Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende Aussagen als Formel:

a) Für jede reelle Zahl existiert eine reelle Zahl, die doppelt so groß ist.

b) Die Summe einer geraden und einer ungeraden positiven ganzen Zahl ist ungerade.

c) Ist die Summe von zwei ganzen Zahlen durch drei teilbar, so auch ihre Differenz.

Aufgabe 2

Schreiben Sie folgende Aussagen als Sätze:

a) $\forall x \in \mathbb{Z} : \; x^2 \geq x.$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 < x.$

c) $\forall x \in \mathbb{N} \, \forall y \in \mathbb{N} \, \exists z \in \mathbb{N} : \; z \geq xy.$

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\{3, 4\} = \{4, 3\}$

b) $3 \subset \{3, 4\}$

c) $3 \in \{3, 4\}$

d) $\{3\} \subset \{3, 4\}$

e) $\emptyset \subset \{3, 4\}$

f) $\emptyset \in \{3, 4\}$

Aufgabe 4

a) Geben Sie Aussagen an, die aus $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ zusammengesetzt sind und äquivalent zu den Aussagen „entweder A oder B“ bzw. „weder A noch B“ sind.

b) Beweisen Sie folgende logischen Äquivalenzen:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A \vee B \text{ und } \neg(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow A \wedge B$$

Aufgabe 5

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $N = \{2, 5\}$. Bestimmen Sie

$$M \cup N,\; M \cap N,\; N \backslash M,\; M \backslash N.$$

Aufgabe 6

Geben Sie folgende Mengen in möglichst einfacher Form an:

a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 121\}$

b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 36,\; x = 5\}$

c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2x^2 - 4x = -1\}$

Aufgabe 7

Seien L, M, N drei Mengen. Zeigen Sie

a) $(M \backslash N) \cup (N \backslash M) = (M \cup N) \backslash (N \cap M)$.

b) $L \backslash (M \cup N) = (L \backslash M) \cap (L \backslash N)$

c) $L \backslash (M \cap N) = (L \backslash M) \cup (L \backslash N)$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Potenzmengen der folgenden Mengen:

a) $M_1 = \{1, 2, 3\}$

b) $M_2 = \{3, \{1, 4\}\}$

Aufgabe 9

Seien $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ und $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 \leq 3\}$. Bestimmen Sie alle möglichen Schnitte und Vereinigungen der Mengen A, B, C.

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ und $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ und geben Sie ein Beispiel an, in dem im zweiten Fall keine Gleichtheit gilt.

Aufgabe 11

a) Geben Sie unendlich viele paarweise verschiedene nicht-leere Teilmengen $A_i \subset \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, an, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \neq \mathbb{N}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Geben Sie unendlich viele paarweise verschiedene nicht-leere Teilmengen $A_i \subset \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, an, so dass

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

c) Können beide Bedingungen auf einmal erfüllt sein?

Aufgabe 12

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Seien a, $b \in \mathbb{Z}$. Ist a oder b gerade, so ist ab gerade.

b) Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist $n(n + 1)$ gerade.

c) Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.

d) Es gibt keine rationale Zahl, so dass $x^2 = 3$.

Aufgabe 13

Berechnen Sie folgende Summen und Produkte:

$$\sum_{i=1}^{9} \frac{1}{i}, \quad \sum_{i=3}^{7} (i + 1), \quad \prod_{i=3}^{7} (i + 1)$$

Aufgabe 14

Beweisen Sie folgende Formeln per Induktion:

a)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

b)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

c)
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

d)
$$n^2 < 2^n \text{ für alle } n \geq 5$$

e)
$$30 \mid (n^5 - n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 15

Finden und beweisen Sie eine Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Aufgabe 16 (Hilberts Hotel)

Das Hotel des Mathematikers David Hilbert hat unendlich viele Zimmer, die mit den natürlichen Zahlen durchnummeriert sind (d.h. die Zimmer haben die Nummern $1, 2, 3, \ldots$). Eines Tages sind alle Zimmer belegt. Kann man durch Umquartieren der Gäste dennoch neue Gäste aufnehmen? Wenn ja, wie würde man vorgehen, wenn

a) ein neuer Gast kommt.

b) n neue Gäste kommen, wobei n eine natürliche Zahl ist.

c) abzählbar unendlich viele Gäste kommen (d.h. wir können die Gäste mit $1, 2, 3, \ldots$ durchnummeriert sind).

d) abzählbar unendlich viele Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen kommen.

Aufgabe 17

Sei $f : A \to B$ eine Abbildung und seien M_1, $M_2 \subset A$ und N_1, $N_2 \subset B$ Teilmengen. Beweisen Sie:

a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

b) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$.

Aufgabe 18

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y, y)$

c) $h : A \to B$, $x \mapsto x^2$, für die vier Fälle, die sich aus A, $B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ ergeben.

Aufgabe 19

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $U \subset A$ gilt, dass $f^{-1}(f(U)) = U$.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Teilmengen $U \subset B$ gilt, dass $f(f^{-1}(U)) = U$.

c) Falls $g \circ f$ bijektiv ist, so ist f injektiv und g surjektiv.

d) Konstruieren Sie ein Beispiel, in dem f injektiv und g surjektiv ist, aber $g \circ f$ nicht bijektiv ist.

Aufgabe 20

Untersuchen Sie, ob folgende Relationen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definieren:

a) $x \sim y :\Leftrightarrow x \geq y$

b) $x \sim y :\Leftrightarrow x \cdot y \geq -1$

c) $x \sim y :\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3x - 3y$

Aufgabe 21

Untersuchen Sie, ob folgende Relationen eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definieren:

a) Für ein festes $a \in \mathbb{N}$ sei $x \sim y :\Leftrightarrow a \mid x - y$

b) $x \sim y :\Leftrightarrow x + y$ ist gerade.

c) $x \sim y :\Leftrightarrow x \cdot y$ ist gerade.

Aufgabe 22

Seien $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \notin \mathbb{Z}$.

Aufgabe 23

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben.

b) Sind $p_1, \ldots, p_n$ Primzahlen, so ist $p_1 \ldots p_n + 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ nicht durch p_i teilbar.

c) Es gibt unendlich viele Primzahlen (Tipp: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und benutzen Sie die ersten beiden Aussagen).