Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f : X \to Y$ und beliebige Mengen $A, A' \subset X$ und $B, B' \subset Y$ folgende Gleichungen gelten:

a) $f^{-1}(B') \subset f^{-1}(B)$, falls $B' \subset B$,

b) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

c) $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

d) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Beweise.

a) Die Behauptung ist, dass für alle $x \in f^{-1}(B')$ gilt, dass $x \in f^{-1}(B)$. Sei also $x \in f^{-1}(B')$. Dann gibt es ein $y \in B'$, so dass $f(x) = y$. Da $B' \subset B$ nach Voraussetzung, gilt aber auch $y \in B$ und somit $x \in f^{-1}(B)$.

$\square$

b) Die Behauptung ist also, dass für alle $x \in f^{-1}(B \cap B')$ gilt, dass $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ und andersrum.

Sei also $x \in f^{-1}(B \cap B')$. Dann gibt es ein $y \in B \cap B'$, so dass $f(x) = y$. Damit gilt aber $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$. Sei andersrum $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$. Dann gibt es ein $y_1 \in B$ und ein $y_2 \in B'$ mit $f(x) = y_1$ und $f(x) = y_2$. Da $f(x)$ aber eindeutig definiert ist, folgt $y_1 = y_2 \in B \cap B'$ und somit $x \in f^{-1}(B \cap B')$.

$\square$

c) Die Behauptung ist also, dass für alle $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ gilt, dass $x \in X \setminus f^{-1}(B)$ und andersrum.

Sei $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$. Dann gibt es ein $y \in Y \setminus B$ mit $f(x) = y$. Also gilt $x \notin f^{-1}(B)$ und somit $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Sei andersrum $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Dann gilt $f(x) \notin B$ und somit $f(x) \in Y \setminus B$, also $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$.

$\square$

d) Die Behauptung ist also, dass für alle $x \in f^{-1}(B \cup B')$ gilt, dass $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ und andersrum.

Sei $x \in f^{-1}(B \cup B')$. Dann gibt es ein $y \in B \cup B'$, so dass $f(x) = y$. Ist nun $y \in B$, so ist $x \in f^{-1}(B)$ und ist $y \in B'$, so ist $x \in f^{-1}(B')$.

Sei andersrum $x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. Dann gilt $f(x) \in B$ oder $f(x) \in B'$. In beiden Fällen gilt $x \in f^{-1}(B \cup B')$.

$\square$

Aufgabe 2

Seien X und Y zwei Mengen. Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to Y$ die Verkettung einer surjektiven und einer injektiven Abbildung ist.

Beweis. Betrachte

$$\mathrm{Bild}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\} \subset Y.$$

Definiere $\pi : X \to \mathrm{Bild}(f)$, $x \mapsto f(x)$ und $\iota : \mathrm{Bild}(f) \to Y$, $y \mapsto y$. Wir zeigen, dass $f = \iota \circ \pi$ und dass π surjektiv und ι injektiv ist. Zunächst gilt für alle $x \in X$, dass

$$\iota \circ \pi(x) = \iota(f(x)) = f(x)$$

nach Definition von π und ι.

Offenbar gibt es für alle $y \in \mathrm{Bild}(f)$ per Definition ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also ist π surjektiv. Gilt $\iota(y) = \iota(y')$, so folgt nach Definition von ι, dass $y = y'$, also ist ι injektiv.

□

Aufgabe 3

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Ist g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

c) Ist f injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

d) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Anworten.

a) Die Aussage ist falsch. Wähle zum Beispiel $X = \{1\}$, $Y = \{1, 2\}$ und $Z = \{1, 2\}$ und weiter $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ mit $f(1) = 1$ und $g(1) = 1$ bzw. $g(2) = 2$. Dann sind alle Voraussetzungen erfüllt und $g \circ f$ nicht surjektiv.

b) Die Behauptung ist wahr. Wäre g nicht surjektiv, so gilt $\mathrm{Bild}(g) \subsetneq Z$. Da $\mathrm{Bild}(g \circ f) \subset \mathrm{Bild}(g)$, folgt die Behauptung.

c) Die Aussage ist falsch. Wähle zum Beispiel $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2\}$ und $Z = \{1\}$ und weiter $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ mit $f(1) = 1$ bzw. $f(2) = 2$ und $g(1) = g(2) = 1$. Dann sind alle Voraussetzungen erfüllt und $g \circ f$ nicht injektiv.

d) Die Behauptung ist wahr. Wäre f nicht injektiv, so gilt $f(x) = f(x')$ für zwei $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$. Dann gilt aber auch $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ und somit ist $g \circ f$ in diesem Fall auch nicht injektiv.

Aufgabe 4

Wird durch folgende Vorschriften eine Abbildung definiert? Wenn ja, untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3$.

b) $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3$.

c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n - 1$.

d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n - 1$.

e) $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$.

