Lösungsskizze zur Klausur Lineare Algebra I

Aufgabe 1

Seien K ein Körper, V,W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume. Weiter sei Z ein Untervektorraum von W.

a) Wann ist eine Teilmenge U von V ein K-Untervektorraum von V?

b) Wann ist eine Abbildung $f : V \to W$ eine lineare Abbildung?

c) Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(Z)$ ein Untervektorraum von V ist.

d) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$ und $Z := \mathrm{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Bestimmen Sie eine Basis von $f^{-1}(Z)$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Eine Menge $U \subseteq V$ heißt K-Untervektorraum von V, wenn folgendes gilt:
   - $0 \in U$ — 1,5 Punkte
   - Für alle $x, y \in U$ gilt $x + y \in U$.
   - Für $\lambda \in K$ und $x \in U$ gilt $\lambda \cdot x \in U$.

b) Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn für $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$. — 1 Punkt

c) Da Z ein Untervektorraum ist, so gilt $0 \in Z$. Da f linear ist, so gilt $f(0) = 0 \in Z$, also $0 \in f^{-1}(Z)$. — 1 Punkt

Seien nun $x, y \in f^{-1}(Z)$ und $\lambda \in K$. Da f linear ist, so gilt $f(x+y) = f(x)+f(y) \in Z$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x) \in Z$. Somit also $x + y, \lambda \cdot x \in f^{-1}(Z)$. — 2 Punkte

d) Es gilt $Z = \{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Nach Definition von f gilt

$$f^{-1}(Z) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1 Punkt

Wir müssen also

- $x_1 - x_2 = \lambda$
- $x_2 - x_3 = \lambda$

lösen. Es folgt $x_1 = x_2 + \lambda$ und $x_3 = -x_2 + \lambda$. Also $f^{-1}(Z) = \{ \begin{pmatrix} x_2 + \lambda \\ x_2 \\ -x_2 + \lambda \end{pmatrix} \mid x_2, \lambda \in \mathbb{R}\}$. — 0,5 Punkte

Wir folgern daraus, dass $f^{-1}(Z)$ von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese sind aber offensichtlich linear unabhängig und bilden daher eine Basis von $f^{-1}(Z)$. 1 Punkt

Aufgabe 2
Betrachten Sie die folgenden reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t & 1 & 1 & 1 \\ t & 0 & -1 & -1 \\ t & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Entscheiden Sie, ob A invertierbar ist. Bestimmen Sie in diesem Fall A^{-1}.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die Determinante von B_t.

c) Bestimmen Sie $\det(\sum_{i=1}^{2018} C^i)$ und $\sum_{i=1}^{2018} \det(C^i)$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Wir benutzen den Gauss-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist A invertierbar. 1 Punkt

Es gilt insbesondere 2 Punkte

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir entwickeln nach der der zweiten Spalte. Dann gilt: 1 Punkt

$$\det(B_t) = -\det(\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & -1 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & -1 & -1 \\ t & -1 & 1 \end{pmatrix})$$

Wir entwickeln nun nach der ersten Zeile. Da zwei der Streichungsmatrizen für beide Determinanten identisch sind, heben diese sich auf und es ergibt sich 1,5 Punkt

$$\det(B_t) = -t \cdot \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}) = (1-t) \cdot (-2) = 2t - 2$$

c) Es gilt $C^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$. Somit gilt 0,5 Punkte

$$\sum_{i=1}^{2018} C^i = \begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ \sum_{i=1}^{2018} 2i & 2018 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten damit $\det(\sum_{i=1}^{2018} C^i) = 2018^2$. 1 Punkt

Es gilt $\det(C^i) = \det(C)^i = 1$ und daher $\sum_{i=1}^{2018} \det(C^i) = 2018$. 1 Punkt

Aufgabe 3

Gegeben seien die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $U = \mathrm{Spann}(\{v_1, v_2, v_3\})$ der Untervektorraum, der von diesen Vektoren erzeugt wird.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von U bilden.

b) Ergänzen Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

c) Bestimmen Sie einen zweidimensionalen Unterraum V des $\mathbb{R}^5$, so dass $\dim(U \cap V) = 0$.

d) Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ mit $\mathrm{Bild}(f) = U$? Geben Sie wenn möglich eine solche Abbildung an.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Da v_1, v_2, v_3 per Definition ein Erzeugendensystem von U bilden, so reicht es zu zeigen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. 0,5 Punkte

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Es gelten also insbesondere die Gleichungen (Zeile 2,3,4)

- $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$
- $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. 1 Punkt

Also gilt $\lambda_1 = \lambda_3$ und $\lambda_2 = -\lambda_3$. Aus der dritten Gleichung folgt nun $\lambda_3 = 0$ und somit auch $\lambda_2 = \lambda_1$. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind daher linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U. 1 Punkt

b) Wir behaupten, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3, e_1, e_5 linear unabhängig sind. 1 Punkt

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda e_1 + \lambda e_5 = 0$. Wie in Teil a) gelten nun insbesondere die Gleichungen

- $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$
- $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$
- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$

aus denen wir wiederum $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ folgern können. Aus der ersten und fünften Gleichung folgeren wir damit direkt, dass $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ sein muss. 1 Punkt

Da die Vektoren v_1, v_2, v_3, e_1, e_5 linear unabhängig sind und $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$ ist, so bilden sie bereits eine Basis. 0,5 Punkte

c) Nach der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V.$$

Wählen wir $V = \langle e_1, e_5 \rangle$, so folgt aus c), dass $\dim(U+V) = \dim \mathbb{R}^5 = 5$ und somit hat V die gewünschte Eigenschaft. Beachte, dass aus a) folgt, dass $\dim U = 3$. 1 Punkt

d) Nein. Es gilt $2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \text{Bild}(f) + \text{Kern}(f) \geq \dim(\text{Bild}(f))$, aber $\dim(U) = 2$. 2 Punkte

