Übungen zur Linearen Algebra I | Bergische Universität Wuppertal
Blatt 3 | Prof. Dr. Markus Reineke
Abgabe bis 05.05.2011, 12 Uhr | Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subset G$. Betrachte $\langle H \rangle$, definiert durch

$$\langle H \rangle = \{h_1 \cdot \ldots \cdot h_n \mid h_i \in H \text{ oder } h_i^{-1} \in H,\ n \geq 0\}.$$

a) Zeige, dass $(\langle H \rangle, \cdot)$ die kleinste Untergruppe von $(G, \cdot)$ ist, die H enthält (also insbesondere, dass $(\langle H \rangle, \cdot)$ eine Untergruppe ist).

b) Sei X eine Menge und $S(X) = \{f : X \to X \mid f \text{ bijektiv }\}$. Zeige, dass $(S(X), \circ)$ eine Gruppe ist. Wieso ist $(M(X), \circ)$ im Allgemeinen keine Gruppe, wobei $M(X)$ die Menge aller Abbildungen von X nach X bezeichnet?

Aufgabe 2

Für $n \geq 3$ sei $d \in S(\mathbb{R}^2)$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$ und $s \in S(\mathbb{R}^2)$ die Spiegelung an der x-Achse. Die Diedergruppe D_n ist definiert durch $D_n := \langle\{d, s\}\rangle$, also das Erzeugnis dieser Drehung und Spiegelung.

a) Wie viele Elemente hat D_n?

b) Geben Sie eine Gruppentafel für D_4 an.

c) Zeige, dass jede Drehung das Produkt zweier Spiegelungen ist. Das heißt, dass für jede Drehung d gilt, dass $d = s_0 s_1$ für zwei Spiegelungen s_0, s_1.

Aufgabe 3

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, dass für eine nichtleere Teilmenge H folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt, dass $h_1^{-1} \in H$ und $h_1 \cdot h_2 \in H$.

(ii) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt, dass $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$.

(iii) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt, dass $h_1 \cdot h_2 \in H$ und dass $(H, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 4

Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Abbildung. Zeige, dass eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann durch π faktorisiert (das heißt, dass es eine Abbildung $\bar{f} : X/\sim \to Y$ mit $f = \bar{f} \circ \pi = f$ gibt), wenn jede Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$ in einer Faser bzgl. f enthalten ist.