Quasi-Interpolanten zu Operatoren vom Durrmeyer-Typ

Martin Wagner

Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C - Mathematik und Naturwissenschaften

18. November 2011

Gliederung

Einleitung

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a, b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a, b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a,b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a,b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a,b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a,b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

Motivation

- Ziel: Approximation von komplizierten Funktionen durch einfachere mittels linearer Operatoren
- Weierstraß'scher Approximationssatz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder stetigen Funktion f existiert ein algebraisches Polynom p, so dass $||f - p||_\infty < \varepsilon$
- Möglicher Ansatz: Interpolation
- Satz von Faber: Für jede Folge $(x_k^{(n)})$ existiert eine Funktion $f \in C[a, b]$, so dass die zugehörige Folge $(L_n f)$ von Interpolationspolynomen auf $[a, b]$ nicht gleichmäßig gegen f konvergiert.

- Beweis des Satzes von Weierstraß mit Hilfe der Bernstein-Polynome:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1]$$

$$\text{mit } p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- Die Bernstein-Polynome liefern ein positives lineares Approximationsverfahren für $f \in C[0,1]$ bezüglich der ∞-Norm, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} ||B_n f - f||_\infty = 0$$

- Beweis des Satzes von Weierstraß mit Hilfe der Bernstein-Polynome:

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in [0,1]$$

$$\text{mit } p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- Die Bernstein-Polynome liefern ein positives lineares Approximationsverfahren für $f \in C[0,1]$ bezüglich der ∞-Norm, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} ||B_n f - f||_\infty = 0$$

Definition Bernstein-Durrmeyer-Operatorn

- Erweiterung der Bernstein-Operatoren auf Lebesgue-intergrierbare Funktion indem man die Punktauswertung durch Integrale der gewichteten Funktion ersetzt.
- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p \leq \infty$.
  Dann ist der Bernstein-Durrmeyer Operator vom Grade n definiert durch

$$(M_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t) dt,\ x \in [0,1],$$

mit $p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Definition Bernstein-Durrmeyer-Operatorn

- Erweiterung der Bernstein-Operatoren auf Lebesgue-intergrierbare Funktion indem man die Punktauswertung durch Integrale der gewichteten Funktion ersetzt.
- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p \leq \infty$.
  Dann ist der Bernstein-Durrmeyer Operator vom Grade n definiert durch

$$(M_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(n+1) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t) dt,\ x \in [0,1],$$

mit $p_{nk}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \geq 0$ für jedes $f \geq 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0 \quad$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p, \ 1 \leq p \leq \infty$
- Symmetrie:
  $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$
  und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$:
  $\langle M_n f, g \rangle = \langle f, M_n g \rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim\limits_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \geq 0$ für jedes $f \geq 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0 \quad$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p, \ 1 \leq p \leq \infty$
- Symmetrie:
  $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$
  und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$:
  $\langle M_n f, g \rangle = \langle f, M_n g \rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \le p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \ge 0$ für jedes $f \ge 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0 \quad$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \le ||f||_p,\ 1 \le p \le \infty$
- Symmetrie: $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$ und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$: $\langle M_n f, g\rangle = \langle f, M_n g\rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \le p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \ge 0$ für jedes $f \ge 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0 \quad$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \le ||f||_p, \ 1 \le p \le \infty$
- Symmetrie: $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$ und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$: $\langle M_n f, g\rangle = \langle f, M_n g\rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \geq 0$ für jedes $f \geq 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p, \; 1 \leq p \leq \infty$
- Symmetrie:
  $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$
  und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$:
  $\langle M_n f, g\rangle = \langle f, M_n g\rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (1)

- Approximationsverfahren: $\lim_{n\to\infty} ||M_n f - f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \le p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Positivität: $M_n f \geq 0$ für jedes $f \geq 0$
- Erhaltung von Konstanten: $M_n e_0 = e_0$ mit $e_0 = x^0 = 1$
- Kontraktionseigenschaft: $||M_n f||_p \leq ||f||_p, \; 1 \leq p \leq \infty$
- Symmetrie:
  $\int_0^1 (M_n f)(x) g(x) dx = \int_0^1 f(x)(M_n g)(x) dx \quad \forall f, g \in L^1[0,1]$
  und speziell
- Selbstadjungiert in $L^2[0,1]$:
  $\langle M_n f, g\rangle = \langle f, M_n g\rangle \quad \forall f, g \in L^2[0,1]$

Eigenschaften (2)

- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

- Kommutativität: $M_n(M_l f) = M_l(M_n f) \quad \forall l, n \in \mathbb{N}$

Eigenschaften (2)

- Eigenwerte und Eigenfunktionen: $M_n p_m = \lambda_{n,m} p_m$, wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\lambda_{n,m} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!}\frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} & \text{für } n \geq m \\ 0 & \text{für } n < m \end{cases}.$$

- Kommutativität: $M_n(M_l f) = M_l(M_n f) \quad \forall l, n \in \mathbb{N}$

Voronovskaja-Typ Resultat

- Für $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C[0,1]$ und f an einer festen Stelle x 2-mal stetig differenzierbar gilt

$$\lim_{n\to\infty} n\big(f(x) - (M_n f)(x)\big) = \frac{d}{dx}\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}f(x)\right\}$$
$$= \tilde{D}^2 f(x)$$

mit $\tilde{D}^2 f(x) := D\varphi(x)^2 D$ und $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$

- $\Rightarrow$ globale Konvergenzordnung kann auch für sehr glatte Funktionen nicht besser als $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ sein.

