Übungen zu Grundlagen der Mathematik Bergische Universität Wuppertal
Blatt 5 Prof. Dr. Britta Späth
Abgabe bis 23.11.2017 PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Sei E eine feste Menge. Man begründe folgende Aussagen für beliebige Mengen $X, Y \in \mathcal{P}(E)$.

a) $(X^c)^c = X$

b) Es sind folgende drei Aussagen äquivalent:

   a) X und Y sind disjunkt,

   b) $X \subset Y^c$, und

   c) $Y \subset X^c$.

c) Seien M eine Menge und $X_m \in \mathcal{P}(E)$ für $m \in M$. Dann gilt:

$$\left(\bigcup_{m \in M} X_m \right)^c = \bigcap_{m \in M} (X_m^c).$$

Aufgabe 2 *(von Neumannsches Modell von $\mathbb{N}$)*

Wir definieren rekursiv die Mengen A_i ($i \in \mathbb{N}$) durch folgende Vorschrift $A_0 := \emptyset$ und $A_i = A_{i-1} \cup \{A_{i-1}\}$. Finden und beweisen Sie eine Formel für $|A_i|$. Finden und beweisen Sie eine Formel für die Anzahl der Mengenklammern, die zur Beschreibung von A_i benutzt werden.

Aufgabe 3

a) Geben Sie jeweils eine Menge an, die

   i) alle natürlichen Zahlen bis auf 1, 3, 1027 enthält;

   ii) alle natürlichen Zahlen enthält, die durch 2 teilbar sind, aber keine Vielfachen von 3 sind;

   iii) die Lösungsmenge der Gleichung $x + y = 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ist.

b) Geben Sie nichtleere Mengen $X_m \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für $m \in \mathbb{Z}$ so an, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt:

$$|\{m \in \mathbb{Z} \mid x \in X_m\}| = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 2, & \text{falls } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} n, & \text{falls } n \geq 0, \\ -n, & \text{falls } n < 0. \end{cases}$

b) $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, falls } 2 \mid n, \\ -\frac{n-1}{2} & \text{sonst.} \end{cases}$