Übungen zu Lie-Algebren
Blatt 4
Abgabe bis 13.11.2018

Bergische Universität Wuppertal
PD Dr. Jürgen Müller
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es sei $\mathfrak{L}$ eine endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Lie-Algebra. Man zeige, dass $\mathfrak{L}$ genau dann nilpotent ist, wenn jede zwei-dimensionale Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{L}$ abelsch ist.

Aufgabe 2

Es seien K ein Körper und $\mathfrak{L}$ eine K-Lie-Algebra. Man zeige:

a) Für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt $[\mathfrak{L}^i, \mathfrak{L}^j] \subseteq \mathfrak{L}^{i+j+1}$.

b) Ist $\mathfrak{L}$ nilpotent der Länge $l \in \mathbb{N}_0$, so ist $\mathfrak{L}$ auflösbar der Länge $\leq \lceil \log_2(l+1) \rceil$.

c) Sind $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \trianglelefteq \mathfrak{L}$ nilpotente Ideale, so ist auch $\mathfrak{I} + \mathfrak{J} \trianglelefteq \mathfrak{L}$ nilpotent. Wie verhalten sich die zugehörigen nilpotenten Längen zueinander?

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper und $\mathfrak{L}$ eine K-Lie-Algebra. Man zeige:

a) $\mathfrak{L}$ ist genau dann auflösbar, wenn $\mathrm{ad}_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{L})$ auflösbar ist.

b) $\mathfrak{L}$ ist genau dann auflösbar, wenn es eine Kette von K-Lie-Unteralgebren $\{0\} = \mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{L}_k = \mathfrak{L}$ gibt, für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so dass $\mathfrak{L}_{i-1} \trianglelefteq \mathfrak{L}_i$ ist und $\mathfrak{L}_i/\mathfrak{L}_{i-1}$ abelsch ist, für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Aufgabe 4

Es seien K ein Körper, und $\mathfrak{L}$ eine K-Lie-Algebra mit $\dim_K(\mathfrak{L}) < \infty$. Weiter sei $\mathfrak{I} \trianglelefteq \mathfrak{L}$, so dass $\mathfrak{L}/\mathfrak{I}$ nilpotent ist und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{L}}(x)|_{\mathfrak{I}}$ nilpotent ist, für alle $x \in \mathfrak{L}$. Man zeige: $\mathfrak{L}$ ist nilpotent.