Voronovskaja-Typ Resultat

- Für $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C[0,1]$ und f an einer festen Stelle x 2-mal stetig differenzierbar gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\big(f(x) - (M_n f)(x)\big) &= \frac{d}{dx}\left\{x(1-x)\frac{d}{dx}f(x)\right\} \\ &= \tilde{D}^2 f(x)\end{aligned}$$

mit $\tilde{D}^2 f(x) := D\varphi(x)^2 D$ und $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$

- $\Rightarrow$ globale Konvergenzordnung kann auch für sehr glatte Funktionen nicht besser als $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ sein.

Linearkombinationen (1)

- Für $r, n \in \mathbb{N}$ sei

$$\overset{\star}{M}{}_n^r f := \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_l^\star(n) M_{n_l} f,$$

wobei $n = n_0 < n_1 < \dots < n_{r-1} \leq A \cdot n$ und

$$\alpha_l^\star(n) := \frac{(n_l + r)!}{(n_l + 1)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{r-1} \frac{1}{n_l - n_j}.$$

Zusätzlich fordert man noch

$$\sum_{l=0}^{r-1} |\alpha_l^\star(n)| \leq B$$

mit von n unabhängigen Konstanten A und B.

Linearkombinationen (2)

- Es gilt $\overset{\star}{M}{}_n^r \, e_k = e_k, \; k = 0, ..., r-1$
- Dadurch erhält man eine höhere Konvergenzordnung, da die führenden Fehlerterme in der Taylorentwicklung verschwinden
- M. Heilmann: Approximation auf $[0, \infty)$ durch das Verfahren der Operatoren vom Baskakov-Durrmeyer Typ, *Dissertation, Universität Dortmund, 1987*
- M. Heilmann: Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Approximation von Funktionen mit Hilfe von Linearkombinationen spezieller positiver linearer Operatoren, *Habilitation, Universität Dortmund, 1992*

Linearkombinationen (2)

- Es gilt $\overset{\star}{M}{}_n^r\, e_k = e_k,\ k = 0, ..., r-1$
- Dadurch erhält man eine höhere Konvergenzordnung, da die führenden Fehlerterme in der Taylorentwicklung verschwinden
- M. Heilmann: Approximation auf $[0, \infty)$ durch das Verfahren der Operatoren vom Baskakov-Durrmeyer Typ, *Dissertation, Universität Dortmund, 1987*
- M. Heilmann: Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Approximation von Funktionen mit Hilfe von Linearkombinationen spezieller positiver linearer Operatoren, *Habilitation, Universität Dortmund, 1992*

Linearkombinationen (2)

- Es gilt $\overset{\star}{M}{}_n^r\, e_k = e_k,\ k = 0, ..., r-1$
- Dadurch erhält man eine höhere Konvergenzordnung, da die führenden Fehlerterme in der Taylorentwicklung verschwinden
- M. Heilmann: Approximation auf $[0, \infty)$ durch das Verfahren der Operatoren vom Baskakov-Durrmeyer Typ, *Dissertation, Universität Dortmund, 1987*
- M. Heilmann: Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Approximation von Funktionen mit Hilfe von Linearkombinationen spezieller positiver linearer Operatoren, *Habilitation, Universität Dortmund, 1992*

Linearkombinationen (2)

- Es gilt $\overset{\star}{M}{}_n^r\, e_k = e_k,\ k = 0, ..., r-1$
- Dadurch erhält man eine höhere Konvergenzordnung, da die führenden Fehlerterme in der Taylorentwicklung verschwinden
- M. Heilmann: Approximation auf $[0, \infty)$ durch das Verfahren der Operatoren vom Baskakov-Durrmeyer Typ, *Dissertation, Universität Dortmund, 1987*
- M. Heilmann: Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bei der Approximation von Funktionen mit Hilfe von Linearkombinationen spezieller positiver linearer Operatoren, *Habilitation, Universität Dortmund, 1992*

Die Quasi-Interpolanten

Der Differenzialoperator $\tilde{D}^{2r}$

- $\tilde{D}^{2r} := D^r \left(\varphi(x)^{2r} D^r\right)$ mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$
- $\tilde{D}^{2r} p_m = \gamma_{r,m} p_m$,
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{r,m} := \begin{cases} (-1)^r \frac{(m+r)!}{(m-r)!} & \text{für } r \leq m \\ 0 & \text{für } r > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2r}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\tilde{D}^{2r}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\tilde{D}^{2r} M_n f = M_n \tilde{D}^{2r} f$$

