Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

b) $\{3n + 4 \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}$;

c) Eine Menge M, für die eine injektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert.

d) Eine Menge M, für die eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{Q} \to M$ existiert.

Antworten.

a) Wir zeigen, dass $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar ist. Zunächst ist $\mathbb{Z}$ gemäß Vorlesung abzählbar (durch

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\, n \mapsto \begin{cases} \frac{-n+1}{2}, \ n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2}, \ n \text{ gerade} \end{cases}$$

wird eine Bijektion definiert). Dann ist

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n-1\} \times \mathbb{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n\} \times \mathbb{Z}$$

nach Satz 6.8 der Vorlesung abzählbar. Dieser besagt, dass eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist. Beachte, dass damit auch die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen abzählbar ist.

b) Nach Satz 6.5 der Vorlesung sind Teilmengen von abzählbaren Mengen abzählbar. Also ist $\{3n + 4 \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}$ abzählbar, da $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, was in a) gezeigt wurde.

c) Eine solche Menge ist im Allgemeinen nicht abzählbar. Zum Beispiel gibt es eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, aber $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

d) Laut Vorlesung ist $\mathbb{Q}$ abzählbar und somit nach Satz 6.6 aus der Vorlesung auch M.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgende Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_6$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das kleinste $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sigma^n = \mathrm{id}_{\underline{6}}$.

b) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen.

Antworten.

a) Da $\sigma^i(1) = 2$, falls i ungerade ist, muss n gerade sein. Es gilt

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $n = 4$. Man kann auch nachrechnen, dass $\sigma^3 \neq \mathrm{id}_{\underline{6}}$.

b) Der Algorithmus aus der Vorlesung liefert

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{6,3} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{6,3} \circ \tau_{5,3} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{6,3} \circ \tau_{5,3} \circ \tau_{4,3} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{6,3} \circ \tau_{5,3} \circ \tau_{4,3} \circ \tau_{1,2} \end{aligned}$$

Die Schreibweise ist aber nicht eindeutig. Es gilt zum Beispiel auch

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau_{1,2} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \tau_{1,2} \circ \tau_{3,4} \circ \tau_{4,5} \circ \tau_{5,6}. \end{aligned}$$

Hier ist die Idee allerdings die gleiche. Man verringert in jedem Schritt die Anzahl der Elemente, die nicht auf sich selbst abgebildet werden - und zwar bei der Permutation, die jeweils ganz rechts steht und keine Transposition ist. Dazu schreibt man die Permutation als Produkt einer Transposition und einer neuen Permutation, die mehr Elemente auf sich selbst abbildet als die vorherige. Also zum Beispiel gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \tau_{3,4} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Permutation auf der rechten Seite bildet drei Elemente auf sich selbst ab, die auf der linken nur zwei.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die reelle Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit der Relation:

$$(x, y) \sim (x', y') \;:\Leftrightarrow\; |x| + |y| = |x'| + |y'|.$$

a) Zeigen Sie, dass die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $(1, -1)$ und $(0, 2)$.

a) *Beweis.* Die Relation ist *reflexiv*, weil für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass

$$|x| + |y| = |x| + |y|$$

und somit $(x, y) \sim (x, y)$.

Die Relation ist *symmetrisch*, weil für alle (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| + |y| = |x'| + |y'|$ (also $(x, y) \sim (x', y')$) folgt, dass

$$|x'| + |y'| = |x| + |y|$$

und somit $(x', y') \sim (x, y)$.

Die Relation ist *transitiv*, weil für (x, y), (x', y'), $(x'', y'') \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| + |y| = |x'| + |y'|$ und $|x'| + |y'| = |x''| + |y''|$ (also $(x, y) \sim (x', y')$ und $(x', y') \sim (x'', y'')$) folgt, dass

$$|x| + |y| = |x'| + |y'| = |x''| + |y''|$$

und somit $(x, y) \sim (x'', y'')$.

Damit ist die Relation eine Äquivalenzrelation.

b) Die Äquivalenzklasse $\overline{(1, -1)}$ von $(1, -1)$ sind alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$|x| + |y| = |1| + |-1| = 2.$$

Damit gilt also $|y| = 2 - |x|$. Da $|y| \geq 0$, gilt $|x| \leq 2$. Man überlegt sich, dass die Gleichung für jedes $x \in]-2, 2[$ genau zwei Lösungen hat, nämlich $y = 2 - |x|$ und $y = -2 + |x|$. Das heißt es gilt

$$\overline{(1, -1)} = \{(x, -2 + |x|) \mid x \in]-2, 2[\} \cup \{(x, 2 - |x|) \mid x \in]-2, 2[\}$$

Insbesondere ist also $(0, 2) \in \overline{(1, -1)}$ bzw. $\overline{(1, -1)} = \overline{(0, 2)}$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Sei M eine Menge. Die auf $\mathcal{P}(M)$ folgendermaßen definierte Relation ist reflexiv:

$$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; A \subset B.$$

b) Sei M eine Menge. Die auf $\mathcal{P}(M)$ folgendermaßen definierte Relation ist symmetrisch:

$$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; A \subset B.$$

c) Die auf $\mathbb{R}$ folgendermaßen definierte Relation ist symmetrisch:

$$a \sim b :\Leftrightarrow |a - b| < 1.$$

d) Die auf $\mathbb{R}$ folgendermaßen definierte Relation ist transitiv:

$$a \sim b :\Leftrightarrow |a - b| < 1.$$

Antworten.

a) Die betrachtete Relation ist reflexiv, weil für jede Teilmenge $A \subset M$ gilt, dass $A \subset A$, also $A \sim A$.

b) Die Relation ist nicht symmetrisch, wenn $M \neq \emptyset$. Dann gilt $\emptyset \subset M$, also $\emptyset \sim M$, aber $M \not\subset \emptyset$ und somit $M \not\sim \emptyset$.

c) Die Relation ist symmetrisch, da für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $|a-b| < 1$, also $a \sim b$, gilt, dass $|b-a| = |a-b| < 1$, also $b \sim a$.

d) Die Relation ist nicht transitiv, da zum Beispiel $0 \sim \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \sim 1$, aber $0 \not\sim 1$, was man leicht überprüft. Es gilt nämlich

$$|0 - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{2} < 1, \text{ aber } |0-1| = 1 \not< 1.$$