Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5 | Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 19.05.2011, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei X eine Menge und sei K ein Körper. Sei $M(X,K)$ die Menge der Abbildungen von X nach K. Sei $+ : M(X,K) \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und sei $\cdot : K \times M(X,K) \to M(X,K)$ gegeben durch $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in X$. Weiter sei für jedes $y \in X$ die Abbildung $e_y \in M(X,K)$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq y \\ 1, & \text{wenn } x = y \end{cases} .$$

Zeige:

a) $M(X,K)$ ist ein K-Vektorraum.

b) Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$, so ist das Tupel $(e_{y_1}, e_{y_2}, \ldots, e_{y_n}) \in M(X,K)^n$ linear unabhängig in $M(X,K)$.

c) Ist $X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ mit $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$, so ist das Tupel $(e_{y_1}, e_{y_2}, \ldots, e_{y_n}) \in M(X,K)^n$ eine Basis von $M(X,K)$.

Aufgabe 2

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Entscheide, ob

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2^2\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Entscheide, ob

$$\{f \in M(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \text{ für jedes } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 1\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $M(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 3

Zeige, dass $\mathbb{R}$ mit der üblichen Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der üblichen Multiplikation $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist. Berechne $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ und zeige, dass das Tupel $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4

Entscheide, ob V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist:

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \frac{1}{\lambda} v_2 \end{pmatrix}$ falls $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$, falls $\lambda = 0$.

b) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$.

c) $V = \mathbb{R}^2$ mit der Addition $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + 2w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$ und der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$.