Der Differenzialoperator $\tilde{D}^{2r}$

- $\tilde{D}^{2r} := D^r \left(\varphi(x)^{2r} D^r\right)$ mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$
- $\tilde{D}^{2r} p_m = \gamma_{r,m} p_m$,
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{r,m} := \begin{cases} (-1)^r \frac{(m+r)!}{(m-r)!} & \text{für } r \leq m \\ 0 & \text{für } r > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2r}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\tilde{D}^{2r}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\tilde{D}^{2r} M_n f = M_n \tilde{D}^{2r} f$$

Der Differenzialoperator $\tilde{D}^{2r}$

- $\tilde{D}^{2r} := D^r\left(\varphi(x)^{2r}D^r\right)$ mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1-x)}$
- $\tilde{D}^{2r}p_m = \gamma_{r,m}p_m$,
  wobei $p_m := \frac{\sqrt{2m+1}}{m!}D^m(x^m(1-x)^m)$ die Legendre-Polynome sind und

$$\gamma_{r,m} := \begin{cases} (-1)^r\frac{(m+r)!}{(m-r)!} & \text{für } r \leq m \\ 0 & \text{für } r > m \end{cases}.$$

- Für $f \in C^{2r}[0,1]$ kommutiert der Differentialoperator $\tilde{D}^{2r}$ mit den Bernstein-Durrmeyer Operatoren:

$$\tilde{D}^{2r}M_nf = M_n\tilde{D}^{2r}f$$

Konstruktion der Quasi-Interpolanten

- Darstellung der Inversen von $M_n f$, eingeschränkt auf $\mathbb{P}_r$ mit Hilfe der Differenzialoperatoren $\tilde{D}^{2l},\ l = 0, ..., r$.
  Die Bernstein-Durrmeyer Quasi-Interpolanten der Ordnung $(r, n),\ 0 \leq r \leq n$ sind für $f \in L^1[0,1]$ wie folgt definiert

$$M_n^{(r)} f := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \tilde{D}^{2l}\big(M_n f\big).$$

- $M_n^{(r)} p_m = p_m,\ m = 0, ..., r$

Konstruktion der Quasi-Interpolanten

- Darstellung der Inversen von $M_n f$, eingeschränkt auf $\mathbb{P}_r$ mit Hilfe der Differenzialoperatoren $\tilde{D}^{2l},\ l = 0, ..., r$.
  Die Bernstein-Durrmeyer Quasi-Interpolanten der Ordnung $(r, n),\ 0 \leq r \leq n$ sind für $f \in L^1[0,1]$ wie folgt definiert

$$M_n^{(r)} f := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \tilde{D}^{2l}\big(M_n f\big).$$

- $M_n^{(r)} p_m = p_m,\ m = 0, ..., r$

Darstellung als Linearkombination

- $M_n^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \binom{n+1+r-l}{r} M_{n-l}$
- $M_n^{(r)} = \overset{\star}{M}{}_{n-r}^{r+1}$ bzw. $\overset{\star}{M}{}_n^r = M_{n+r}^{(r-1)}$ für $n_l = n + l$.
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: New polynomial preserving operators on the simplex: direct results, *Journal of Approximation Theory*, **131** (2004), 59-73
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: Durrmeyer-Operators and their natural quasi-interpolants, *Topics in multivariate Approximation and Interpolation* (K.Jetter et. al. Eds.) 2006

Darstellung als Linearkombination

- $M_n^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \binom{n+1+r-l}{r} M_{n-l}$
- $M_n^{(r)} = \overset{\star}{M}{}^{r+1}_{n-r}$ bzw. $\overset{\star}{M}{}^{r}_{n} = M_{n+r}^{(r-1)}$ für $n_l = n + l$.
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: New polynomial preserving operators on the simplex: direct results, *Journal of Approximation Theory*, **131** (2004), 59-73
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: Durrmeyer-Operators and their natural quasi-interpolants, *Topics in multivariate Approximation and Interpolation* (K.Jetter et. al. Eds.) 2006

Darstellung als Linearkombination

- $M_n^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \binom{n+1+r-l}{r} M_{n-l}$
- $M_n^{(r)} = \overset{\star}{M}{}^{r+1}_{n-r}$ bzw. $\overset{\star}{M}{}^{r}_{n} = M_{n+r}^{(r-1)}$ für $n_l = n + l$.
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: New polynomial preserving operators on the simplex: direct results, *Journal of Approximation Theory*, **131** (2004), 59-73
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: Durrmeyer-Operators and their natural quasi-interpolants, *Topics in multivariate Approximation and Interpolation* (K.Jetter et. al. Eds.) 2006

