Übungen zu Lie-Algebren	Bergische Universität Wuppertal
Blatt 7	PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 04.12.2018	PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper und $\mathfrak{L}$ eine K-Lie-Algebra mit $\dim_K(\mathfrak{L}) < \infty$. Man zeige, dass $\mathfrak{L}$ genau dann halbeinfach ist, wenn $\mathfrak{L}$ keine nicht-verschwindenden kommutativen Ideale besitzt.

Aufgabe 2

Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, und $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(K)$ ist halbeinfach.

Hinweis. Man benutze den Satz von Lie, und die Tatsache, dass das Radikal in jeder maximalen auflösbaren Lie-Unteralgebra enthalten ist.

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper. Man bestimme jeweils die Gram-Matrix der Killing-Form κ der folgenden K-Lie-Algebren bezüglich der angegebenen K-Basis, sowie das Radikal $\mathrm{rad}(\kappa)$. Wie verhalten sich $\mathrm{rad}(\kappa)$ und $\mathrm{rad}(\mathfrak{L})$ zueinander?

a) Es sei $\mathfrak{L} := \langle x, y \rangle_K$ die K-Lie-Algebra mit $[x, y] := y$ (vgl. Aufgabe 2 von Blatt 1).

b) Es sei $\mathfrak{K} := \langle x, y, z \rangle_K$ die drei-dimensionale K-Lie-Algebra mit $[x, y] := z$ und $[x, z] := y$ und $[y, z] := 0$. (Hier ist noch zu zeigen, dass $\mathfrak{K}$ tatsächlich eine Lie-Algebra ist, vgl. Aufgabe 1 von Blatt 1).