

Aufgabe 1 *c),d) sind Bonusaufgaben, für die man 6 Bonuspunkte sammeln kann*

Welche der folgenden Relationen definieren eine Äquivalenzrelation auf der jeweiligen Menge M ?

a) Sei $M = \mathbb{R}$ mit

$$x \sim y :\Leftrightarrow x^3 - 3x = y^3 - 3y.$$

b) Sei $M = \mathbb{Z}$ mit

$$x \sim y :\Leftrightarrow 3 \mid x + y.$$

c) Seien M eine Menge und $f : M \rightarrow M$ eine Abbildung und

$$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

d) Sei $M = \mathbb{N}$ mit

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \cdot y \geq 0.$$

Aufgabe 2

Sei $m \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie die Restklassen $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

a) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$. Zeigen Sie, dass

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}.$$

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ zusammen mit der Verknüpfung $+$: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, welche durch $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$ definiert ist, eine Gruppe bildet.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel von $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$.

b) Zeigen Sie, dass die Permutationen \mathcal{S}_n zusammen mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe bilden.

c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$ eine Untergruppe von \mathcal{S}_n ist.

Aufgabe 4 *c) ist eine Bonusaufgabe, für die man 4 Bonuspunkte sammeln kann*

Sei $M = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ und sei für $(p, q), (p', q') \in M$ folgende Relation definiert:

$$(p, q) \sim (p', q') :\Leftrightarrow pq' = p'q.$$

a) Zeigen Sie, dass die Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von $(1, 3)$ und $(7, 100)$.

c) Sei $\mathbb{Q} := M / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen. Zeigen Sie für $(p, q), (p', q'), (r, s), (r', s')$ mit $(p, q) \sim (p', q')$ und $(r, s) \sim (r', s')$, dass

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{p'}{q'} + \frac{r'}{s'}, \quad \frac{pr}{qs} = \frac{p'r'}{q's'}.$$

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!