Darstellung als Linearkombination

- $M_n^{(r)} = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \binom{r}{l} \binom{n+1+r-l}{r} M_{n-l}$
- $M_n^{(r)} = \overset{\star}{M}{}^{r+1}_{n-r}$ bzw. $\overset{\star}{M}{}^{r}_{n} = M_{n+r}^{(r-1)}$ für $n_l = n + l$.
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: New polynomial preserving operators on the simplex: direct results, *Journal of Approximation Theory*, **131** (2004), 59-73
- E. Berdysheva, K. Jetter, J. Stöckler: Durrmeyer-Operators and their natural quasi-interpolants, *Topics in multivariate Approximation and Interpolation* (K.Jetter et. al. Eds.) 2006

Ungleichungen vom Bernstein-Typ und gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

- Ungleichungen vom Bernstein-Typ:

$$||\tilde{D}^{2r}(M_n f)||_p \leq 2^r \frac{n!r!}{(n-r)!}||f||_p$$

- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$:

$$||M_n^{(r)} f||_p \leq (2^{r+1}-1)||f||_p$$

Ungleichungen vom Bernstein-Typ und gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

- Ungleichungen vom Bernstein-Typ:

$$||\tilde{D}^{2r}\big(M_n f\big)||_p \leq 2^r \frac{n!r!}{(n-r)!}||f||_p$$

- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$:

$$||M_n^{(r)} f||_p \leq (2^{r+1}-1)||f||_p$$

Direkte Sätze

Approximationsordnung (1)

- $\lim\limits_{n\to\infty} ||f - M_n^{(r)} f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Jackson-Favard-Typ Fehlerabschätzung:
  Für $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

$$f - M_n^{(r)} f = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{l=n+1}^{\infty} (r+1) \frac{(l-r-1)!}{(l+1)!} \tilde{D}^{2(r+1)} (M_l f),$$

  wobei die Reihe absolut und gleichmäßig in [0,1] konvergiert.
  Zudem ergibt sich für $1 \leq p \leq \infty$:

$$||f - M_n^{(r)} f||_p \leq \underbrace{\frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!}}_{=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)} ||\tilde{D}^{2(r+1)} f||_p$$

Approximationsordnung (1)

- $\lim_{n\to\infty} ||f - M_n^{(r)} f||_p = 0$ für $f \in L^p[0,1]$ $1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$
- Jackson-Favard-Typ Fehlerabschätzung:
  Für $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

  $$f - M_n^{(r)} f = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{l=n+1}^{\infty} (r+1) \frac{(l-r-1)!}{(l+1)!} \tilde{D}^{2(r+1)} \left(M_l f\right),$$

  wobei die Reihe absolut und gleichmäßig in [0,1] konvergiert.
  Zudem ergibt sich für $1 \leq p \leq \infty$:

  $$||f - M_n^{(r)} f||_p \leq \underbrace{\frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!}}_{=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right)} ||\tilde{D}^{2(r+1)} f||_p$$

Approximationsordnung (2)

- Für $r \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n-r)!}\Big(f - M_n^{(r)} f\Big)(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\tilde{D}^{2(r+1)} f(x), \;\; x \in [0,1],$$

  und die Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich x.

- $K(f,t) := K_{2l}(f,t)_p := \inf_{g \in C^{2l}} \left\{ ||f-g||_p + t||\tilde{D}^{2l} g||_p \right\} \quad l > 0$
- Sei $f \in L^p[0,1], \; 1 \le p < \infty$, bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$, dann gilt

$$||f - M_n^{(r)} f||_p \le 2^{r+1} K_{2(r+1)} \left(f, \frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!} \right)_p .$$

Approximationsordnung (2)

- Für $r \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n-r)!}\left(f - M_n^{(r)} f\right)(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\tilde{D}^{2(r+1)} f(x), \ x \in [0,1],$$

  und die Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich x.
- $K(f,t) := K_{2l}(f,t)_p := \inf_{g \in C^{2l}} \left\{ ||f-g||_p + t||\tilde{D}^{2l} g||_p \right\} \quad l > 0$
- Sei $f \in L^p[0,1], \ 1 \le p < \infty$, bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$, dann gilt

$$||f - M_n^{(r)} f||_p \le 2^{r+1} K_{2(r+1)} \left(f, \frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!} \right)_p .$$

Approximationsordnung (2)

- Für $r \in \mathbb{N}_0$ und $f \in C^{2(r+1)}[0,1]$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n-r)!}\left(f - M_n^{(r)} f\right)(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}\tilde{D}^{2(r+1)} f(x),\ \ x \in [0,1],$$

  und die Konvergenz ist gleichmäßig bezüglich x.

- $K(f,t) := K_{2l}(f,t)_p := \inf_{g \in C^{2l}} \left\{ ||f-g||_p + t||\tilde{D}^{2l} g||_p \right\} \quad l > 0$

- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \le p < \infty$, bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$, dann gilt

$$||f - M_n^{(r)} f||_p \le 2^{r+1} K_{2(r+1)} \left(f, \frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!} \right)_p .$$

Umkehrresultate

Umkehrresultate für die Quasi-Interpolanten

- Sei $f \in L^p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$ bzw. $f \in C[0,1]$ für $p = \infty$, dann gilt

$$K_{2(r+1)}\Big(f, \frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!}\Big)_p$$
$$\leq C\frac{(n-r)!(k+1)!}{(k-r)!(n+1)!}\Big\{||f - M_n^{(r)}f||_p + ||f - M_k^{(r)}f||_p\Big\}$$

für alle $k > (n+2)(2^{r+1}-1)(r+1)\left(2 + \dfrac{r}{n+2}\right) - 2$,

mit einer von n unabhängigen Konstanten C.

