Übungen zu Lie-Algebren
Blatt 12
Abgabe bis 23.01.2019

Bergische Universität Wuppertal
PD Dr. Jürgen Müller
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$ und $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_2(K)$. Für die folgenden $\mathfrak{L}$-Moduln gebe man jeweils K-Basen der Gewichtsräume an, und schreibe sie explizit als direkte Summe einfacher $\mathfrak{L}$-Moduln:

a) Die K-Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ ist in natürlicher Weise in $\widehat{\mathfrak{L}} := \mathfrak{gl}_2(K)$ eingebettet, so dass $\widehat{\mathfrak{L}}$ via $\mathrm{ad}_{\widehat{\mathfrak{L}}}|_{\mathfrak{L}}$ zu einem $\mathfrak{L}$-Modul wird. Wie kann man diesen $\mathfrak{L}$-Modul als Tensorprodukt interpretieren?

b) Die K-Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ ist durch $A \mapsto \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ in $\widetilde{\mathfrak{L}} := \mathfrak{sl}_3(K)$ eingebettet, so dass $\widetilde{\mathfrak{L}}$ via $\mathrm{ad}_{\widetilde{\mathfrak{L}}}|_{\mathfrak{L}}$ zu einem $\mathfrak{L}$-Modul wird.

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Man zeige, dass die K-Lie-Algebren $\mathfrak{sp}_{2n}(K)$, für $n \geq 1$, und $\mathfrak{o}_n(K)$, für $n \geq 2$, halbeinfach sind.

Aufgabe 3

Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$. Man zeige, dass $\mathfrak{t}_n(K) \cap \mathfrak{sl}_n(K)$ in $\mathfrak{sl}_n(K)$ für $n \geq 1$ selbst-normalisierend ist.

Aufgabe 4

Es seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, sowie $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_n(K)$, für ein $n \in \mathbb{N}$, und $\mathfrak{H} := \mathfrak{t}_n(K) \cap \mathfrak{L}$.

a) Man zeige, dass $\mathfrak{H}$ eine maximale torale K-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{L}$ ist.

b) Man bestimme die Menge der Wurzeln $\Phi \subseteq \mathfrak{H}^*$ von $\mathfrak{L}$, sowie die zugehörigen Wurzelräume $\mathfrak{L}_\alpha \leq_K \mathfrak{L}$, für $\alpha \in \Phi$.

c) Man bestimme die Einschränkung der Killing-Form κ von $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{H}$.

d) Man berechne die zur K-Standardbasis von $\mathfrak{L}$ duale K-Basis bezüglich κ.