Prof. Dr. Markus Reineke
Dr. Rainer Brüske

4. Februar 2006
Bearbeitungszeit:
10:00 bis 12:00

Klausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: (8 Punkte) Unterstreichen Sie jeweils die richtigen der vier Aussagen (und heften Sie dieses Blatt an die Abgabe!!):

a) Teilsysteme linear unabhängiger Systeme sind:
linear unabhängig / linear abhängig / zu Basen ergänzbar / zu Basen verkürzbar.

b) Invertierbare Matrizen:
sind quadratisch / haben maximalem Rang / sind Isomorphismen / haben linear unabhängige Zeilen.

c) Sind $U, W \subset V$ Unterräume mit $U + W = V$, so gilt:
$U \cap W = \emptyset$ / $U \cap W = 0$ / $\dim U + \dim W = \dim V$ / $\dim U + \dim W \geq \dim V$.

d) $m \times n$-Matrizen mit Zeilenrang m:
sind invertierbar / haben Rang $\leq n$ / haben Rang $\geq n$ / haben linear unabhängige Spalten.

e) Der Lösungsraum eines Linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ ist:
ein Unterraum / manchmal leer / manchmal mehr als einelementig / invariant unter Spaltenoperationen.

f) Die folgenden Größen sind invariant unter Zeilenoperationen auf einer Matrix A:
Zeilenraum(A) / Spaltenraum(A) /Rang(A) / $\dim \mathrm{Kern}(A)$.

g) Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X und $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion, so ist π:
immer surjektiv / manchmal injektiv / nie injektiv / nie bijektiv.

h) Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt:
$\dim \mathrm{Kern}(f) \leq \dim V$ / $\dim \mathrm{Bild}(f) \leq \dim V$ /
f ist Iso, sobald f Epi/
Basen von Kern(f) und von Bild(f) ergänzen sich zu einer Basis von V.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen nicht-leeren Mengen X und Y. Beweisen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmenge $A_1, A_2 \subset X$ gilt: $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

b) Sei $n > 1$ und $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_n$. Bestimmen Sie Zykelzerlegung und Signum von σ.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4,$$

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_4 = 0\} \subset \mathbf{R}^4.$$

Bestimmen Sie Basen von U, W, $U \cap W$ und $U + W$.

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $B = ((0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)$ und

$$C = ((1,1,1,0,0), (0,0,0,1,1),\ (1,1,0,1,1),\ (1,1,1,1,0),\ (0,1,1,0,0).$$

Beweisen Sie, dass B eine Basis von $\mathbf{R}^3$ und C eine Basis von $\mathbf{R}^5$ ist. Berechnen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen B und C, wobei $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^5$ mit

$$f(x, y, z) := (x + z, 2x + 2y + z, x + y + z, y + z, x).$$

Aufgabe 5: (4 Punkte) Gegeben Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbf{L}_{A,0}$. Für welche $b \in \mathbf{R}^3$ ist $\mathbf{L}_{A,b} \neq \emptyset$? Bestimmen Sie alle Lösungen von $\mathbf{L}_{A,(4,3,11)}$.

Aufgabe 6: (4 Punkte) Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ und $(1-\delta_{i,j})_{i,j} \in M_{n\times n}(K)$. Beweisen Sie: ist $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $A^2 = A$ und $\det(A) \neq 0$, so ist $A = E_n$.