Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels dem in der Vorlesung behandelten Verfahren den größten gemeinsamen Teiler von a und b und bestimmen Sie dabei ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, für die die Gleichung $\mathrm{ggT}(a, b) = x \cdot a + y \cdot b$ gilt.

a) $a = 13$ und $b = 32$;

b) $a = 1295$ und $b = 2849$.

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie folgende Ausdrücke $\overline{1}^{-1}$, $\overline{7}^{-1}$ und $\overline{2}^{-1}$ in $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

b) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ existiert ein $y \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mit $xy = \overline{1}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Für welche Zahlen $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ existiert ein $y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $xy = \overline{1}$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:

a) Es gilt
$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$
für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt 2^{n+2} teilt $3^{(2^n)} - 1$.

Aufgabe 4

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Gilt $a \mid c$ und $b \mid c$, so folgt $a - b \mid c$.

b) Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$, so folgt $a \mid bc$.

c) Gilt $a \mid bc$, so folgt $a \mid b$ oder $a \mid c$.

d) Gilt $a \mid b$ und $a \mid c$, so folgt $a \mid b + c$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Wahrheitstafeln der folgenden Aussagen:

a) $(\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{B})) \wedge \mathcal{A}$;

b) $(A \vee \mathcal{B}) \wedge (\neg \mathcal{B})$.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, C, D die Inklusion $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$ gilt. Gilt auch die umgekehrte Inklusion?

Aufgabe 7

Seien X, Y, Z drei Mengen. Weiter seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist g surjektiv und f injektiv.

b) Ist g nicht surjektiv, so ist $g \circ f$ nicht surjektiv.

c) Ist f nicht injektiv, so ist $g \circ f$ nicht injektiv.

Aufgabe 8

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität bzw. Surjektivität.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$;

b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 12x - 4$.

Aufgabe 9

Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Relation durch

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad 13 \mid a^2 - b^2$$

gegeben. Ist dies eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10

Betrachten Sie die folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_7$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie σ, τ und $\tau \circ \sigma$ als Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 11

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Die Verknüpfung $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a * b \mapsto a^b$, ist assoziativ.

b) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$.

Aufgabe 12

Betrachten Sie die Verknüpfung $\circ : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ definiert durch $(a, b) \circ (c, d) := (a + c, b + d)$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \circ)$ eine Gruppe ist.

Nur Studierende, die noch nicht 50% der Punkte haben, können die Aufgaben 3, 6, 8 und 11 schriftlich bis Freitag 12 Uhr in den Briefkasten Ihrer Übung abgeben. Bei diesen Aufgaben können maximal 16 Punkte gesammelt werden.