

Aufgabe 1

- a) Welche Reste modulo 7 kann eine Quadratzahl annehmen?
- b) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente in $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$.
- c) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 649 und 341 und eine Darstellung $\text{ggT}(649, 341) = 649 \cdot a + 341 \cdot b$.
- d) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von 700 und 643 in \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}[i]$.
- e) Bestimmen Sie $\varphi(222)$.
- f) Was ist das multiplikative Inverse von 19 in $\mathbb{Z}/222\mathbb{Z}$?
- g) Bestimmen Sie die Einheiten und die Nullteiler von $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.
- h) Bestimmen Sie die Primitivwurzeln von $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^*$.
- i) Bestimmen Sie die Legendre-Symbole $\left(\frac{9}{113}\right)$ und $\left(\frac{35}{709}\right)$.
- j) Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler von $5 + 2i$ und $2 + 5i$ in $\mathbb{Z}[i]$.
- k) Bestimmen Sie alle primitiven pythagoräischen Zahlentripel (a, b, c) mit $a < 10$.
- l) Schreiben Sie alle Zahlen $n \leq 20$ als Summe von vier Quadraten.
- m) Schreiben Sie alle Primzahlen $p \leq 29$ mit $p \equiv 1 \pmod{4}$ als Summe von zwei Quadraten.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle ganzen Zahlen, die simultan die Kongruenzen

$$4x \equiv 2 \pmod{9}, \quad 2x \equiv 7 \pmod{11}, \quad 3x \equiv 2 \pmod{17}$$

lösen.

Aufgabe 3

Sei $p > 2$ eine Primzahl und q die kleinste natürliche Zahl, so dass $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$. Zeigen Sie, dass q eine Primzahl ist.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Diophantischen Gleichungen sind lösbar?

- a) $781x + 77y = 33$
- b) $781x + 77y = 12$
- c) $X^2 + 2X + Y^2 = -2$
- d) $X^2 - 7X + 10 = 0$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $42 \mid n^7 - n$

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 2 \pmod{3}$ gibt.

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass $\sum_{i=0}^k 10^i$ keine Quadratzahl ist.

Aufgabe 8

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- a) Die Summe dreier aufeinanderfolgender Zahlen ist keine Quadratzahl.
- b) Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Zahlen ist keine Quadratzahl.
- c) Die natürliche Abbildung $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist surjektiv für alle $m, n \geq 2$.
- d) Alle Gruppen mit drei Elementen sind zyklisch und isomorph zueinander.
- e) Alle invertierbaren Elemente einer zyklischen Gruppe sind Erzeuger der Gruppe.
- f) 1004 ist als Summe von zwei Quadraten darstellbar.
- g) Ist (a, b, c) ein primitives pythagoräisches Zahlentripel, so ist c die Summe von zwei Quadraten.

h) Es gilt

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^3 - p^2 - p + 1}{32}}$$

für alle Primzahlen p .

i) Die Kongruenz $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$ ist lösbar.