Übungen zur Linearen Algebra I Bergische Universität Wuppertal
Blatt 7 Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 01.06.2011, 18 Uhr Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Matrizen A, B, C, D, E über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne alle möglichen Produkte von je zwei der genannten Matrizen.

Aufgabe 2

Eine quadratische Matrix A heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n-mal}} = 0$. Eine $(l \times m)$-Matrix A mit Koeffizienten $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq m$, heißt obere Dreiecksmatrix, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i \geq j$. Zeige, dass alle quadratischen oberen Dreiecksmatrizen nilpotent sind.

Aufgabe 3

Bestimme den Lösungsraum der folgenden Linearen Gleichungssysteme:

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 19 \\ 12 \\ 2c \end{pmatrix} \text{ in Abhängigkeit von } c \in \mathbb{Q}.$$

Aufgabe 4

a) Bestimme den Rang der folgenden Matrizen:

(i) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(ii) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{Q}$.

b) Zeige, dass $C := \{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit der Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation ein Körper ist.