Übungen zu Grundlagen der Mathematik
Blatt 2
Abgabe bis 26.10.2017

Bergische Universität Wuppertal
Prof. Dr. Britta Späth
PD Dr. Thorsten Weist

Aufgabe 1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} i > 2^n.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Fläche eines Rechtecks, die mit n Geraden in kleinere Flächen unterteilt wird, wobei n eine natürliche Zahl ist. Jede dieser so entstandenen kleineren Flächen wird nun entweder schwarz oder weiß gefärbt. Zeigen Sie, dass es eine solche Färbung gibt, für die gilt, dass benachbarte Flächen - also solche die durch eine Gerade getrennt werden - verschieden gefärbt sind.

Aufgabe 4

Finden Sie den Fehler im folgenden Beweis.

Behauptung: Für jede reelle Zahl $a > 0$ und jede natürliche Zahl n gilt $a^n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion.
I.A.: Sei $n = 0$. Dann gilt $a^0 = 1$ gilt für jede Zahl $a > 0$. Also ist die Behauptung wahr für $n = 0$.
I.S.: Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a^n = 1$ für ein $n \geq 0$ und damit auch für alle vorherigen n, d.h. $a^n = a^{n-1} = \cdots = 1$.
Zu zeigen ist, dass $a^{n+1} = 1$. Es gilt

$$a^{n+1} = a^n \cdot a = a^n \cdot \frac{a^n}{a^{n-1}} \overset{\text{I.V.}}{=} 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Also gilt $a^{n+1} = 1$. □

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer auf die Abgabe.