Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende Aussagen als Formel:

a) Für jede natürliche Zahl, die größer als zwei ist, existiert eine Primzahl, die diese teilt.

b) Die Summe von zwei ganzen Zahlen ist genau dann durch zwei teilbar, wenn die Differenz durch zwei teilbar ist.

c) Jede Primzahl, die das Produkt von zwei gegebenen natürlichen Zahlen teilt, teilt bereits einen der Faktoren.

d) Es gilt nicht, dass das Produkt einer geraden und einer ungeraden natürlichen Zahl gerade ist.

Aufgabe 2

Für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und eine Primzahl p definieren wir den p-Anteil m_p von m als die größte natürliche Zahl der Form p^l, die m teilt.

Seien p eine Primzahl, $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass n nicht von p geteilt wird. Zeigen Sie:

a) Es gilt $j_p = \big((n-1)p^k + j\big)_p$ für alle natürlichen Zahlen $j = 1, \ldots, p^k$.

b) Es gilt $p \nmid \binom{p^k n}{p^k}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Summen und Produkte:

a)
$$\left(\sum_{i=1}^{7} (-1)^i 2i\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{5} (2 + 2^j)\right),$$

b)
$$\left(\prod_{i=1}^{10} 2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{3} 2j^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} k\right).$$

c)
$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{k=1}^{3} kj$$

Aufgabe 4

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Aussagen.

a) Geben Sie Aussagen an, die aus $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ zusammengesetzt sind und logisch äquivalent zu den Aussagen „entweder $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$“ bzw. „weder $\mathcal{A}$ noch $\mathcal{B}$“ sind.

b) Beweisen Sie, dass folgende Aussagen logisch äquivalent sind: $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ und $\neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$.

c) Beweisen Sie, dass folgende Aussagen logisch äquivalent sind: $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ und $\neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$.

Ab dem 13.11. findet die Montagsvorlesung immer in Hörsaal 32 statt!