Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Seien $m, n, n', r \in \mathbb{Z}$ und $a_k, b_k, c \in \mathbb{R}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $m \leq k, n' \leq n$. Zeigen Sie:

a)
$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \prod_{k=m}^{n} b_k$$
,

b)
$$\prod_{k=m}^{n} c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k,$$

c)
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{n'} a_k \prod_{k=n'+1}^{n} a_k$$

d)
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m-r}^{n-r} a_{k+r}$$

Aufgabe 2

Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $\sum_{k=1}^{n} a_k$ bzw. $\prod_{k=1}^{n} a_k$.

a)
$$\frac{3}{1} + \frac{5}{4} + \frac{9}{9} + \frac{17}{16} + \ldots + \frac{1073741825}{900},$$

b)
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots + \frac{18}{19683},$$

c)
$$\frac{6}{1} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{300}{99},$$

d)
$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 13}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 25}.$$

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists m \in \mathbb{Z} : \; m + n = 10^n$,

b) $\forall n \in \mathbb{N} \, \exists m \in \mathbb{N} : \; \mathrm{kgV}(n, m) = nm$,

c) $\exists m \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} : \; \mathrm{kgV}(n, m) = n$,

d) $\forall n \in \mathbb{Q}\, \exists m \in \mathbb{Z}:\; mn = 1$,

e) $\forall n \in \mathbb{Q}\, \exists m \in \mathbb{Z}:\; mn \in \mathbb{Z}$,

f) $\exists m \in \mathbb{Z}\, \forall n \in \mathbb{Z} : mn = n$.

Aufgabe 4

Seien $\mathcal{A}(n)$ und $\mathcal{B}(n)$ Aussageformen. Finden Sie Gegenbeispiele, die zeigen, dass folgende Aussagen nicht logisch äquivalent sind.

a) $\forall n\, \mathcal{A}(n) \vee \forall n\, \mathcal{B}(n)$ und $\forall n\, (\mathcal{A}(n) \vee \mathcal{B}(n))$

b) $\exists n\, \mathcal{A}(n) \wedge \exists n\, \mathcal{B}(n)$ und $\exists n\, (\mathcal{A}(n) \wedge \mathcal{B}(n))$