Übungen zu Lie-Algebren | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 | PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 27.11.2018 | PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper, und $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ zwei K-Lie-Algebren. Sei $\rho\colon \mathfrak{L} \to \mathrm{Der}_K(\mathfrak{M})$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus. Man betrachte den K-Vektorraum $\mathfrak{K} := \mathfrak{L} \times \mathfrak{M}$, zusammen mit der Multiplikation

$$[(A,v),(B,w)] := ([A,B],[v,w] + \rho(A)w - \rho(B)v) \quad \text{für alle } v,w \in \mathfrak{M} \text{ und } A,B \in \mathfrak{L}.$$

Man zeige: $\mathfrak{K}$ ist eine K-Lie-Algebra, die $\mathfrak{M} \cong (0,\mathfrak{M})$ als Ideal und $\mathfrak{L} \cong (\mathfrak{L},0)$ als Lie-Unteralgebra besitzt. Die Lie-Algebra $\mathfrak{K}$ wird als das **semidirekte Produkt** von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ bezeichnet; wir schreiben $\mathfrak{K} = \mathfrak{L} \ltimes \mathfrak{M}$.

Aufgabe 2

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass im Satz von Lie auf die Voraussetzung an die Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers nicht verzichtet werden kann. Dazu seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, und $A, B \in K^{p\times p}$ gegeben als

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & p-2 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & p-1 \end{bmatrix}.$$

Man zeige: $\mathfrak{L} := \langle A, B\rangle_K \subseteq \mathfrak{gl}_p(K)$ ist eine Lie-Unteralgebra. Man bestimme die abgeleitete Reihe und die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{L}$, und zeige, dass $\mathfrak{L}$ auflösbar ist, aber keinen gemeinsamen Eigenvektor besitzt. Ist $\mathfrak{L}$ nilpotent? Ist $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ nilpotent? Besteht $[\mathfrak{L},\mathfrak{L}]$ aus nilpotenten Endomorphismen?

Aufgabe 3

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass auch für die Folgerungen des Satzes von Lie auf die Voraussetzung an die Charakteristik des zugrundeliegenden Körpers nicht verzichtet werden kann. Dazu seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, und $K^{p\times 1}$ werde als kommutative K-Lie-Algebra betrachtet. Für $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{gl}_p(K)$ wie in Aufgabe 3 sei $\widehat{\mathfrak{L}} := \mathfrak{L} \ltimes K^{p\times 1}$ das semidirekte Produkt wie in Aufgabe 1.

Man bestimme die abgeleitete Reihe und die absteigende Zentralreihe von $\widehat{\mathfrak{L}}$, und zeige, dass $\widehat{\mathfrak{L}}$ auflösbar, aber $[\widehat{\mathfrak{L}},\widehat{\mathfrak{L}}]$ nicht nilpotent ist.

Aufgabe 4

Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ zwei vertauschbare K-Endomorphismen. Für die Jordan-Chevalley-Zerlegung zeige man: Es gilt $(\varphi+\psi)_s = \varphi_s + \psi_s \in \mathrm{End}_K(V)$ und $(\varphi+\psi)_n = \varphi_n + \psi_n \in \mathrm{End}_K(V)$. Kann man auf die Voraussetzung der Vertauschbarkeit verzichten?