Übungen zu Lie-Algebren | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8 | PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 11.12.2018 | PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper und $\mathfrak{L} := \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{L}_i$, für endlich-dimensionale K-Lie-Algebren $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_n$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Man zeige: Es gilt $\mathrm{rad}(\mathfrak{L}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{rad}(\mathfrak{L}_i)$ und $\mathrm{nil}(\mathfrak{L}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{nil}(\mathfrak{L}_i)$.

Aufgabe 2

Es seien $\mathfrak{I} \trianglelefteq \mathfrak{L}$ ein Ideal, und für $x \in \mathfrak{L}$ sei $\overline{x} := \nu_{\mathfrak{I}}(x) \in \mathfrak{L}/\mathfrak{I}$. Man zeige: $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ hat abstrakte Jordan-Chevalley-Zerlegungen und es gilt $(\overline{x})_s = \overline{x_s}$ und $(\overline{x})_n = \overline{x_n}$.

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper, und $\mathfrak{L} := \mathfrak{gl}_n(K)$, für ein $n \in \mathbb{N}$.

a) Man zeige: Die Killing-Form κ von $\mathfrak{L}$ ist gegeben durch

$$\kappa(A, B) = 2n\mathrm{Tr}(AB) - 2\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B), \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{L}.$$

b) Im Falle $\mathrm{char}(K) = 0$ bestimme man das Radikal $\mathrm{rad}(\kappa)$ von κ.

Aufgabe 4

Es sei K ein Körper. Man zeige: Jede nilpotente endlich-dimensionale K-Lie-Algebra $\mathfrak{L} \neq \{0\}$ besitzt eine nicht-innere Derivation.

Hinweis. Es seien $\mathfrak{I} \trianglelefteq \mathfrak{L}$ mit $\dim_K(\mathfrak{L}/\mathfrak{I}) = 1$, und $x \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{I}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $C_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{I}) \not\subseteq \mathfrak{L}^{[n]}$, und $y \in C_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{I}) \setminus \mathfrak{L}^{[n]}$. Dann betrachte man den K-Endomorphismus ∂ mit $\partial(K) = \{0\}$ und $\partial(x) = y$.