Prof. Dr. Markus Reineke
Dipl.-Math. Magdalena Boos
Dr. Oliver Lorscheid

30. März 2010
Bearbeitungszeit:
10:00 bis 12:00

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Bitte in Blockschrift und lesbar ausfüllen:

Name:

Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Aufgabe	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6
Max. Punktzahl	8	4	4	4	4	4
Erreichte Punktzahl						

Gesamtpunktzahl (max. 28 Punkte):

Aufgabe 1: (8 Punkte) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Aussage	wahr	falsch
Für Teilmengen A, B einer Menge X gilt: $A \subset B \iff A \cup B = B$.	□	□
Die Vereinigung zweier Ursprungsgeraden im $\mathbf{R}^2$ ist ein Unterraum des $\mathbf{R}^2$.	□	□
Injektive lineare Abbildungen sind auch surjektiv.	□	□
Die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \mid x \mid$ ist surjektiv.	□	□
Jedes linear unabhängige System von Vektoren lässt sich zu einer Basis verkürzen.	□	□
Der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Unterraum von V.	□	□
Die Anzahl der Stufen einer $m \times n$-Matrix in Zeilenstufenform ist $\leq n$.	□	□
Ist $f : K^m \to K^n$ linear, so gibt es eine Matrix A mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in K^m$.	□	□
Ist ein Erzeugendensystem im K^n linear abhängig, so hat es mindestens $n+1$ Elemente.	□	□
Die Relation $x \sim y \iff x + y \geq 0$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{Z}$.	□	□
Für quadratische Matrizen A, B gilt stets $\det(AB) = \det(BA)$.	□	□
Ist $U \subset K^n$ ein Unterraum, so folgt aus $\dim U = n$ schon $U = K^n$.	□	□
Es gibt eine lineare Abbildung $f : K^2 \to K^2$ mit $f(1,1) = (1,2)$ und $f(1,2) = (1,1)$.	□	□
Je zwei darstellende Matrizen einer linearen Abbildung gehen durch Zeilen- und Spaltenoperationen ineinander über.	□	□
Das Signum eines Zykels der Länge k ist $(-1)^k$.	□	□
Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt stets $\mathrm{Kern}(f) + \mathrm{Bild}(f) = V$.	□	□

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Beweisen Sie: ist $f : X \to Y$ eine Abbildung und $A \subset Y$, so gilt $f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A)$.

b) Sei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ gegeben durch $f(x, y) = (x - y)x$. Überprüfen Sie f auf Injektivität bzw. Surjektivität.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der linearen Abbildung $l_A : K^5 \to K^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & 5 & -10 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Bestimmen Sie die darstellende Matrix $M_B^B(f)$ der linearen Abbildung $f : K^4 \to K^4$ mit $f(e_i) = ie_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$ bezüglich der Basis $B = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_4, e_4)$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Bestimmen Sie Zykelzerlegung und Vorzeichen der Permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ und $\tau \in S_n$ mit $\tau(i) = \begin{cases} i+2 & , \quad i \leq n-2 \\ 1 & , \quad i = n-1 \\ 2 & , \quad i = n \end{cases}$.

Aufgabe 6: (4 Punkte)

Bestimmen Sie Rang und Determinante der folgenden Matrix in Abhängigkeit von $\alpha \in K$:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 0 \\ 1-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$