Beweisidee Umkehrresultat(1)

- Konstruiere eine Funktion $g \in C^{2(r+1)}[0,1]$, so dass

  a) $||f - g||_p \leq C||M_n^{(r)} f - f||_p$

  b) $\dfrac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!}||\tilde{D}^{2(r+1)} g||_p$

  $\leq C\dfrac{(n-r)!(k+1)!}{(k-r)!(n+1)!}\left\{||f - M_n^{(r)}||_p + ||f - M_k^{(r)}||_p\right\}$

  für ein k hinreichend groß.
- Wähle $g = (M_n^{(r)})^2 f$

Beweisidee Umkehrresultat(1)

- Konstruiere eine Funktion $g \in C^{2(r+1)}[0,1]$, so dass

$$\textbf{a)}\ ||f-g||_p \leq C||M_n^{(r)}f - f||_p$$

$$\textbf{b)}\ \frac{(n-r)!}{(n+1)!(r+1)!}||\tilde{D}^{2(r+1)}g||_p$$
$$\leq C\frac{(n-r)!(k+1)!}{(k-r)!(n+1)!}\Big\{||f-M_n^{(r)}||_p + ||f-M_k^{(r)}||_p\Big\}$$

  für ein k hinreichend groß.
- Wähle $g = (M_n^{(r)})^2 f$

Beweisidee Umkehrresultat(2)

Hilfsmittel:

- Jackson-Favard- Typ Aussage
- Variante Voronovskaja-Typ Resultat
- Ungleichung vom Bernstein-Typ
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

Beweisidee Umkehrresultat(2)

Hilfsmittel:

- Jackson-Favard- Typ Aussage
- Variante Voronovskaja-Typ Resultat
- Ungleichung vom Bernstein-Typ
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

Beweisidee Umkehrresultat(2)

Hilfsmittel:

- Jackson-Favard- Typ Aussage
- Variante Voronovskaja-Typ Resultat
- Ungleichung vom Bernstein-Typ
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

Beweisidee Umkehrresultat(2)

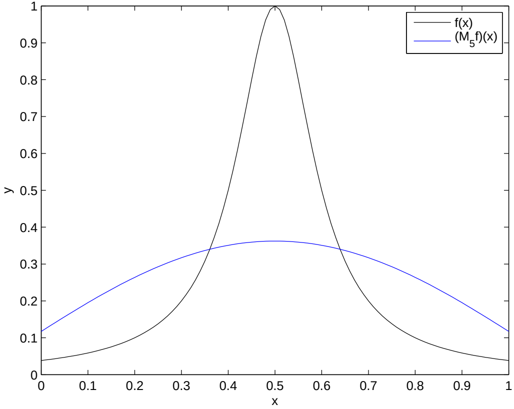
Hilfsmittel:

- Jackson-Favard- Typ Aussage
- Variante Voronovskaja-Typ Resultat
- Ungleichung vom Bernstein-Typ
- Gleichmäßige Beschränktheit von $M_n^{(r)}$

Beispiele

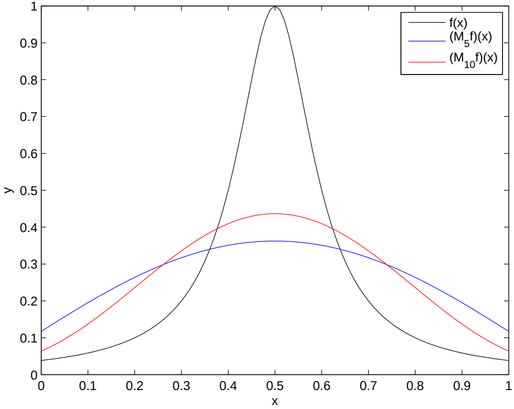
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



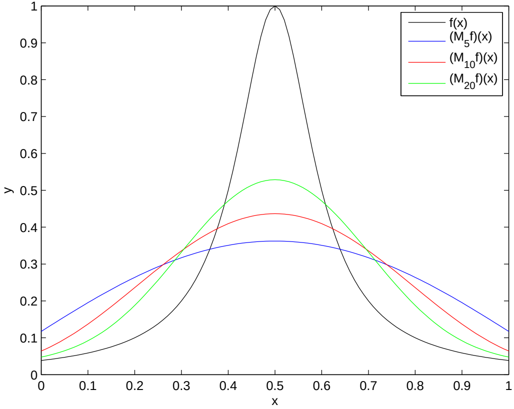
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



