Aufgabe 1

Es seien K ein Körper und $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_2(K)$. Es sei $K[X,Y] = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} K[X,Y]_m$ der Polynomring in den Unbestimmten X und Y über K, mit der durch den Totalgrad gegebenen Graduierung. Dann wird $K[X,Y]_0 = \langle 1\rangle_K \cong K$ zu einem trivialen $\mathfrak{L}$-Modul; und identifiziert man $K[X,Y]_1$ durch Wahl der K-Basis $\{X,Y\} \subseteq K[X,Y]_1$ mit $K^{2\times 1}$, so wird $K[X,Y]_1$ in natürlicher Weise zu einem $\mathfrak{L}$-Modul.

a) Man zeige: Durch $A\cdot fg := (Af)g + f(Ag)$, für alle $A \in \mathfrak{L}$ und $f,g \in K[X,Y]$, kann diese $\mathfrak{L}$-Operation eindeutig zu einer $\mathfrak{L}$-Operation auf $K[X,Y]$ fortgesetzt werden, bezüglich derer $K[X,Y]$ zu einem graduierten $\mathfrak{L}$-Modul wird. Für $m \in \mathbb{N}_0$ gebe man die darstellenden Matrizen für die Standardbasiselemente $\{E,H,F\}$ von $\mathfrak{L}$ bezüglich einer geeignet gewählten K-Basis von $K[X,Y]_m$ an.

b) Es sei $\mathrm{char}(K) = 0$. Man zeige explizit, und ohne die Verwendung der Klassifikation der einfachen $\mathfrak{L}$-Moduln, dass $K[X,Y]_m$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ ein einfacher $\mathfrak{L}$-Modul mit $\dim_K(K[X,Y]_m) = m+1$ ist. Man gebe K-Basen der Gewichtsräume von $K[X,Y]_m$ an. (Dies zeigt also nochmals, dass $\mathfrak{L}$ irreduzible Darstellungen beliebiger endlicher Dimension besitzt.)

c) Nun sei $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Man zeige, dass $K[X,Y]_m$ für $m \in \{0,\ldots,p-1\}$ ein einfacher $\mathfrak{L}$-Modul ist, dass aber $K[X,Y]_p$ nicht einfach ist.

Aufgabe 2

Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, sowie $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_2(K)$ und $V^{(m)}$ der einfache $\mathfrak{L}$-Modul mit Höchstgewicht $m \in \mathbb{N}_0$.

a) Man zeige: Der kontragrediente $\mathfrak{L}$-Modul $(V^{(m)})^*$ ist einfach, und es gilt $(V^{(m)})^* \cong V^{(m)}$. Man gebe K-Basen der Gewichtsräume von $(V^{(m)})^*$ an.

b) Für $m,l \in \mathbb{N}_0$ gebe man K-Basen der Gewichtsräume des Tensorproduktmoduls $V^{(m)} \otimes_K V^{(l)}$ an. Daraus folgere man den **Satz von Clebsch-Gordan**: Für $m \geq l$ gilt $V^{(m)} \otimes_K V^{(l)} = V^{(m+l)} \oplus V^{(m+l-2)} \oplus \cdots V^{(m-l+2)} \oplus V^{(m-l)}$ als $\mathfrak{L}$-Moduln.

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = 0$, sowie $\mathfrak{L} := \mathfrak{sl}_2(K)$ und $\varphi\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine endlich-dimensionale Darstellung. Dann kann V bekanntlich als direkte Summe einfacher $\mathfrak{L}$-Moduln geschrieben werden. Man gebe einen Algorithmus an, der eine an eine solche Zerlegung angepasste K-Basis von V berechnet.