Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Rainer Brüske

27. März 2006
Bearbeitungszeit:
09:00 bis 11:00

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (8 Punkte) Unterstreichen Sie jeweils die richtigen der vier Aussagen (und heften Sie dieses Blatt an die Abgabe!!):

a) Ein Teilsystem eines Erzeugendensystems ist:
manchmal ein Erzeugendensystem / nie ein Erzeugendensystem / zu einer Basis ergänzbar / zu einer Basis verkürzbar.

b) Invertierbare Matrizen:
sind quadratisch / haben maximalem Rang / sind Isomorphismen / haben linear unabhängige Spalten.

c) Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Die Teilmenge $U \cup W$ ist:
manchmal ein Unterraum / immer ein Unterraum / nie ein Unterraum / das Erzeugnis von U und W.

d) $m \times n$-Matrizen:
haben Rang $\leq m$ / haben Rang $\leq n$ / haben manchmal Rang 0 / haben Zeilenrang $\neq n$.

e) Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist:
ein Unterraum / manchmal leer / invariant unter Zeilenoperationen / invariant unter Spaltenoperationen.

f) Das Bild eines Erzeugendensystems unter einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist:
ein Erzeugendensystem von Bild(f) / manchmal ein Erzeugendensystem von W / manchmal eine Basis von W / nie ein Erzeugendensystem von W.

g) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion, so ist π:
immer surjektiv / manchmal injektiv / immer injektiv / manchmal bijektiv.

h) Die Dimension eines Vektorraums ist:
manchmal unendlich / eine Isomorphieinvariante / immer ungleich 0 / größer oder gleich der Dimension jedes Unterraums.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen X und Y. Beweisen Sie: f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt.

b) Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 12 & 5 & 7 & 11 & 2 & 15 & 14 & 9 & 8 & 6 & 3 & 13 \end{pmatrix}$ in S_{15} gegeben. Bestimmen Sie Zykelzerlegung und Vorzeichen von σ.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei V ein 15-dimensionaler Vektorraum, $U \subset V$ ein 7-dimensionaler und $W \subset V$ ein 11-dimensionaler Unterraum. Beweisen Sie, dass $\dim(U \cap W) \neq 2$ gilt. Konstruieren Sie U und W wie oben mit $\dim(U \cap W) = 6$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ gegeben durch $f(u, v, w, x, y) := (u+v-y, x+y, u-x, u+x+y)$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasen von $\mathbf{R}^5$ bzw. $\mathbf{R}^4$. Konstruieren Sie Basen von $\mathrm{Bild}(f)$ und $\mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

a) Sei $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ gegeben durch $A_{ij} = 3i + j - 3$. Berechnen Sie $\det(A)$.

b) Seien $a, b \in \mathbf{R}$, und sei $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbf{R})$ gegeben durch $A = (b + (a - b)\delta_{i,j})_{i,j}$. Berechnen Sie $\det(A)$.

c) Sei $n \in \mathbf{N}$ ungerade, und sei $A \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$ schiefsymmetrisch, d.h. $A_{ji} = -A_{ij}$ für alle i, j. Beweisen Sie, dass $\det(A) = 0$ gilt.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbf{L}_{A,0}$. Beweisen Sie, dass $\{b \in \mathbf{R}^3 \,|\, \mathbf{L}_{A,b} \neq \emptyset\}$ ein Unterraum des $\mathbf{R}^3$ ist und geben Sie eine Basis dieses Unterraums an. Konstruieren Sie ein $b \in \mathbf{R}^3$ mit $\mathbf{L}_{A,b} = \emptyset$. Beschreiben Sie $\mathbf{L}_{A,(1,1,3)}$.