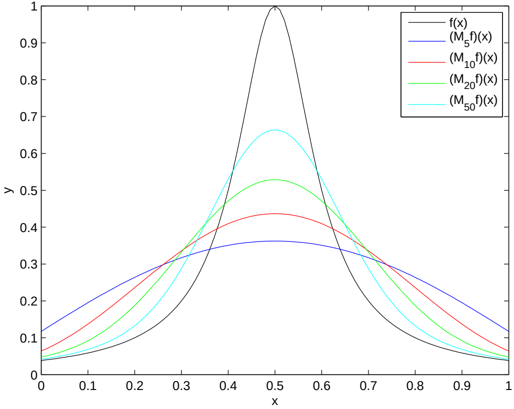
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



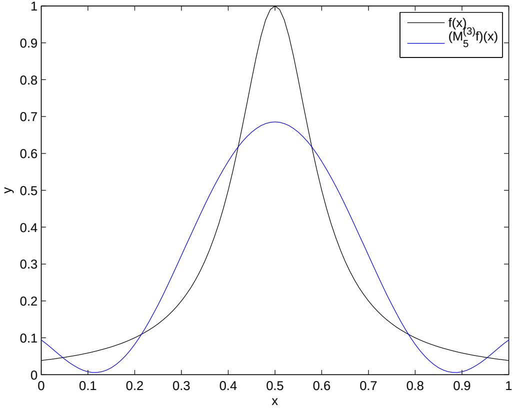
Plots1

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$.



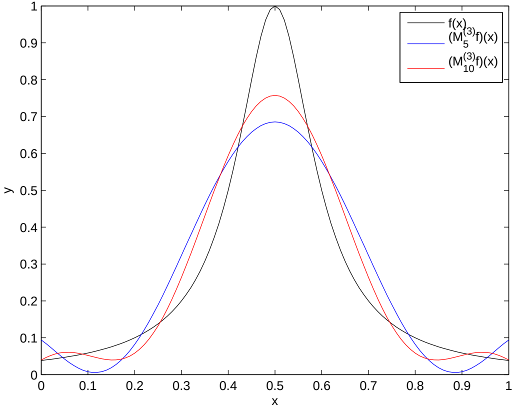
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



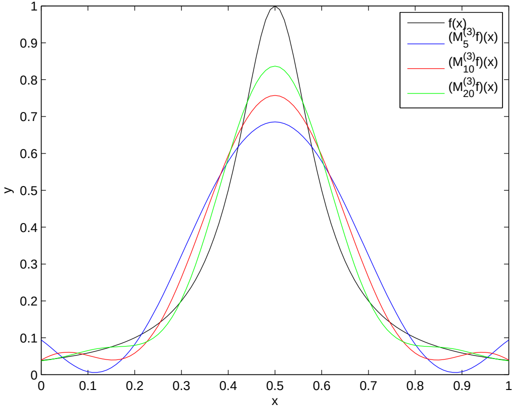
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



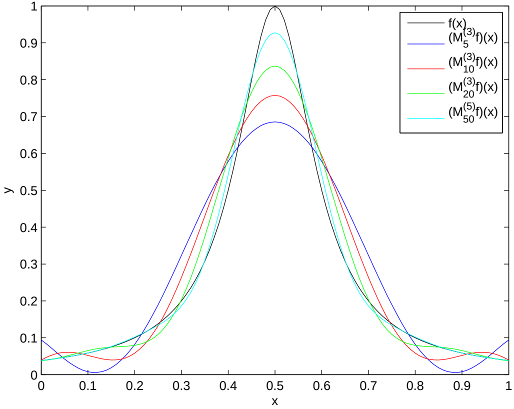
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



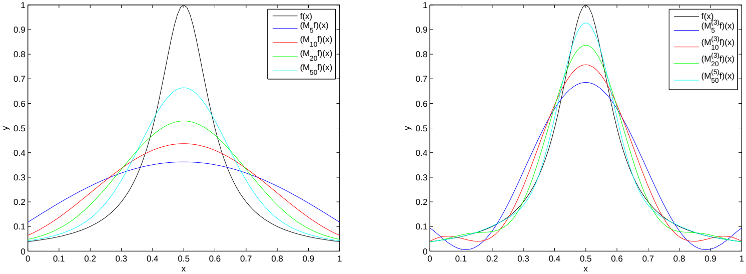
Plots2

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n^{(r)} f)(x)$.



Plots3

Vergleich von $f(x) := \frac{1}{1+25(2x-1)^2}$ mit $(M_n f)(x)$ und $(M_n^{(r)} f)(x)$.