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(A)$ und $\text{Kern}(A)$.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L_{A,b}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

c) Konstruieren Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L_{B,b} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in L_{B,0}.$$

Lösung zu Aufgabe 4

Wir benutzen den Gauss-Algorithmus 4 Punkte

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 10 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 10 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 10 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 20 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \end{array}\right),$$

a) Aus der obigen Rechnung können wir $\text{Rang}(A) = 3$ ablesen. Daher gilt $\text{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$. 0,5 Punkte

Außerdem gilt $\text{Kern}(A) = \text{Spann}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$. 0,5 Punkte

b) Wir setzen x_1, x_2, x_3 als feste Variablen und x_4 als freie Variable. Aus der obigen Rechnung ergibt sich direkt:

- $x_1 = 4x_4$
- $x_2 = -7x_4 + 1$
- $x_3 = 4x_4 - 1$

Somit ergibt sich also 1 Punkt

$$L_{A,b} = \{ \begin{pmatrix} 4x_4 \\ -7x_4 + 1 \\ 4x_4 - 1 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

c) Seien $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir müssen eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ konstruieren mit $Ba_1 = Ba_2 = 0$ und $Ba_3 = b_3$. Es gilt nun 1 Punkt

- $e_1 = a_1 + a_2 - a_3$
- $e_2 = -a_1 - a_2 + 2a_3$
- $e_3 = a_1 - a_3$

Damit erhalten wir $Be_1 = Be_3 = -b$ und $Be_2 = 2b$. Da Be_i die i-te Spalte von B ist, so ergibt sich also 1 Punkt

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen **wahr** oder **falsch** sind. (1 Punkt je Aufgabenteil). **Begründen** Sie Ihre Antwort, indem Sie die Aussage beweisen oder widerlegen. (2 Punkte je Aufgabenteil)

a) Für $\sigma \in S_n$ gilt $\det((P_\sigma)^2) = 1$.

b) Es gibt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = 4$.

c) Sei $\dim(V) = 3$. Dann gibt es Untervektorräume U_1, U_2, U_3 von V mit

$$\{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq V?$$

d) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig. Wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind, dann ist f injektiv.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Die Aussage ist **wahr**. Es gilt $\det((P_\sigma)) \in \{\pm 1\}$, also

$$\det((P_\sigma)^2) = \det(P_\sigma)^2 = 1.$$

b) Die Aussage ist **falsch**. Es gilt $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{ZR}(A) \leq 3$. Beachte, dass der Zeilenrang die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren ist und somit höchstens gleich der Anzahl der Zeilen der Matrix.

c) Die Aussage ist **falsch**. Angenommen doch. Dann gilt

$$0 < \dim(U_1) < \dim(U_2) < \dim(U_3) < \dim(V) = 3.$$

Da Dimensionen natürliche Zahlen sind und es nur 2 natürliche Zahlen zwischen 0 und 3 gibt, erhalten wir einen Widerspruch.

d) Die Aussage ist **wahr**. Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$ beliebig. Da $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ ist, so ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Also gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$. Da f linear ist, so gilt $f(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$. Da $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind, so gilt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ und somit $v = 0$.

Aufgabe 6

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Kern}(f^2)$ und $\mathrm{Bild}(f^2) \subset \mathrm{Bild}(f)$.

b) Zeigen Sie: Es ist $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f) = \{0\}$.

c) Was besagt der Dimensionssatz für die lineare Abbildung $f : V \to V$?

d) Zeigen Sie: Es ist $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Sei $x \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann gilt $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$, also $x \in \mathrm{Kern}(f^2)$. 1 Punkt

Sei $z \in \mathrm{Bild}(f^2)$. Dann gibt es ein $x \in V$ mit $f^2(x) = z$. Für $y := f(x)$ gilt also $f(y) = f^2(x) = z$ und damit $z \in \mathrm{Bild}(f)$. 1 Punkt

b) " $\Rightarrow$ " Sei $y \in \mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(f)$. Dann gibt es $x \in V$ mit $f(x) = y$. Da $y \in \mathrm{Kern}(f)$ ist, so gilt $f^2(x) = f(y) = 0$. Also gilt $x \in \mathrm{Kern}(f^2) = \mathrm{Kern}(f)$ und somit $y = f(x) = 0$. 1 Punkt

" $\Leftarrow$ " Nach Teil a) gilt $\mathrm{Kern}(f^2) \subset \mathrm{Kern}(f)$. Sei x $\mathrm{Kern}(f^2)$. Dann gilt $f(x) \in \mathrm{Bild}(f)$ und wegen $f^2(x) = f(f(x)) = 0$ gilt $f(x) \in \mathrm{Kern}(f)$. Also gilt nach Voraussetzung $f(x) = 0$, daher $x \in \mathrm{Kern}(f)$. 1 Punkt

c) Es gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. 1 Punkt

d) Wir wenden den Dimensionssatz auf die Abbildung $f : V \to V$ und die Abbildung $f^2 : V \to V$ an und erhalten 1 Punkte

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathrm{Kern}(f^2)) + \dim(\mathrm{Bild}(f^2)).$$

Wir folgern daraus, dass $\dim(\mathrm{Kern}(f^2)) = \dim(\mathrm{Kern}(f))$ genau dann gilt, wenn $\dim(\mathrm{Bild}(f^2)) = \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

Wegen Teil a) gilt nun $\mathrm{Kern}(f^2)) = (\mathrm{Kern}(f))$ genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(f^2) = \mathrm{Bild}(f)$ 1 Punkt