)$  die Klasse der Erweiterung  $\Xi$  in der Ext-Gruppe  $\text{Ext}_R^1(B, A)$ .*

SATZ A.6.22. *Sei  $R$  ein Ring und  $A, B$  zwei  $R$ -Moduln. Die Zuordnung  $\Xi \mapsto [\Xi]$  induziert funktorielle Isomorphismen  $\mathcal{E}(B, A) \xrightarrow{\cong} \text{Ext}_R^1(B, A)$  von abelschen Gruppen.*

BEWEIS. Wir wählen eine Erweiterung  $\Theta: 0 \rightarrow M \xrightarrow{j} P \rightarrow B \rightarrow 0$ , in der  $P$  projektiv ist. Um die Surjektivität zu zeigen, wenden wir  $\text{Ext}_R^\bullet(-, A)$  an und erhalten aus Proposition A.6.9 (4) eine exakte Sequenz

$$\text{Hom}_R(P, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{\partial} \text{Ext}_R^1(B, A) \rightarrow 0$$

Wir können für  $x \in \text{Ext}_R^1(B, A)$  ein Urbild  $\beta \in \text{Hom}_R(M, A)$  unter  $\partial$  wählen. Durch Anwendung des induzierten Homomorphismus  $\beta_*: \mathcal{E}(B, M) \rightarrow \mathcal{E}(B, A)$  erhalten wir

eine Erweiterung  $\Xi := \beta_*(\Theta) \in \mathcal{E}(B, A)$ . Die Natürlichkeit der Randabbildung in der langen-exakten Sequenz aus Proposition A.6.9 zeigt, dass  $[\Xi] = x$  in  $\text{Ext}^1(B, A)$  ist. Genauer gibt diese Konstruktion eine Umkehrabbildung  $\Psi: \text{Ext}^1(B, A) \rightarrow \mathcal{E}(B, A)$ : jedes andere Urbild  $\beta' \in \text{Hom}_R(M, A)$  unterscheidet sich von  $\beta$  durch einen Homomorphismus  $\alpha \in \text{Hom}_R(P, A)$  und liefert eine äquivalente Erweiterung.

Um die Injektivität zu zeigen, erhalten wir für eine gegebene Erweiterung  $\Xi: 0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A$  aus der Anhebungseigenschaft für  $P$  (Definition A.4.3) ein kommutatives Diagramm

$$\Xi: \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow \tau & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & X & \longrightarrow & B \longrightarrow 0, \end{array}$$

in dem  $X$  der Pushout von  $j$  und  $\gamma$  ist. Insbesondere ist  $\Xi$  äquivalent zur Erweiterung für  $[\Xi]$ , die im Beweis der Surjektivität konstruiert wurde. Dies zeigt die Injektivität.

Wir zeigen nun, dass wir einen Homomorphismus haben, dass also für zwei Erweiterungen  $\Xi$  und  $\Xi'$  gilt  $[\Xi \oplus \Xi'] = [\Xi] + [\Xi']$ . Aus dem Beweis der Injektivität haben wir Abbildungen  $\tau: P \rightarrow X$  und  $\tau': P \rightarrow X'$ . Diese induzieren eine Abbildung  $\tau'': P \rightarrow X''$  wobei  $X''$  der Modul in der Baer-Summe  $\Xi \oplus \Xi'$  ist. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\Xi \oplus \Xi': \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & P & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \gamma + \gamma' & & \downarrow \tau'' & & \downarrow = \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & X'' & \longrightarrow & B \longrightarrow 0, \end{array}$$

Unter der Randabbildung  $\partial: \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Ext}^1(B, A)$  ist dann

$$[\Xi \oplus \Xi'] = \partial(\gamma + \gamma') = \partial(\gamma) + \partial(\gamma') = [\Xi] + [\Xi']. \quad \square$$

## Literatur

- [Gal79] D. Gale. “The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem”. In: *American Mathematical Monthly* 86 (10 1979), S. 818–827.
- [Ghr14] Robert Ghrist. *Elementary applied topology*. 2014, S. vi+269. ISBN: 978-1-5028-8085-7.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, S. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X; 0-521-79540-0.
- [Sch86] S.H. Schanuel. “What is the length of a potato? An introduction to geometric measure theory”. In: *Categories in Continuum Physics*. Bd. 1174. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1986, S. 118–126.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Bd. 38. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, S. xiv+450. ISBN: 0-521-43500-5; 0-521-55987-1. DOI: 10 . 1017 / CB09781139644136. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09781139644136>.