Beispiel zur Rationalen Normalform

Vorbemerkung: Sei $A \in k^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Dann definiert A eine lineare Abbildung, $f_A : k^n \to k^n, v \mapsto Av$, die im folgenden A genannt wird. Fixiert man eine Basis $\mathcal{B}$ von k^n, so sei $M_{\mathcal{B}}(A)$ die entsprende darstellende Matrix von A bzgl. $\mathcal{B}$. Für die kanonische Basis $\mathcal{K} = (e_1, \ldots, e_n)$ gilt also $A = M_{\mathcal{K}}(A)$.

Zunächst zwei nützliche Bemerkungen:

- Ist $\mu_A = \chi_A$, so ist A ähnlich zu $B(\mu_A)$. Es existiert nämlich ein Vektor $v \in k^n$, so dass $\mu_{A,v} = \mu_A$. Für ein solches $v \in k^n$ ist in diesem Fall $\mathcal{B} = (v, Av, \ldots, A^{n-1}v)$ eine Basis von k^n und es gilt $M_{\mathcal{B}}(A) = B(\mu_A)$. Ist zum Beispiel $A = J(\lambda, n)$ ein Jordanblock der Größe n mit λ auf der Diagonalen, so ist $\mu_A = \chi_A = (X-\lambda)^n$ (überlegen Sie sich warum).

- Ist
$$A = \begin{pmatrix} B(P_1) & C_1 \\ 0 & B(P_2) \end{pmatrix}$$
mit $P_2 \mid P_1$, so kann man die Rationale Normalform von A bereits ablesen, nämlich
$$R = \begin{pmatrix} B(P_1) & 0 \\ 0 & B(P_2) \end{pmatrix}.$$
Eine analoge Aussage hat man für Matrizen mit r Diagonalblöcken $B(P_i)$ (siehe Vorlesung).

Sei nun
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Kette
$$e_2 \xrightarrow{A} e_3 \xrightarrow{A} e_2, \text{ also gilt } A^2e_2 = e_2.$$

Damit erhält man $\mu_{A,e_2} = X^2 - 1$. Da
$$\mu_{A,e_2}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

gilt $\mu_A \neq \mu_{A,e_2}$ (siehe auch die Definition des Minimalpolynoms). Wähle also $e_4 \notin \mathrm{Kern}(\mu_{A,e_2}(A))$. Dann gilt $\mu_{A,e_4} = X - 2$, da $Ae_4 = 2e_4$. Da $\mathrm{ggT}(\mu_{A,e_2}, \mu_{A,e_4}) = 1$, gilt nach dem Verfahren aus der Vorlesung für $v = e_2 + e_4$, dass
$$\mu_{A,v} = \mathrm{kgV}(\mu_{A,e_2}, \mu_{A,e_4}) = (X^2-1)(X-2) = X^3 - 2X^2 - X + 2.$$

Das kann man auch nochmal direkt nachrechnen
$$v \xrightarrow{A} (0,0,1,2)^t \xrightarrow{A} (0,1,0,4)^t \xrightarrow{A} (0,0,1,8)^t.$$

Insbesondere gilt:
$$A^3v = (0,0,1,8)^t = 2(0,1,0,4)^t + (0,0,1,2)^t - 2(0,1,0,1) = 2A^2v + Av - 2v.$$

Ergänzen von (v, Av, A^2v) mit e_1 zu einer Basis $\mathcal{B}$ ergibt

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Rationaler Normalform.

Bemerkung: In diesem Beispiel (!) reicht es aus, das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom zu kennen, also $\mu_A = (X-1)(X+1)(X-2)$ und $\chi_A = (X-1)^2(X+1)(X-2)$. Der erste Block ist immer die Begleitmatrix des Minimalpolynoms. Also gibt es in diesem Fall nur noch einen weiteren Block. Da für eine Matrix in Rationaler Normalform mit Blöcken $B(P_1), \ldots, B(P_r)$ gilt, dass $\chi_A = P_1 \ldots P_r$, muss in diesem Fall $P_2 = (X-1)$ sein.