Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

## Aufgabe 1

Für natürliche Zahlen $a, b$ definieren wir das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a, b)$ von $a$ und $b$ als die kleinste natürliche Zahl, die sowohl von $a$ als auch $b$ geteilt wird. Zudem definieren wir den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ von $a$ und $b$ als die größte natürliche Zahl, die sowohl $a$ als auch $b$ teilt.

Seien die Primfaktorzerlergungen von $a$ und $b$ gegeben durch

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}, \quad b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$$

für paarweise verschiedene Primzahlen $p_i$ und $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \ldots, r$. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{s_i}$, wobei $s_i = \min(n_i, m_i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

b) $\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{t_i}$, wobei $t_i = \max(n_i, m_i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

## Aufgabe 2

Finden Sie für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel für

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (3i + 1)$$

und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

## Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Betrachten Sie ein Brett mit $2n$ Feldern, die in zwei Zeilen und $n$ Spalten angeordnet sind. Sei $M_n$ die Anzahl der Möglichkeiten, dieses Brett mit Dominosteinen vollständig zu überdecken, wobei jeder einzelne Dominostein zwei benachbarte Felder abdeckt. Es gilt also $M_1 = 1$, $M_2 = 2$ und $M_3 = 3$.

Finden Sie eine Formel für $M_n$ für alle $n \geq 3$, die die Form $M_n = aM_{n-1} + bM_{n-2}$ hat, wobei $a, b \in \mathbb{N}$, und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

**Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer auf die Abgabe.**

**In der Woche vom 30.10.-03.11. findet kein regulärer Übungsbetrieb statt. Stattdessen findet am Donnerstag, den 02.11., um 14 Uhr eine Zentralübung in HS 32 statt.**