Erweiterungen

Jacobi-Gewichte, Mehrdimensional

- Integrale mit Jacobi-Gewichten:

$$(M_{n,\mu}f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n,k}(x)}{\int_0^1 w_\mu(t)p_{n,k}(t)dt} \int_0^1 f(t)p_{n,k}(t)w_\mu(t)dt$$

$$\text{mit } w_\mu(t) = t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_0},\ \mu_i > -1,\ i = 0,1$$

- $\tilde{D}_\mu^{2r} := w_\mu(x)^{-1} D^r \left(w_\mu(x) x^r (1-x)^r D^r\right)$
- $(M_{n,\mu}^{(r)} f) := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \tilde{D}_\mu^{2l} \left(M_{n,\mu} f\right)$.
- Mehrdimensional auf dem Standard-Simplex

Jacobi-Gewichte, Mehrdimensional

- Integrale mit Jacobi-Gewichten:

$$(M_{n,\mu}f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n,k}(x)}{\int_0^1 w_\mu(t)p_{n,k}(t)dt} \int_0^1 f(t)p_{n,k}(t)w_\mu(t)dt$$

mit $w_\mu(t) = t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_0},\ \mu_i > -1,\ i = 0,1$

- $\tilde{D}_\mu^{2r} := w_\mu(x)^{-1}D^r\left(w_\mu(x)x^r(1-x)^rD^r\right)$
- $(M_{n,\mu}^{(r)}f) := \sum_{l=0}^{r}(-1)^l\frac{(n-l)!}{n!l!}\tilde{D}_\mu^{2l}(M_{n,\mu}f).$
- Mehrdimensional auf dem Standard-Simplex

Jacobi-Gewichte, Mehrdimensional

- Integrale mit Jacobi-Gewichten:

$$(M_{n,\mu}f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n,k}(x)}{\int_0^1 w_\mu(t)p_{n,k}(t)dt} \int_0^1 f(t)p_{n,k}(t)w_\mu(t)dt$$

$$\text{mit } w_\mu(t) = t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_0},\ \mu_i > -1,\ i = 0,1$$

- $\tilde{D}_\mu^{2r} := w_\mu(x)^{-1} D^r \left(w_\mu(x) x^r (1-x)^r D^r\right)$
- $(M_{n,\mu}^{(r)} f) := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \tilde{D}_\mu^{2l} \big(M_{n,\mu} f\big).$
- Mehrdimensional auf dem Standard-Simplex

Jacobi-Gewichte, Mehrdimensional

- Integrale mit Jacobi-Gewichten:

$$(M_{n,\mu}f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{p_{n,k}(x)}{\int_0^1 w_\mu(t)p_{n,k}(t)dt} \int_0^1 f(t)p_{n,k}(t)w_\mu(t)dt$$
$$\text{mit } w_\mu(t) = t^{\mu_1}(1-t)^{\mu_0},\ \mu_i > -1,\ i = 0,1$$

- $\tilde{D}_\mu^{2r} := w_\mu(x)^{-1} D^r \left(w_\mu(x) x^r (1-x)^r D^r\right)$
- $(M_{n,\mu}^{(r)} f) := \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{(n-l)!}{n!l!} \tilde{D}_\mu^{2l} \big(M_{n,\mu} f\big).$
- Mehrdimensional auf dem Standard-Simplex

Baskakov-Durrmeyer Quasi-Interpolanten

- $(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)(n-1)\int_0^{\infty} b_{n,k}(t)f(t)dt$, mit $b_{n,k}(x) := \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$.
- $\tilde{D}^{2r} := D^r(\varphi(x)^{2r} D^r)$, mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1+x)}$.
- $B_n^{(r)} f := \sum_{k=0}^{r} \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{D}^{2k}\big(B_n f\big)$.

Baskakov-Durrmeyer Quasi-Interpolanten

- $(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)(n-1)\int_0^{\infty} b_{n,k}(t)f(t)dt$, mit $b_{n,k}(x) := \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$.
- $\tilde{D}^{2r} := D^r(\varphi(x)^{2r} D^r)$, mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1+x)}$.
- $B_n^{(r)} f := \sum_{k=0}^{r} \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{D}^{2k}\big(B_n f\big)$.

Baskakov-Durrmeyer Quasi-Interpolanten

- $(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(x)(n-1)\int_0^{\infty} b_{n,k}(t)f(t)dt$, mit $b_{n,k}(x) := \binom{n+k-1}{k} x^k (1+x)^{-n-k}$.
- $\tilde{D}^{2r} := D^r(\varphi(x)^{2r} D^r)$, mit $\varphi(x) := \sqrt{x(1+x)}$.
- $B_n^{(r)} f := \sum_{k=0}^{r} \frac{(n-1)!}{(n+k-1)!} \frac{(-1)^k}{k!} \tilde{D}^{2k}\big(B_n f\big)$.

