Übungen zu Grundlagen der Mathematik Bergische Universität Wuppertal
Blatt 6 Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 07.12.2017 PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei M eine Menge.

(a) Berechnen Sie die Kardinalität der Potenzmenge von M in dem Fall, dass M endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung zwischen M und der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ gibt, wenn M endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung $\phi : M \to \mathcal{P}(M)$ gibt. Betrachten Sie dazu die Menge

$$\{m \in M | m \notin \phi(m)\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(m, n) \mapsto \frac{m}{n}$, wobei $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(a) f ist nicht injektiv, warum?

(b) Geben Sie mit Begründung eine Menge $U \subset \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ mit unendlich vielen Elementen an, so dass die Einschränkung $f|_U$ injektiv ist.

(c) Kann man U so wählen, dass *zusätzlich* $f(U) = f(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_6$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, sowie σ^{-1}, τ^{-1} und $(\sigma \circ \tau)^{-1}$. Notieren Sie die Ergebnisse wie in $(*)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_3$ die Gleichung $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ gilt.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie für jedes $n \geq 3$, dass für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ die Gleichung

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

gilt.

(d) Zeigen Sie, dass für jedes $\sigma \in \mathcal{S}_n$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\sigma^i = \sigma^{-1}$ gilt. (Nutzen Sie dazu aus, dass die Menge $\{\sigma^z : z \in \mathbb{Z}\}$ eine Teilmenge der endlichen Menge $\mathcal{S}_n$ ist.)