Aufgabe 1

Man betrachte das wie folgt gegebene **Vektorprodukt** auf $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Man zeige, dass $\mathbb{R}^3$ damit zu einer $\mathbb{R}$-Lie-Algebra wird und bestimme ihre Strukturkonstanten bezüglich der $\mathbb{R}$-Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2

a) Man gebe die Strukturkonstanten der $\mathbb{R}$-Lie-Algebren $\mathfrak{o}_3^+(\mathbb{R})$ und $\mathfrak{su}_2^+(\mathbb{C})$, jeweils bezüglich geeignet gewählter $\mathbb{R}$-Basen, an.

b) Man konstruiere Isomorphismen $(\mathbb{R}^3, \times) \cong \mathfrak{o}_3^+(\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}_2^+(\mathbb{C})$ von $\mathbb{R}$-Lie-Algebren; dabei bezeichne $(\mathbb{R}^3, \times)$ die Vektor-Algebra aus Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper, $\mathfrak{A}$ eine nicht-assoziative K-Algebra mit Multiplikation μ und $\partial \in \mathrm{Der}_K(\mathfrak{A})$ eine Derivation. Man zeige die **Leibniz-Regel** für Derivationen, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\partial^n(\mu(a,b)) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mu(\partial^i a, \partial^{n-i} b).$$

Dabei sei $\partial^0 = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$.

Aufgabe 4

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{P} := K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ über K. Man zeige:

a) Sind $\partial \in \mathrm{Der}_K(\mathfrak{P})$ und $f \in \mathfrak{P}$, so wird durch $f\partial \colon g \mapsto f \cdot \partial g$, für alle $g \in \mathfrak{P}$, eine Derivation von $\mathfrak{P}$ definiert. Damit wird $\mathrm{Der}_K(\mathfrak{P})$ also zu einem $\mathfrak{P}$-Modul.

b) Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ wird durch $\partial_i \colon X_j \mapsto \delta_{ij} \cdot 1_{\mathfrak{P}}$, für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, eine Derivation von $\mathfrak{P}$ definiert. Man bestimme den Kommutator $[\partial_i, \partial_j] \in \mathrm{Der}_K(\mathfrak{P})$, für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

c) Ist $\partial \in \mathrm{Der}_K(\mathfrak{P})$, so gibt es eindeutig bestimmte $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{P}$ mit $\partial = \sum_{i=1}^{n} f_i \partial_i$. Also ist $\mathrm{Der}_K(\mathfrak{P})$ ein freier $\mathfrak{P}$-Modul mit Basis $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$.