Übungen zu Lie-Algebren
Blatt 3
Abgabe bis 06.11.2018

Bergische Universität Wuppertal
PD Dr. Jürgen Müller
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Man zeige: Die $\mathbb{R}$-Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{su}_2^+(\mathbb{C})$ sind nicht isomorph.

Hinweis. Für die obigen Lie-Algebren $\mathfrak{L}$ und ein allgemeines Element $A \in \mathfrak{L}$ untersuche man die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{ad}_{\mathfrak{L}}(A)$ auf Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 2

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Sei weiter $\mathfrak{z}_n(K) := K \cdot E_n$ die Menge der Skalarmatrizen. Man zeige:

a) Es gilt $[\mathfrak{gl}_n(K), \mathfrak{gl}_n(K)] = \mathfrak{sl}_n(K)$ und $[\mathfrak{sl}_n(K), \mathfrak{sl}_n(K)] = \mathfrak{sl}_n(K)$. Was sind jeweils die abgeleitete und die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{gl}_n(K)$ und $\mathfrak{sl}_n(K)$?

b) Es gilt $Z(\mathfrak{gl}_n(K)) = \mathfrak{z}_n(K)$, sowie $Z(\mathfrak{sl}_n(K)) = \{0\}$, falls $\mathrm{char}(K) \nmid n$, und $Z(\mathfrak{sl}_n(K)) = \mathfrak{z}_n(K)$, falls $\mathrm{char}(K) \mid n$. Man bestimme $\mathfrak{sl}_n(K) + \mathfrak{z}_n(K) \trianglelefteq \mathfrak{gl}_n(K)$,

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Man zeige:

a) Für $n \geq 1$ gilt $[\mathfrak{sp}_{2n}(K), \mathfrak{sp}_{2n}(K)] = \mathfrak{sp}_{2n}(K)$.

b) Für $n \geq 2$ gilt $[\mathfrak{o}_n(K), \mathfrak{o}_n(K)] = \mathfrak{o}_n(K)$.

Aufgabe 4

Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Man bestimme die K-Dimensionen der Lie-Algebren $\mathfrak{b}_n(K)$, $\mathfrak{n}_n(K)$ und $\mathfrak{t}_n(K)$, und zeige, dass $\mathfrak{b}_n(K) = \mathfrak{n}_n(K) \oplus \mathfrak{t}_n(K)$ als K-Vektorräume gilt.

b) Man bestimme jeweils die abgeleitete Reihe und die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{b}_n(K)$ und $\mathfrak{n}_n(K)$.

c) Man zeige, dass die Lie-Algebren $\mathfrak{b}_n(K)$ und $\mathfrak{t}_n(K)$ in $\mathfrak{gl}_n(K)$ selbst-normalisierend sind, und dass $N_{\mathfrak{gl}_n(K)}(\mathfrak{n}_n(K)) = \mathfrak{b}_n(K)$ gilt.