Übungen zu Lie-Algebren
Blatt 1
Abgabe bis 25.10.2018

Bergische Universität Wuppertal
PD Dr. Jürgen Müller
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Es seien K ein Körper, $\mathfrak{A}$ eine nicht-assoziative K-Algebra mit Multiplikation μ, und $\{e_1, \ldots, e_d\} \subseteq \mathfrak{A}$ eine K-Basis, wobei $d := \dim_K(\mathfrak{A}) \in \mathbb{N}_0$. Man zeige: $\mathfrak{A}$ ist genau dann eine Lie-Algebra, wenn für alle $i < j < k \in \{1, \ldots, d\}$ gilt:

$$\mu(e_i, e_i) = 0, \quad \mu(e_i, e_j) + \mu(e_j, e_i) = 0 \quad \text{und}$$

$$\mu(e_i, \mu(e_j, e_k)) + \mu(e_j, \mu(e_k, e_i)) + \mu(e_k, \mu(e_i, e_j)) = 0.$$

Aufgabe 2

Es sei K ein Körper. Man bestimme bis auf Isomorphie alle K-Lie-Algebren $\mathfrak{L}$ mit $\dim_K(\mathfrak{L}) \leq 2$, und gebe ihre Strukturkonstanten bezüglich geeignet gewählter K-Basen an.

Aufgabe 3

a) Man konstruiere eine Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$ und zeige, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = n(n-1)/2.$$

b) Man konstruiere eine Basis für die Lie-Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ und zeige, dass

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = 2n^2 + n.$$

Aufgabe 4

a) Man konstruiere Isomorphismen von Lie-Algebren

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{o}_3(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$$

und bestimme die Strukturkonstanten bezüglich geeigneter Basen.

b) Man konstruiere einen Isomorphismus

$$\mathfrak{o}_5(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}_4(\mathbb{C}).$$

Weitere Informationen: http://www2.math.uni-wuppertal.de/∼ weist