Aufgabe 1

Was besagt das Euklidische Lemma?

Seien a und b natürliche Zahlen. Das Euklidische Lemma besagt: wenn eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ das Produkt $a \cdot b$ teilt, so teilt es schon eine der Zahlen a oder b.

Aufgabe 2

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

für alle $n \geq 1$ gilt.

Beweis durch vollständige Induktion.
Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

Induktionsanfang. Sei $n = 1$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Also ist Behauptung wahr für $n = 1$.

Induktionsschluss.
Induktionsvoraussetzung. Es gelte

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

für ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Es ist zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + 2(n+1) - 1\\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2(n+1) - 1\\ &= n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 3

Kreuzen Sie an:

Aussage	wahr	falsch
Für $a, b, c \in \mathbb{N}$ folgt aus $a \mid c$ und $b \mid c$, dass $a + b \mid c$. Offenbar gilt zum Beispiel $1 \mid 2$ und $2 \mid 2$, aber nicht $3 \mid 2$.	☐	☒
Für $a, b, c \in \mathbb{N}$ folgt aus $a \mid b$ und $a \mid c$, dass $a \mid b + c$. Das ist ein Spezialfall einer Aussage aus der Vorlesung bzw. überlegt man sich, dass aus $b = k \cdot a$ und $c = l \cdot a$ für $k, l \in \mathbb{N}$ folgt, dass $b + c = (k + l) \cdot a$.	☒	☐
Für alle $n \geq 1$ gilt, dass $2 \mid n^3 + n$. Ist n (un)gerade, so ist auch n^3 (un)gerade. Da die Summe zweier (un)gerader Zahlen gerade ist, folgt, dass die Behauptung wahr ist.	☒	☐
Es gilt $\sum_{i=0}^{4} 2^i = 31$. Es gilt $$\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$	☒	☐
Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ wird von einer Primzahl geteilt. Das wurde in der Vorlesung per Induktion gezeigt.	☒	☐