Antworten.

a) f definiert keine Abbildung, da $f(3) = 3$, aber $3 \notin \{1, 2\}$.

b) **Behauptung:** f definiert eine bijektive Abbildung.

Beweis. f definiert eine Abbildung, da jedem $x \in \{1, 2, 3\}$ auf eindeutige Weise ein $y \in \{1, 2, 3\}$ zugeordnet wird. Man überprüft leicht, dass f injektiv und surjektiv, also bijektiv ist.

c) f definiert keine Abbildung, da $f(0) = -1$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

d) **Behauptung:** f definiert eine injektive Abbildung, die nicht surjektiv ist.

Beweis. f definiert eine Abbildung, da jedem $n \in \mathbb{N}$ auf eindeutige Weise ein $m \in \mathbb{Z}$ zugeordnet wird. Die Abbildung ist injektiv, da aus

$$n - 1 = f(n) = f(m) = m - 1$$

folgt, dass $m = n$. Die Abbildung ist aber nicht surjektiv, da $\mathrm{Bild}(f) = \mathbb{N} \cup \{-1\} \subsetneq \mathbb{Z}$.

e) (Diese Aufgabe ist als $*$-Aufgabe zu sehen)

Behauptung: f definiert eine bijektive Abbildung.

Beweis. Zunächst definiert f eine Abbildung, da jedem $x \in]-1, 1[$ auf eindeutige Weise eine reelle Zahl zugeordnet wird. Beachte, dass $1-x^2 \neq 0$ für alle $x \in]-1, 1[$.
Nun ist f injektiv, da aus $f(x) = f(y)$ folgt, dass $\frac{y}{1-y^2} = \frac{x}{1-x^2}$, also $y(1 - x^2) = x(1 - y^2)$ bzw.

$$x - xy^2 - y - x^2y = (x - y)(xy + 1) = 0.$$

Also folgt $x = y$ oder $xy = -1$, das heißt $x = \frac{-1}{y}$. Aus letzterem folgt aber, dass $|x| \geq 1$ oder $|y| \geq 1$, was nach Voraussetzung ausgeschlossen ist. Also gilt $x = y$ und somit ist f injektiv.
Weiter ist f surjektiv. Für $z = 0$ erhält man $f(0) = z$. Für beliebiges $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt, dass für $x = -\frac{1}{2z} \pm \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1}$ folgt, dass $f(x) = z$. Dabei erhält man x durch die Überlegung, dass $f(x) = z$ äquivalent ist zu $z = \frac{x}{1-x^2}$ und somit zu

$$x^2 + \frac{x}{z} - 1 = 0.$$

Nun sind obige x eine Lösung der Gleichung. Nun muss noch geprüft werden, dass für eine der Lösungen $x \in]-1, 1[$ gilt. Sei zunächst $z > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& x := -\frac{1}{2z} + \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} \in]-1, 1[\\
\Leftrightarrow \quad & -1 < -\frac{1}{2z} + \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} < 1 \\
\Leftrightarrow \quad & -2z < -1 + \sqrt{1 + (2z)^2} < 2z.
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist offenbar erfüllt, da $0 < -1 + \sqrt{1 + (2z)^2}$. Nun gilt aber

$$\sqrt{1 + (2z)^2} < \sqrt{1 + 4z + (2z)^2} = \sqrt{(1 + 2z)^2} = 1 + 2z,$$

und somit

$$-1 + \sqrt{1 + (2z)^2} < 2z.$$

Also folgt, dass

$$x = -\frac{1}{2z} + \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} \in]-1, 1[$$

und $f(x) = z$.

Sei nun $z < 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & x := -\frac{1}{2z} - \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} \in]-1, 1[\\ \Leftrightarrow \quad & -1 < -\frac{1}{2z} - \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -2z > -1 + \sqrt{1 + (2z)^2} > 2z. \end{aligned}$$

Beachte, dass hier $2z < 0$ und sich somit die Ungleichheitszeichen im zweiten Schritt umdrehen bzw.

$$-2z \cdot \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} = \sqrt{1 + (2z)^2}$$

gilt. Die zweite Ungleichung ist offenbar erfüllt, da $0 < -1 + \sqrt{1 + (2z)^2}$. Da $-4z > 0$ gilt aber

$$\sqrt{1 + (2z)^2} < \sqrt{1 - 4z + (2z)^2} = \sqrt{(1 - 2z)^2} = 1 - 2z,$$

und somit

$$-1 + \sqrt{1 + (2z)^2} < -2z.$$

Also folgt, dass

$$x = -\frac{1}{2z} - \sqrt{\frac{1}{(2z)^2} + 1} \in]-1, 1[$$

und $f(x) = z$.

$\square$