Übungen zur Linearen Algebra I — Bergische Universität Wuppertal
Blatt 8 — Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 09.06.2011, 12 Uhr — Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

a) Bestimme den Kern und das Bild (inkl. der Dimension) der folgenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_4, x_1 - x_2 - 4x_4, x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4),$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4)$$

b) Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Gebe ein Beispiel für eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, ein Erzeugendensystem $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$ und eine lineare Abbildung $0 \neq f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ an, so dass $\langle f(v_1), f(v_2), f(v_3)\rangle$ keine Basis und $\langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle$ kein Erzeugendensystem ist.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x + y \\ x - b \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Seien K ein Körper, X, Y, Z drei endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei lineare Abbildungen. Zeige

a) $g \circ f : X \to Z$ ist linear.

b) $\ker(f) \subseteq \ker(g \circ f)$ bzw. $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Bild}(g)$.

c) Ist f bijektiv, so ist auch $f^{-1} : Y \to X$ linear.

Aufgabe 4

Seien V, W ein endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $U_1 \subseteq V$ und $U_2 \subseteq W$ Unterräume. Zeige:

a) $f(U_1)$ ist ein Unterraum von W.

b) $f^{-1}(U_2)$ ist ein Unterraum von V.

c) Ist f surjektiv und $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V, so ist $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ein Erzeugendensystem von W.