Übungen zu Lie-Algebren Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5 PD Dr. Jürgen Müller
Abgabe bis 20.11.2018 PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Man zeige: Die orthogonale Lie-Algebra $\mathfrak{o}_4(K)$ ist die direkte Summe zweier Ideale, die beide isomorph zu $\mathfrak{sl}_2(K)$ sind.

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 3$. Man zeige: $\mathfrak{sl}_3(K)$ ist einfach.

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper. Man zeige:

a) Es gilt
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}; a, b \in K \right\rangle = \mathrm{SL}_2(K).$$

b) Für $A \in \mathrm{GL}_2(K)$ sei $\mathrm{Ad}(A)\colon \mathfrak{gl}_2(K) \to \mathfrak{gl}_2(K)\colon M \mapsto AMA^{-1}$. Man zeige: Dadurch wird eine Darstellung $\mathrm{Ad}\colon \mathrm{GL}_2(K) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_2(K))$ definiert. Man bestimme $\ker(\mathrm{Ad})$.

c) Für $t \in K^*$ seien
$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K) \quad \text{und} \quad T(t) := \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(K).$$
Man schreibe S und $T(t)$ als Produkte geeigneter Erzeuger aus a), und bestimme die Automorphismen $\mathrm{Ad}(S)$ und $\mathrm{Ad}(T(t))$ von $\mathfrak{sl}_2(K)$. Was fällt auf?

Aufgabe 4

Es seien K ein Körper, $n \geq 2$, und $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_n(K)$. Man zeige: $\mathfrak{L} \to \mathfrak{L}\colon A \mapsto -A^{\mathrm{tr}}$ ist ein Lie-Algebren-Automorphismus von $\mathfrak{L}$. Was passiert für $n = 2$?