Aufgabe 1

Beweise folgende Aussagen per Induktion:

a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

b) Für alle reellen Zahlen x mit $x+1 \geq 0$ und alle natürlichen Zahlen n gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$.

c) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) Für jede ungerade natürliche Zahl n ist n^2-1 durch 8 teilbar.

Aufgabe 2

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und seien A, B zwei Teilmengen von X. Zeige:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

c) $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$

d) Konstruiere ein Beispiel für eine Abbildung $f : X \to Y$ und Teilmengen A, B von X, in dem $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Aufgabe 3

Konstruiere eine Folge $M_1, M_2, M_3, \ldots$ von Teilmengen von $\mathbb{Z}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$ unendlich ist und für die Menge

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in M_i \text{ für jedes } i \in \mathbb{N}\}$$

gilt $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$.

Aufgabe 4

Gegeben seien Mengen X, Y und Z sowie Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeige:

a) Sind f und g surjektiv (bzw. injektiv), so ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv)

b) Ist $g \circ f$ surjektiv (bzw. injektiv), so ist g surjektiv (bzw. f injektiv).

c) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

d) Sei $X = Z$. Konstruiere ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv ist, aber f nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.