Quasi-Interpolanten zu Szasz-Mirakjan-Durrmeyer Operatoren mit Laguerre-Gewichten

- $(S_{n,\alpha,\beta}f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}}{\langle 1, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}} s_{n,k}(x)$
  mit $\langle f, g\rangle_{\alpha,\beta} = \int_0^{\infty} f(t)g(t)\underbrace{t^{\alpha}e^{-\beta t}}_{=:w(t)}dt$ und

  $s_{n,k}(x) = \frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}$
- $\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta} := e^{\beta x}x^{-\alpha}D^l\left(e^{-\beta x}x^{\alpha+l}D^l\right)$
- $(S^{(r)}_{n,\alpha,\beta}f)(x) := \sum_{l=0}^{r} \frac{(-1)^l}{l!n^l}\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)$

Quasi-Interpolanten zu Szasz-Mirakjan-Durrmeyer Operatoren mit Laguerre-Gewichten

- $(S_{n,\alpha,\beta} f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}}{\langle 1, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}} s_{n,k}(x)$
  mit $\langle f, g\rangle_{\alpha,\beta} = \int_0^\infty f(t)g(t)\underbrace{t^\alpha e^{-\beta t}}_{=:w(t)} dt$ und

  $s_{n,k}(x) = \frac{(nx)^k}{k!} e^{-nx}$
- $\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta} := e^{\beta x} x^{-\alpha} D^l \left(e^{-\beta x} x^{\alpha+l} D^l \right)$
- $(S^{(r)}_{n,\alpha,\beta} f)(x) := \sum_{l=0}^{r} \frac{(-1)^l}{l! n^l} \tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta} (S_{n,\alpha,\beta} f)(x)$

Quasi-Interpolanten zu Szasz-Mirakjan-Durrmeyer Operatoren mit Laguerre-Gewichten

- $(S_{n,\alpha,\beta}f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}}{\langle 1, s_{n,k}\rangle_{\alpha,\beta}} s_{n,k}(x)$
  mit $\langle f, g\rangle_{\alpha,\beta} = \int_0^\infty f(t)g(t)\underbrace{t^\alpha e^{-\beta t}}_{=:w(t)}dt$ und

  $s_{n,k}(x) = \frac{(nx)^k}{k!}e^{-nx}$
- $\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta} := e^{\beta x}x^{-\alpha}D^l\left(e^{-\beta x}x^{\alpha+l}D^l\right)$
- $(S^{(r)}_{n,\alpha,\beta}f)(x) := \sum_{l=0}^{r} \frac{(-1)^l}{l!n^l}\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)$

Eigenschaften und offene Fragen

- $S_{n,\alpha,\beta}^{(r)}$ erhält Polynome vom Grad r
- keine Darstellung als Linearkombination von $S_{n,\alpha,\beta}$ bekannt
- Beweis einer Ungleichung vom Bernstein-Typ?
  Vermutung: $\left|\left|\tilde{D}_{\alpha,\beta}^{2l}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)\right|\right|_p \leq 2^l n^l \prod_{j=1}^{l}(\alpha+j)$
- Geeignte Fehlerdarstellung mittels des Differentialoperators $\tilde{D}^{2l}$?

Eigenschaften und offene Fragen

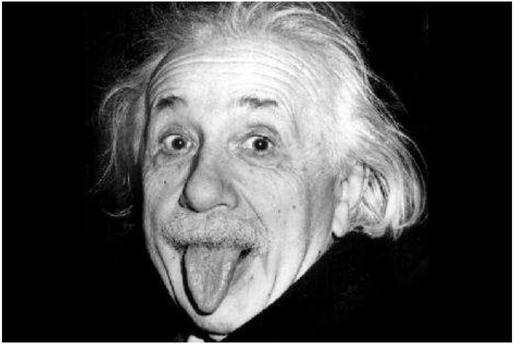
- $S^{(r)}_{n,\alpha,\beta}$ erhält Polynome vom Grad r
- keine Darstellung als Linearkombination von $S_{n,\alpha,\beta}$ bekannt
- Beweis einer Ungleichung vom Bernstein-Typ?
  Vermutung: $\left|\left|\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)\right|\right|_p \leq 2^l n^l \prod_{j=1}^{l}(\alpha+j)$
- Geeignte Fehlerdarstellung mittels des Differentialoperators $\tilde{D}^{2l}$?

Eigenschaften und offene Fragen

- $S^{(r)}_{n,\alpha,\beta}$ erhält Polynome vom Grad r
- keine Darstellung als Linearkombination von $S_{n,\alpha,\beta}$ bekannt
- Beweis einer Ungleichung vom Bernstein-Typ?
  Vermutung: $\left|\left|\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)\right|\right|_p \leq 2^l n^l \prod_{j=1}^{l}(\alpha + j)$
- Geeignte Fehlerdarstellung mittels des Differentialoperators $\tilde{D}^{2l}$?

Eigenschaften und offene Fragen

- $S^{(r)}_{n,\alpha,\beta}$ erhält Polynome vom Grad r
- keine Darstellung als Linearkombination von $S_{n,\alpha,\beta}$ bekannt
- Beweis einer Ungleichung vom Bernstein-Typ?
  Vermutung: $\left|\left|\tilde{D}^{2l}_{\alpha,\beta}(S_{n,\alpha,\beta}f)(x)\right|\right|_p \leq 2^l n^l \prod_{j=1}^{l}(\alpha + j)$
- Geeignte Fehlerdarstellung mittels des Differentialoperators $\tilde{D}^{2l}$?



Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!